UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA – PPGMAT
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

LUCAS FERREIRA GOMES

AFINAL, COMO SURGIRAM AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS?

PRODUTO EDUCACIONAL

LONDRINA
2017

LUCAS FERREIRA GOMES

AFINAL, COMO SURGIRAM AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS?

Produto Educacional apresentado como requisito parcial à obtenção do título Mestre em Ensino de Matemática do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientadora: Profa. Dra. Eliane Maria de Oliveira Araman

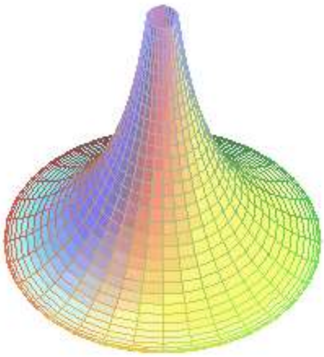
LONDRINA

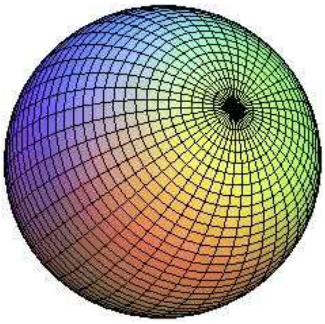
2017

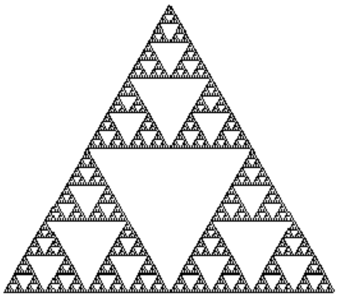
Afinal, como surgiram as geometrias não euclidianas?

Lucas Ferreira Gomes

SUMÁRIO







Caro Colega,

Esse material foi produzido no intuito de permitir a você uma reflexão sobre as geometrias não euclidianas, bem como a fim de que você consiga responder algumas questões como: O que são as geometrias não euclidianas? Como as geometrias não euclidianas surgiram? No que elas se diferem da geometria euclidiana plana? Entre outros questionamentos.

Levando em consideração que, já há algum tempo, alguns documentos que norteiam a educação defendem que esse tópico deve ser explorado na Educação Básica, dentre eles, no estado do Paraná, as Diretrizes Curriculares de Matemática (PARANÁ, 2008), as quais defendem o ensino de noções básicas dessas geometrias nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Segundo esse documento e outros pesquisadores, o ensino desse tópico para públicos escolares justifica-se no fato de que ela possibilita uma maior compreensão da geometria euclidiana plana (MARTOS, 2002); contribui para o entendimento de que a Matemática não é algo pronto e acabado, mas está aberta para a criação de novas ideias e conceitos (BONETE, 2000); contribui para a ampliação dos conhecimentos geométricos e da própria realidade (CHAVICHIOLO, 2011), entre outras.

Todavia, mesmo com essas indicações de contribuições para formação do aluno, identificamos que esse tópico é pouco abordado na firmação inicial e continuada de professores. Dessa forma, dentro do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática – Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática ofertado pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (multicampi Londrina e Cornélio Procópio), nos propusemos a elaborar um conjunto de vídeos e atividades baseados na História da Matemática que permitisse uma reflexão a respeito de alguns conceitos os quais remetem a essa geometria e que pudessem ser utilizados na formação continuada de professores.

Esse material é composto por quatro sequências de atividades, em que a primeira faz uma abordagem sobre a origem das geometrias não euclidianas; já a segunda tange ao estudo das retas paralelas nas geometrias hiperbólica e elíptica; a terceira diz respeito aos triângulos nas geometrias hiperbólica e elíptica; e, por fim, a quarta remete aos quadriláteros nas geometrias hiperbólica e elíptica. O objetivo é fazer você refletir sobre a mesma ideia nas três geometrias: euclidiana plana, hiperbólica e elíptica.

