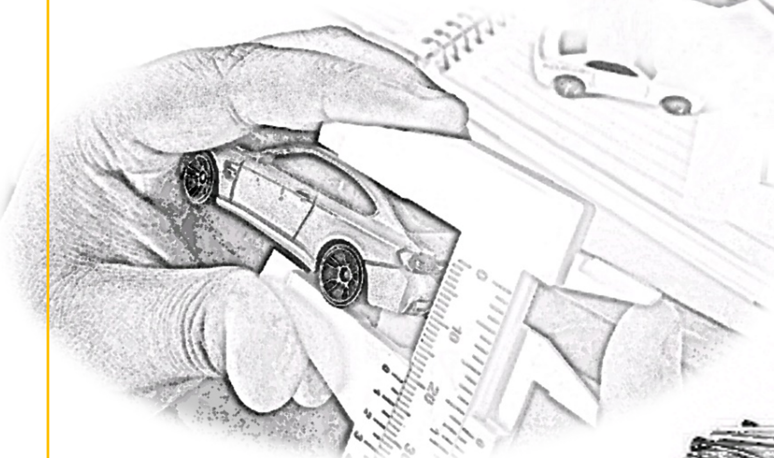
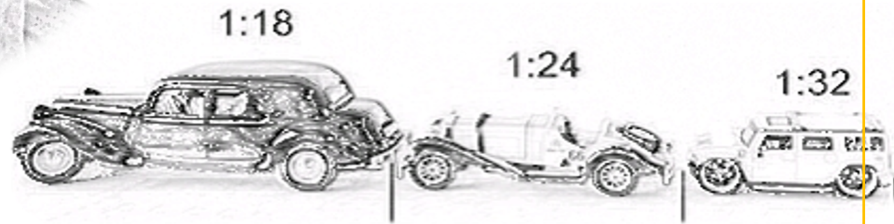
UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