Assim, sugerimos que você providencie o material necessário destacado ao longo das atividades, assista ao vídeo e tente realizar o que está proposto. Alguns dos materiais são sugestões, caso pense em algo diferente você tem total liberdade para desenvolver atividades a partir disso.

Ficamos muito felizes pela sua procura de formação em relação às geometrias não euclidianas e desejamos sucesso na realização do aqui propomos. Ademais, deixamos a sugestão de que você possa levar esses vídeos e atividades para suas aulas, a partir das modificações que achar necessárias.

Atenciosamente,

Lucas Ferreira Gomes.

Sequências de Atividades

1ª SEQUÊNCIA: A ORIGEM DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Essa sequência tem como objetivo refletir sobre o surgimento das geometrias. No vídeo didático, explora-se como essas geometrias surgiram: desde Euclides e o seu quinto postulado, até os principais matemáticos os quais fizeram tamanha criação e suas propostas.

Link: https://www.youtube.com/watch?v=eqjKgzx7fLk&t=4s

Material necessário para realização das atividades:

- lápis,
- borracha,
- caneta ,
- bexiga ,
- régua.

Atividades:

1) Desenhe em seu balão (vazio) uma figura geométrica plana (Ex.: quadrado, retângulo, triângulo, etc.), logo após encha seu balão. A partir da figura responda às seguintes questões:

a) A figura que se formou manteve a mesma forma ou houve alguma modificação? Em caso afirmativo, descreva essa forma.

b) Como ficaram os lados da figura?

c) Você acredita que para essa figura são válidas as mesmas definições e propriedades que eram válidas na figura original? Por quê?

2) A partir das informações apresentadas no primeiro vídeo:

a) Descreva o que de novo as geometrias não euclidianas trouxeram para a matemática.

b) Analise a ideia expressa no trecho a seguir:

> Foi um verdadeiro ato de criação que fez surgir a geometria não euclidiana, mas a palavra que a fez surgir foi a palavra não. A negação é criadora. Pela partícula "não" se realiza a conjunção histórica dos dois sistemas. Para a geometria não euclidiana corresponde uma estrutura evolutiva não-euclidiana na qual, sob sua forma anti-euclidiana, o não-ser precede o ser, o contra vem antes do pró. Ela postula o impossível sob a forma de um discurso mentiroso e o transforma em realidade e em verdade (TOTH, 2011, p. 51).

c) Para você, por que o quinto postulado de Euclides motivou tantos estudos entre os matemáticos?

2ª SEQUÊNCIA: RESTAS PARALELAS NAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Essa sequência tem como objetivo propiciar uma reflexão sobre as modificações na ideia de paralelismo, tendo como base a geometria euclidiana plana, a geometria hiperbólica e a geometria elíptica. Assim, o vídeo didático relacionado a essa sequência apresenta a ideia de paralelismo na geometria euclidiana plana e também a forma como essa mesma ideia se desenvolveu nas geometrias hiperbólica e elíptica.

Link: https://www.youtube.com/watch?v=ZvuzbE0FP3E

Material necessário para realização das atividades:

- lápis,
- borracha,
- caneta,
- compasso,
- régua em acetato (APÊNDICE 2),
- bola de isopor com 10 cm de diâmetro,
- superfície de *biscuit* (APÊNDICE 1).

Atividades:

Na geometria euclidiana plana, duas retas distintas de um plano são paralelas, quando não têm um ponto comum. (IEZZI, 2009).

Esse conceito foi definido em *Os Elementos,* escrito por Euclides por volta de 300 a.C., nessa obra estão os famosos cinco postulados de Euclides e o último deles refere-se a ideia de paralelismo:

> E, no caso de uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontraram-se no lado no qual estão os menores do que dois retos. (EUCLIDES, 2009, p.98).

Esse foi reescrito de diversas maneiras, sendo a mais conhecida a proposta por John Playfair em meados de 1795: “para toda reta *l* e todo ponto *P* fora de *l*, pode-se traçar uma única reta paralela a *l*, que passe por *P*”.

1) Vamos construir tais retas paralelas e verificar a veracidade desse postulado para a geometria euclidiana plana, considerando como o plano a folha de sulfite, proceda da seguinte forma:

a) Trace uma reta e a denomine de *r*;

b) Marque um ponto *P* fora da reta *r*;

c) Construa um arco de centro *P* de modo que este intersecte a reta *r*;

d) Marque o ponto *A* dessa interseção;

e) Construa outro arco de mesmo raio, com centro em *A*, o qual intercepte a reta *r*;

f) Marque o ponto *B* dessa intersecção;

g) Após isso, construa um arco de centro em *B*, de mesmo raio, e que intersecte em algum ponto do arco de centro *P*;

h) Chame o ponto da interseção de *Q*;

i) Trace uma reta a qual passe pelos pontos *P* e *Q* e chame-a de reta *s*.

Por intermédio dessa construção, responda: a reta *s* construída é paralela a *r*, tomando como referência a geometria euclidiana plana?

2) Como vimos no primeiro vídeo, Lobachevsky propôs uma ideia de retas paralelas diferente da proposta por Euclides em sua obra *Os Elementos*, pois "chegou à conclusão que se o espaço muda a imagem e a definição também mudará". (NASCIMENTO, 2013). Assim, ele propôs que o 5º postulado de Euclides fosse substituído pelo seguinte: "existe uma reta *r* e um ponto *P* que não pertence a *r* tal que por *P* passa ao menos duas retas paralelas à reta *r*" (CAMARGO, 2012, p. 49), entendendo reta como geodésica do espaço hiperbólico. A partir dessa substituição, ele deu forma a uma nova geometria, a chamada geometria hiperbólica.

Vamos verificar essa afirmação. Sobre uma superfície hiperbólica, representada pela superfície de *biscuit*, execute os mesmos passos realizados no item anterior.

A partir dessa construção, é possível dizer que a reta que passa por *s* é paralela a *r*, tomando como referência a definição de reta paralela na geometria euclidiana plana? Por quê?

3) Quaisquer duas retas em um plano, desde que não sejam paralelas, têm um ponto de encontro. Contudo:

> Nesta Geometria, as retas são consideradas como os círculos máximos, chamados de geodésicas, que dividem a esfera em duas partes iguais, assim como a linha do equador ou as linhas de longitude da Terra. Esses círculos são chamados de máximos, pois são os maiores círculos que podem ser traçados na esfera e desta forma são os caminhos com menor curvatura. Sendo assim, tem-se uma analogia com as retas no plano euclidiano, pois o caminho mais curto formado por dois pontos da esfera é um arco do círculo máximo que passa por estes pontos. Dois grandes círculos se cruzam, de modo que não existem retas paralelas nesta geometria (CAMARGO, 2012, p.57).

Desse modo, Riemann propôs que o quinto postulado de Euclides fosse substituído por "Dada uma reta *L* e um ponto *P* não pertencente a *L*, não existe reta paralela a *L* passando por *P*". (CAMARGO, 2012, p. 72).

Verifique essa afirmação. Para isso, sobre uma superfície esférica, representada pela bola de isopor, tente realizar os mesmos passos da construção anterior.

Por meio dessa construção, é possível dizer que a reta que passa por *s* é paralela a *r*, tomando como referência a definição de reta paralela na geometria euclidiana plana? Por quê?

4) A partir das atividades e construções realizadas nos três itens anteriores, responda:

a) Descreva como as retas ficaram nessas superfícies.

b) As retas foram construídas em três superfícies distintas, mesmo assim elas perderam suas caraterísticas principais?

c) Em que divergem as características das retas paralelas construídas?

d) Fundamentado nas construções, a que conclusões você chegou? São as mesmas apresentadas no vídeo?

e) Para você, qual a relevância dessas propriedades para a Matemática e para o seu contexto histórico?