ppgmat
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENSINO DE MATEMÁTICA

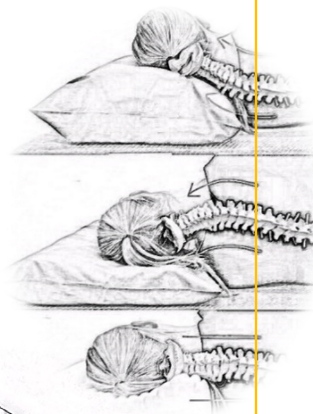


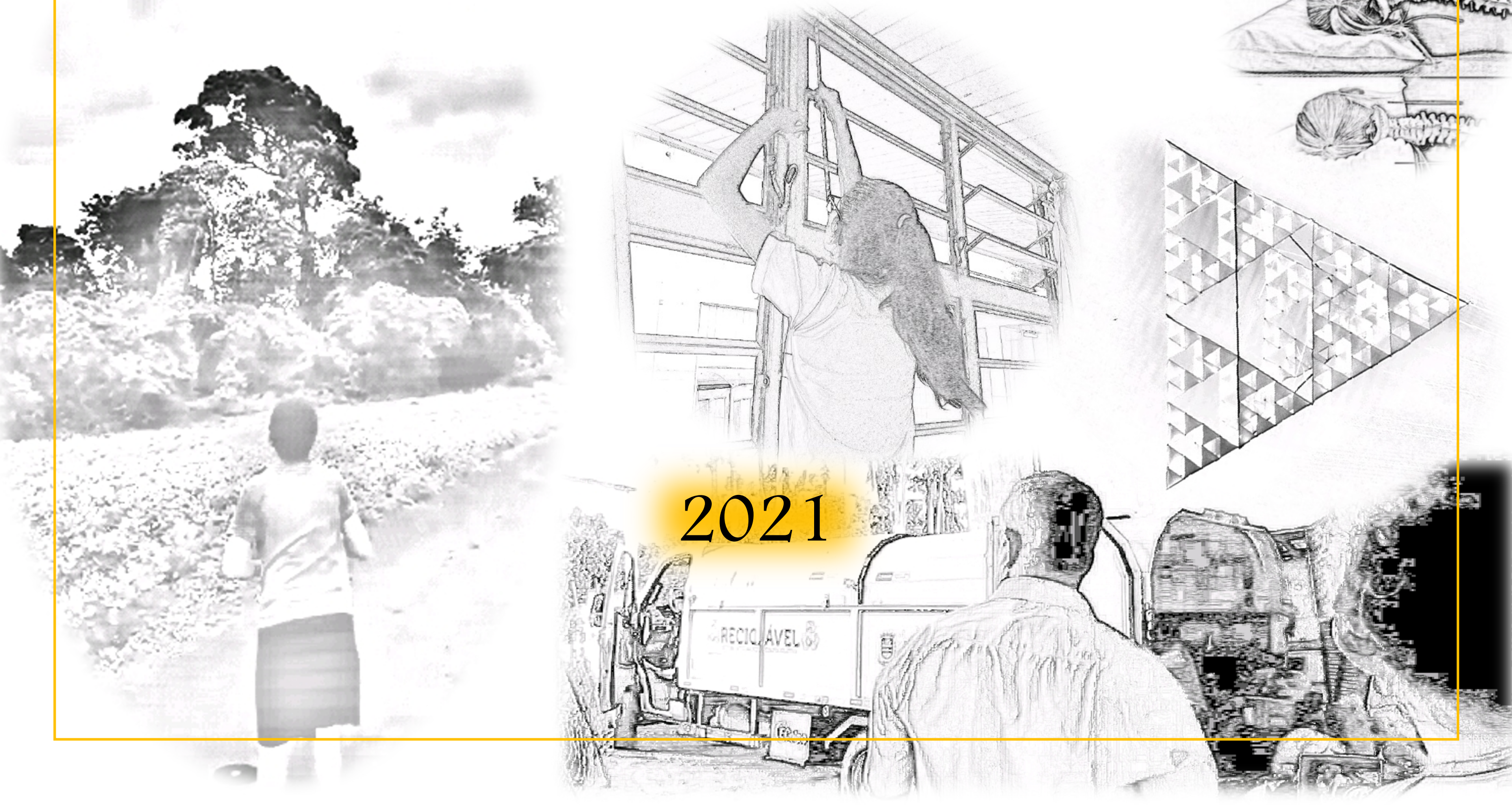
Cristiana Fadin
Emerson Tortola



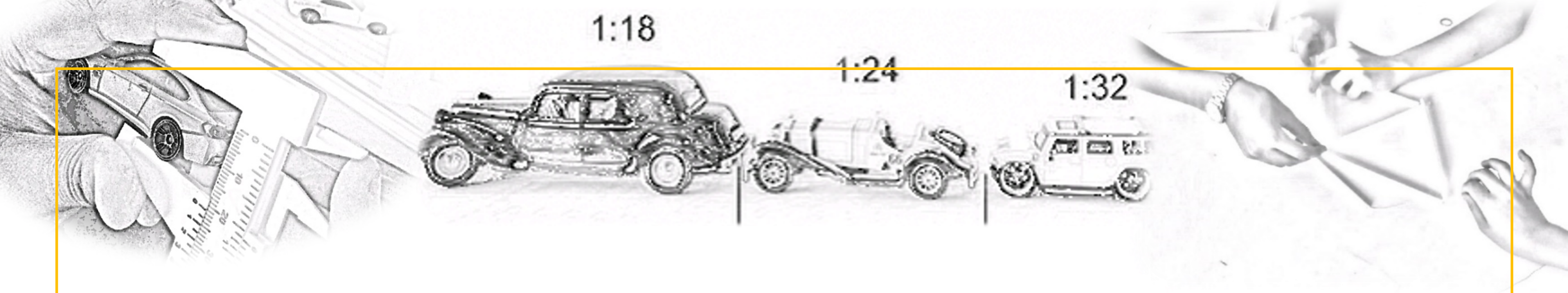
Modelagem Matemática e Pensamento Algébrico

orientações para professores do Ensino Fundamental





2021



UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Cristiana Fadin
Emerson Tortola

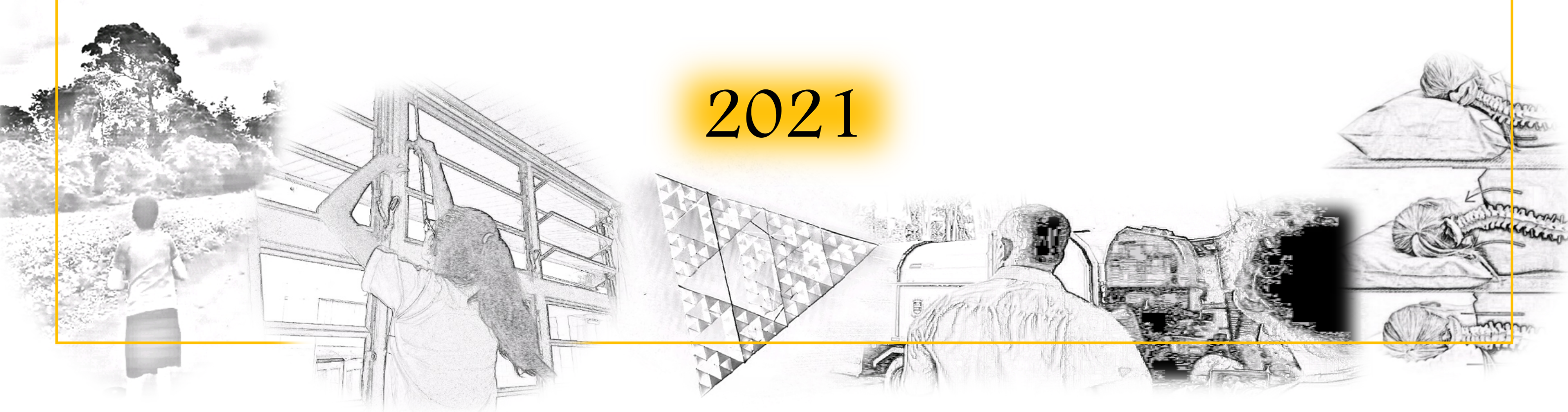
Modelagem Matemática e Pensamento Algébrico

orientações para professores do Ensino Fundamental

PRODUTO EDUCACIONAL

Ilustrações:
Arquivo de imagens dos autores
Coleção Virtual
Associação Nacional de Fisioterapia em Quiropraxia

2021



CRISTIANA FADIN

MODELAGEM MATEMÁTICA E PENSAMENTO ALGÉBRICO:
ORIENTAÇÕES PARA PROFESSORES DO ENSINO FUNDAMENTAL

MATHEMATICAL MODELLING AND ALGEBRAIC THINKING:
GUIDELINES FOR ELEMENTARY SCHOOL TEACHERS

Produto Educacional apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Cornélio Procópio e Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Emerson Tortola

LONDRINA
2021

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Londrina

CRISTIANA FADIN

MODELAGEM MATEMÁTICA E PENSAMENTO ALGÉBRICO NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestra Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 24 de Março de 2021

Prof Emerson Tortola, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof.a Magna Natalia Marin Pires, Doutorado - Universidade Estadual de Londrina (Uel)

Prof Rodolfo Eduardo Vertuan, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 19/04/2021.

Apresentação

Caro(a) Professor(a)

Este Produto Educacional é fruto de uma pesquisa de Mestrado intitulada: “Modelagem Matemática e Pensamento Algébrico no 6º ano do Ensino Fundamental”, desenvolvida no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Cornélio Procópio e Londrina.