3ª SEQUÊNCIA: OS TRIÂNGULOS NAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Essa sequência tem como foco propiciar uma reflexão a respeito da ideia de triângulos, a soma dos ângulos internos de um triângulo e algumas outras propriedades, no que diz respeito às geometrias: euclidiana plana, hiperbólica e elíptica. Dessa forma, o vídeo proposto para essa sequência explora esses conceitos a partir das modificações das ideias relacionadas aos triângulos nessas três geometrias.

Link: https://www.youtube.com/watch?v=YIW-q11QNhY

Material necessário para realização das atividades:

- lápis,
- borracha,
- caneta,
- compasso,
- régua em acetato (APÊNDICE 2),
- transferidor em acetato (APÊNDICE 2),
- bola de isopor com 10 cm de diâmetro,
- superfície de *biscuit* (APÊNDICE 1).

Atividades:

Atualmente, um triângulo é definido como “Dados três pontos A B e C não colineares, chama-se triângulo ABC a reunião dos segmentos AB, BC e AC”. (IEZZI, 2009, p. 99).

O primeiro, dos treze livros de *Os Elementos*, trouxe a ideia de triângulos, porém ele chama essa figura com três lados de triláteras a definindo como “E das figuras triláteras, por um lado, triângulo equilátero é o que tem os três lados iguais, e, por outro lado, isósceles, o que tem só dois lados iguais, enquanto escaleno, o que tem os três lados desiguais”. (EUCLIDES, 2009, p. 98).

1) Levando em consideração essas definições, vamos construir estas figuras:

a) Marque três pontos não colineares em uma folha de papel.

b) Ligue esses pontos.

c) A figura construída se trata realmente de um triângulo?

2) O matemático francês Henri Poincaré (1854-1912) criou um mapa que auxilia na visualização do plano hiperbólico. Esse mapa é um desenho gráfico o qual se propõe a representar, sobre uma superfície plana, o que existe na realidade em uma região acidentada.

O site *Seara da Ciência*[1] afirma que o mapa de Poincaré é do tipo que os matemáticos chamam de mapa conforme. Nesse tipo de mapa, os ângulos são mantidos invariantes pela transformação. Isto é, se duas retas do espaço hiperbólico se cruzam e formam um ângulo qualquer, as representações dessas duas retas no mapa também se cruzam formando o mesmo ângulo.

Assim, um triângulo nessa geometria ficou definido como: Três "retas" não colineares formam um triângulo ABC.

Levando em consideração essa definição:

a) Pegue a superfície de *biscuit* e marque três pontos não colineares sobre ela.

b) Ligue esses pontos.

---

[1] Disponível em: <http://www.seara.ufc.br/>. Acesso em: 20 maio 2016.

c) A figura construída se trata realmente de um triângulo?

3) Considerando A, B e C, três pontos distintos sobre uma esfera e não pertencentes a uma mesma circunferência máxima. Unindo esses pontos, dois a dois, por arcos de circunferências máximas, todos menores que uma semicircunferência, teremos um triângulo esférico ABC.

a) Pegue uma esfera de isopor e marque três pontos não colineares sobre sua superfície.

b) Ligue esses pontos.

c) A figura construída se trata realmente de um triângulo?

4) Os triângulos que você construiu nas duas superfícies (sela e isopor) permanecem com as mesmas características de um triângulo plano? Houve alguma deformação?

5) Sabe-se que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer mede 180°, como afirma Iezzi (2009). Tomando essa afirmação como parâmetro, vamos verificar se essa propriedade é válida para as geometrias elíptica e hiperbólica.

a) Com o auxílio de um transferidor, meça os ângulos formados nas figuras, depois complete a tabela:

X	Triângulo da atividade 1	Triângulo da atividade 2	Triângulo da atividade 3
Medida do ângulo 1			
Medida do ângulo 2			
Medida do ângulo 3			
Soma das medidas dos ângulos			

b) O que você conseguiu verificar sobre a soma dos ângulos internos das figuras? É sempre180º?

c) Logo, é possível afirmar que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo sempre é igual 180°? Por quê?