Apresentamos a você professor(a) um material pedagógico com propostas de atividades de Modelagem Matemática que podem contribuir com o desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos do Ensino Fundamental. As atividades que o compõem foram discutidas no Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação e Educação Matemática (GEPEEM), do qual participamos. O objetivo desse grupo é fomentar debates e reflexões a respeito da Educação e Educação Matemática, particularmente no que diz respeito à Modelagem Matemática.

Inicialmente expomos uma breve caracterização sobre Modelagem Matemática como alternativa pedagógica para o ensino da Matemática e sobre a importância de um trabalho pedagógico direcionado ao desenvolvimento do pensamento algébrico desde os primeiros anos escolares. Na sequência, propomos seis atividades que foram desenvolvidas durante a pesquisa de Mestrado à qual esse produto educacional está vinculado, trazendo para cada uma delas orientações para o seu desenvolvimento, indicando materiais necessários, conteúdos matemáticos que podem ser abordados e elementos do pensamento algébrico que podem ser desenvolvidos. As três primeiras atividades são descritas com mais detalhes e as três últimas são deixadas como sugestões para que o(a) professor(a) se aventure em seu desenvolvimento. Em anexo há materiais auxiliares que podem ser impressos e levados para a sala de aula.

Nosso propósito é de que as ideias aqui apresentadas possam orientar e incentivar você, professor(a), a desenvolver atividades de Modelagem Matemática em suas aulas e o pensamento algébrico em seus alunos.

Grande Abraço.

Cristiana Fadin
Emerson Tortola

Sumário

Modelagem Matemática na Educação Matemática **6**

Modelagem Matemática e a sala de aula 6

Modelo Matemático 8

Model-Eliciting Activities (MEAs) 10

Pensamento Algébrico **14**

Contextos de desenvolvimento do Pensamento Algébrico 16

Pensamento Relacional 16

Pensamento Funcional 17

Três Atividades: algumas orientações **19**

Miniaturas 20

Reciclagem 26

Aerofractal 32

Sugestões de Atividades **42**

Gincana Outubro Rosa 43

Tecnopatias 46

Ar-condicionado 50

Referências **54**

Anexos **57**

Anexo A: Dimensões originais de alguns carros 58

Anexo B: Situação-problema da Atividade Miniaturas 59

Anexo C: Modelo de gráfico pictórico 60

Modelagem Matemática na Educação Matemática

Modelagem Matemática e a sala de aula

A Modelagem Matemática é uma alternativa pedagógica que oportuniza discussões com temáticas associadas à realidade. Segundo Stillman (2015), fazer Modelagem Matemática envolve usar conceitos matemáticos, estruturas e relações para descrever e caracterizar, ou modelar, uma situação do mundo real de modo que capture suas características essenciais.

> Uma atividade de modelagem matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma pode ser descrita em termos de situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final. Nesse sentido, relações entre a realidade (origem da situação inicial) e matemática (área em que os conceitos e os procedimentos estão ancorados) servem de subsídio para que conhecimentos matemáticos e não matemáticos sejam acionados e/ou produzidos e integrados. A essa situação inicial problemática chamamos situação-problema; à situação final desejada associamos uma representação matemática, um modelo matemático.
>
> (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 12)

Para Almeida e Vertuan (2014), o modelo matemático é o que vai "dar a forma à solução do problema e a Modelagem Matemática é a atividade que busca por esta solução" (ALMEIDA; VERTUAN, 2014, p. 2). A introdução de atividades de Modelagem Matemática em sala de aula pode ocorrer de forma gradativa, visto que os alunos não estão familiarizados com esse tipo de atividade. Almeida e Dias (2004) propõem que essa introdução seja feita a partir de três momentos, de modo que os estudantes, organizados em grupos, possam aos poucos se familiarizar com ações e procedimentos característicos da Modelagem Matemática. A principal argumentação para essa introdução gradativa reside na possibilidade que o aluno tem de desenvolver a habilidade de fazer Modelagem.