4ª SEQUÊNCIA: OS QUADRILÁTEROS NAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

A quarta e última sequência tem como objetivo permitir uma reflexão sobre os quadriláteros, a soma dos ângulos internos de um quadrilátero, entre outras propriedades relacionadas a essa figura nas geometrias: euclidiana plana, hiperbólica e elíptica. Assim sendo, o vídeo proposto para essa sequência explora esses conceitos a partir das modificações das ideias relacionadas aos quadriláteros nessas três geometrias.

Link: https://www.youtube.com/watch?v=ia9pzMeVUEU

Material necessário para realização das atividades:

- lápis,
- borracha,
- caneta,
- compasso,
- régua em acetato (APÊNDICE 2),
- transferidor em acetato (APÊNDICE 2),
- bola de isopor com 10 cm de diâmetro,
- superfície de *biscuit* (APÊNDICE 1).

Atividades:

O estudo dos quadriláteros nas geometrias não euclidianas surgiu a partir das tentativas de prova do quinto postulado de Euclides por Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733) e Johann Heinrich Lambert (1728-1777). (RIBEIRO, 2012).

Saccheri admitiu que: dado um quadrilátero simétrico, o qual possui dois ângulos retos e os outros dois iguais entre si, existem três possibilidades para esses ângulos, os quais ele chamou de ângulos de topo, ambos serem retos; ambos serem obtusos; ambos serem agudos. (BARBOSA, 2011).

Considerando que um retângulo quadrilátero, o qualque possui os quatro ângulos retos (IEZZI, 2009), vamos verificar se é possível construir essa figura em qualquer superfície.

1) Assim, vamos construir essa figura nas três superfícies (sulfite, superfície de *biscuit* e bola de isopor), considerando os seguintes passos:

a) Traçar uma reta *r* e nela marcar dois pontos *A* e *B*;

b) Com uma medida qualquer e centro em A, traçar um arco que intercepte a reta *r* em dois pontos e os nomeie de *P* e *Q*;

c) Com a mesma medida traçar um arco com centro em *P* e outro em *Q* de modo que eles se interceptem, nomeie esse ponto de interseção de *C*;

d) Com a mesma medida e centro em B, traçar um arco que intercepte a reta *r* em dois pontos e os nomeie de *U* e *V*;

e) Ligue os pontos *A* e *C*, *B* e *D*, *C* e *D*, formando o quadrilátero *ABCD*.

A partir disso responda:

I) Que figura formou na folha de sulfite?

II) Que figura formou na superfície de *biscuit*?

III) Que figura formou na bola de isopor?

IV) As figuras sofreram alguma deformação em sua aparência? Quais?

2) Partindo da ideia que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360º, vamos verificar se esta propriedade é válida em qualquer espaço.

a) Com o auxílio de um transferidor, meça as medidas dos ângulos formados nas figuras, depois complete o quadro:

X	Quadrilátero no plano	Quadrilátero na pseudoesfera	Quadrilátero na esfera
Medida do ângulo 1			
Medida do ângulo 2			
Medida do ângulo 3			
Medida do ângulo 4			
Soma das medidas dos ângulos internos			

b) O que você conseguiu verificar sobre a soma dos ângulos internos dessas figuras? É sempre 360º?

c) Portanto, é possível afirmar que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo sempre é igual 360°? Por quê?

- Em relação ao quadrilátero de Saccheri, como fica a classificação dos ângulos de topo:
- No plano? ____
- Na superfície hiperbólica? __________________________________
- Na Superfície esférica? ____________________________________

ANOTAÇÕES

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

O que foi proposto com essas atividades e vídeos tem como intuito refletir sobre alguns conceitos relacionados às geometrias não euclidianas, principalmente, em relação às geometrias hiperbólica e elíptica, tendo como base a História da Matemática.

Optamos por ela devido ao fato de que seu uso, aliado à construção do conhecimento matemático dos professores, pode contribuir para que esses sujeitos ampliem suas percepções a respeito dos conceitos matemáticos, o que pode possibilitar melhora da prática em sala de aula. (MIGUEL; BRITO, 1996; ARAMAN, 2011).