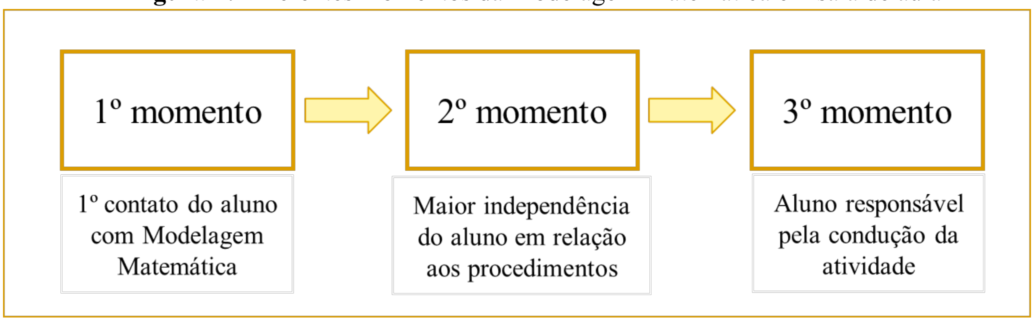
Conforme a proposta das autoras, em um primeiro momento, o professor desenvolve com os alunos uma atividade de Modelagem já estruturada, que contém as informações necessárias para sua solução. O professor apresenta o contexto da situação-problema em questão, o problema derivado dessa situação, bem como os dados qualitativos e quantitativos necessários para a obtenção de um modelo matemático capaz de descrever a situação e solucionar o problema. Todos os esforços dos alunos na busca pela solução do problema, são orientados pelo professor.

Em um segundo momento, o professor traz para a sala de aula, novamente, uma situação-problema derivada de um contexto não matemático, mas a seleção das informações consideradas essenciais para a resolução do problema é de responsabilidade dos alunos, assim como a formulação de hipóteses, as quais irão direcionar a investigação para a obtenção de um modelo matemático que seja válido para a situação em estudo. Cabe ao professor orientar os encaminhamentos das ações, quando solicitado.

E, finalmente, em um terceiro momento, os alunos são incentivados a desenvolver uma atividade de Modelagem Matemática, sendo responsáveis por todas as ações empreendidas no primeiro e segundo momentos de familiarização da atividade de Modelagem: escolha de um tema; identificação de um problema para investigação; coleta e análise dos dados; identificação dos conceitos matemáticos necessários para resolver o problema; obtenção e validação de um modelo matemático e seu uso para a análise da situação.

Esses momentos são esquematizados por Almeida e Vertuan (2011), como mostra a Figura 1, de modo a ilustrar a progressão gradativa da autonomia dos alunos ao fazer Modelagem na sala de aula.

Figura 1: Diferentes momentos da Modelagem Matemática em sala de aula

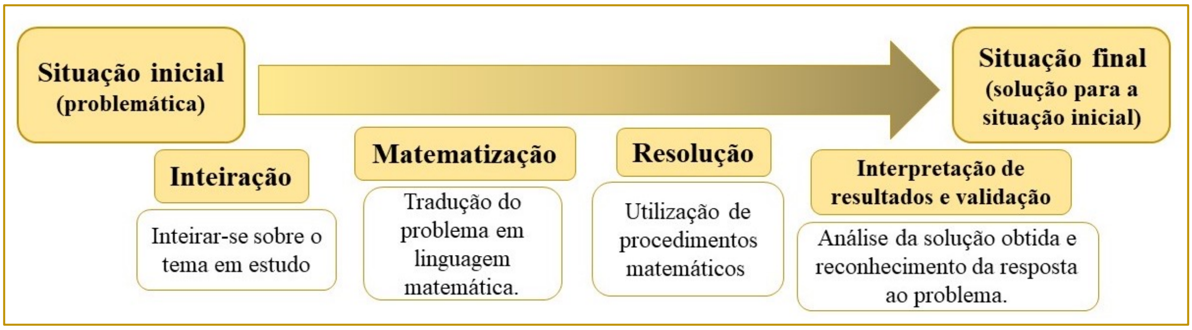


Fonte: Almeida e Vertuan (2011, p. 28)

Além da introdução gradativa de atividades de Modelagem Matemática na sala de aula, é importante que o professor saiba que, em geral, as ações e/ou procedimentos de uma atividade de Modelagem, necessárias para analisar, estruturar e solucionar uma situação-problema, são organizadas em fases, geralmente não lineares. Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 15), por exemplo, organizam essas ações e/ou procedimentos em quatro fases e as denominam como: “inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação”.

As fases propostas por Almeida, Silva e Vertuan (2012), são organizadas por eles em um esquema, como mostra a Figura 2, que ilustra o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática, partindo de uma situação inicial, problemática, em direção a uma situação final, resposta para o problema, e nesse caminhar estão as quatro fases da Modelagem.

Figura 2: Fases da Modelagem Matemática



Fonte: Adaptado de Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 15)

Durante o desenvolvimento da atividade de Modelagem, os alunos conseguem observar a utilidade da matemática e, gradativamente, sua capacidade de utilizar conhecimentos matemáticos é refinada (NISS; BLUM; GALBRAITH, 2007). O professor tem o desafio de “ajudar o aluno a compreender, construindo relações matemáticas significativas em cada etapa do processo” (BASSANEZI, 2002, p. 175).

Modelo Matemático

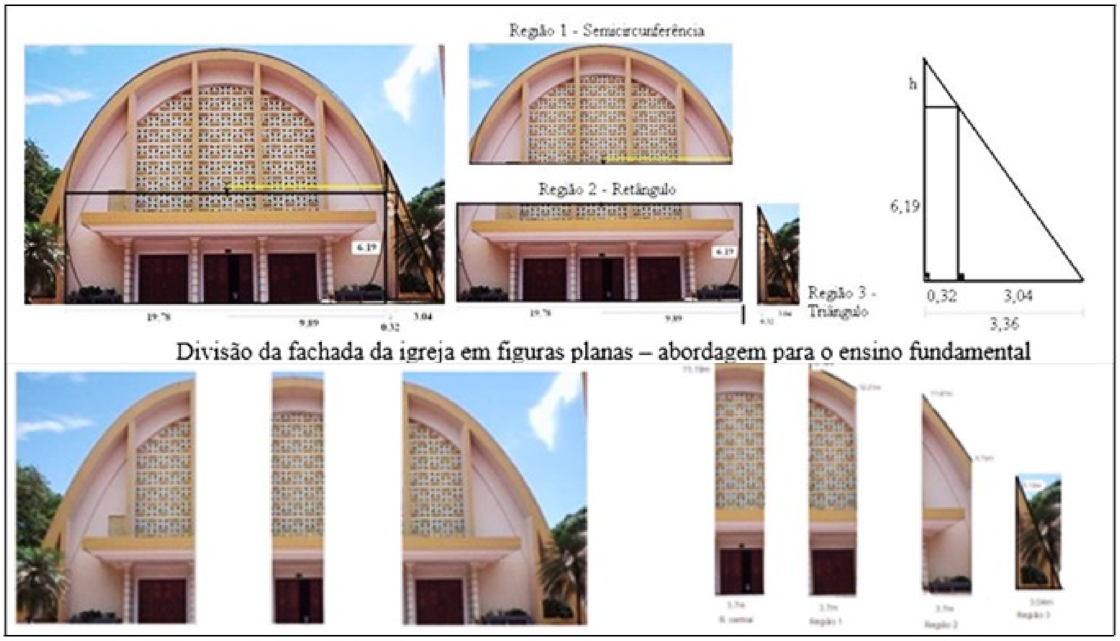
Dentro de uma abordagem educacional, o ensino deve ser projetado para envolver os alunos na elaboração e utilização de modelos (HESTENES, 2006), e não estar pautado apenas na utilização de modelos pré-estabelecidos.