Além da História da Matemática, propusemos os vídeos didáticos uma vez que que eles também podem contribuir para compreensão desses conceitos, visto que esse recurso:

> [...] enfatiza o componente visual da matemática, mudando o status da visualização em educação matemática. [...] A mídia usada para comunicar, representar e produzir ideias matemáticas condiciona o tipo de matemática que é feita e o tipo do pensamento que está sendo desenvolvido neste processo. Ao mesmo tempo, o processo de visualização atinge uma nova dimensão se considerar um ambiente computacional de aprendizagem com um coletivo pensante particular, onde estudantes, professores/pesquisadores, mídia e conteúdos matemáticos residem juntos. (BORBA; VILLARREAL, 2005, p. 96, apud MACHADO; MENDES, 2013).

Tendo em vista tais especificidades, consideramos ser possível explorar informações históricas de conceitos matemáticos por meio de vídeos didáticos. Como destaca Machado e Mendes (2013), a História da Matemática pode propiciar a escolha de estratégias pedagogicamente adequadas e interessantes para se abordar determinados tópicos, e o vídeo pode ser uma delas.

Outro aspecto a ser ponderado, em relação ao vídeo, é que esse recurso poder ser acessado de qualquer lugar e a qualquer momento em celulares, computadores, televisores, entre outros aparelhos digitais.

Levando em consideração esses aspectos é que produzimos e propomos o presente material. A partir do que foi explorado ao longo da realização das atividades e dos vídeos, esperamos ter possibilitado a você uma reflexão sobre alguns conceitos relacionados às geometrias hiperbólica e elíptica.

Acreditamos ter causado em você algumas “estranhezas” ao longo desse processo, entretanto esses elementos é que as tornam tão surpreendentes. Assim como você ficou surpreso, entendemos que essas “estranhezas” também podem contribuir para a formação de nossos alunos, como já destacamos.

Dessa forma, concluímos propondo a você que tente inserir esses conceitos em suas aulas e, caso acredite ser conveniente, pode utilizar algumas das atividades aqui propostas com as alterações que as quais sejam relevantes e, também, os vídeos.

REFERÊNCIAS

ARAMAN, E. M. O. **Contribuições da história da matemática para a construção dos saberes do professor de matemática**. 2011. 240 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011.

BARBOSA, L. N. S. C. de. **Uma reconstrução histórico-filosófica do surgimento das geometrias não euclidianas**. 2011. 58 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011.

BONETE, I. P. **As Geometrias não-euclidianas em cursos de licenciatura**: algumas experiências. 2000. 219 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas/Universidade Estadual do Centro-Oeste, Campinas/Guarapuava, 2000.

CAMARGO, K. C. A. **A expressão gráfica e o ensino das geometrias não euclidianas.** 2012. 144 f. Dissertação (Mestrado em Ciências e em Matemática) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

CHAVICHIOLO, C. V. **Geometrias não euclidianas na formação inicial do professor de matemática**: o que dizem os formadores. 2011. 165 p. Dissertação (Mestrado em Educação), Setor de Educação – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2011.

EUCLIDES. **Os Elementos.** Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

IEZZI, G. **Matemática e Realidade**. São Paulo: Atual, 2009.

MACHADO, B. F.; MENDES, I. A. **Vídeos didáticos de história da matemática:** produção e uso na educação básica. São Paulo: Livraria da Física, 2013. 180 p.

MARTOS, Z. G. **Geometrias não euclidianas:** uma proposta metodológica para o ensino de Geometria no ensino fundamental. 2002. 143 f. Dissertação (Mestrado em

Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

MIGUEL, A.; BRITO, A. J. A história da matemática na formação do professor que ensina matemática. **Caderno CEDES**, Campinas, v. 40, p. 47-61, 1996.