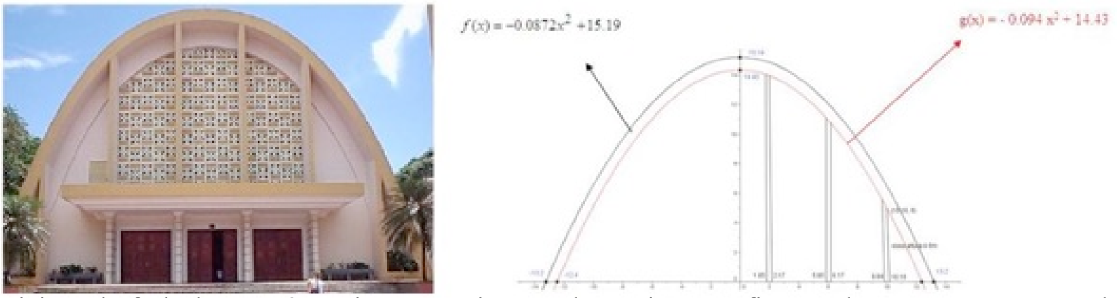
> A obtenção de um modelo matemático é parte do encaminhamento de uma atividade de Modelagem, sendo entendido como uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam, e para tanto se apresenta como um sistema conceitual, descritivo e explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática.
>
> (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 13)

Bassanezi (2002), sinaliza que os modelos matemáticos nunca são definitivos, sempre dão margem a modificações e melhorias, ou mesmo a novas maneiras de empregar a linguagem matemática. Além disso, o autor defende que o refinamento dos modelos quando o foco está direcionado ao ensino e à aprendizagem da Matemática, produz a aquisição de novos conhecimentos, assim como o faz as diferentes séries.

As diferentes abordagens para uma situação, dependem de quem trabalha e estuda tal situação. No âmbito da sala de aula, isto significa que uma mesma situação pode exprimir diferentes modelos matemáticos, dependendo do nível de escolaridade no qual os alunos se encontram (SILVA; VERONEZ, 2010). O Quadro 1 mostra as sugestões de encaminhamentos de uma atividade de Modelagem Matemática de acordo com o nível de ensino que os alunos se encontram.

Quadro 1: Diferentes encaminhamentos para o problema "Fachada do Santuário Eucarístico Diocesano"





Divisão da fachada em três regiões; aproximação das regiões em figuras planas e representação das funções *f(x)* e *g(x)* da região sob o beiral – abordagem para o Ensino Médio

Para o Ensino Superior a sugestão é considerar o arco da fachada como sendo uma parábola e encontrar a área sob esta curva utilizando-se conceitos do Cálculo Diferencial e Integral (C.D.I) de onde temos que a área sob uma curva *f(x)* no intervalo de a até b é A= $\int_a^b f(x)dx$.

Fonte: Adaptado de Ferruzi et al. (2010)

Os autores apontam diferentes maneiras de usar a Matemática para resolver o problema, sugerindo encaminhamentos para o Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino Superior.

Para Tortola (2016), diferentes estruturas matemáticas podem ser utilizadas pelos alunos para expressar modelos, podendo ser constituídos por inúmeras representações, sendo elas tabulares, pictóricas, descritivas, gráficas, textuais, entre outras. O autor pontua, ainda, que cabe ao professor orientar os alunos para que eles consigam estabelecer comparações e relações entre os modelos matemáticos produzidos por eles, tanto com relação aos modelos matemáticos formulados a partir de uma mesma situação, explorando a evolução dos modelos, quanto ao uso de um modelo