NASCIMENTO, A. K. S. do. **Geometrias não euclidianas como anomalias:** implicações para o ensino de geometria e medidas. 2013. 115 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2013.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares para a Educação Básica:** Matemática. Curitiba, 2008. Disponível em: <http://www.nre.seed.pr.gov.br/irati/arquivos/file /matematica.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2016.

RIBEIRO, R. D. G. L. **O ensino das geometrias não euclidianas:** um olhar sob a perspectiva da divulgação científica. 2012. 102 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade São Paulo, São Paulo, 2012.

TOTH, I. A revolução não euclidiana. **Caderno de Física da UEFS**, 09 (01 e 02), p. 37-52, 2011.

APÊNDICE A

(Superfície de *Biscuit*)

Passos para a confecção:

Nossa sugestão é deixar massa de *biscuit* (encontrada em lojas de artesanato) bem fina com o auxílio de um rolo como mostra a imagem:

Em seguida, recortar, com o auxílio de uma faca ou estilete, a massa no formato da imagem:

Colocar a massa recortada na parte superior de uma garrafa como mostra a imagem:

Deixar secar na garrafa durante um dia.

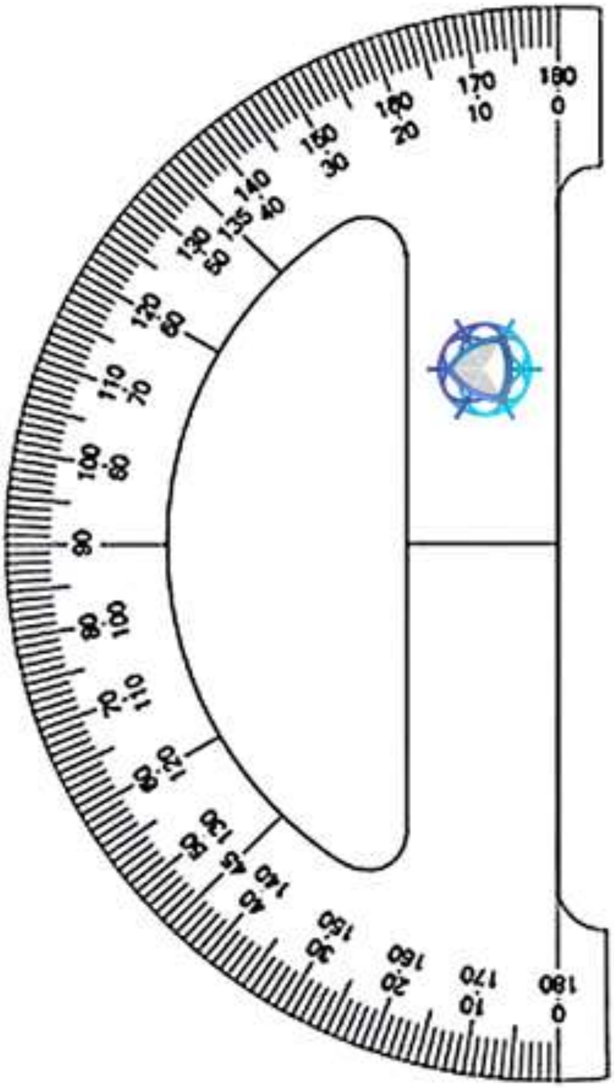
Retirar a massa da garrafa e deixar secar por mais dois dias (dependendo da massa) quando ela estiver bem firme estará pronto para o uso. Ela deverá ficar como mostra a imagem a seguir:

É necessário destacar que essa superfície de *biscuit* pode ser reutilizada, isto é, os desenhos feitos a lápis podem ser apagados, o que permite desenhar e redesenhar quando necessário.

Além disso, caso queira utilizar outro material você tem total liberdade, dentre eles um possível é uma vuvuzela.

APÊNDICE B

(Molde do transferidor e da régua para cópia em acetato)



Obs: a régua não precisa ter as medidas, pois não é necessário medir nas superfícies da esfera e nos *bicuit*. Ela servirá de suporte

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA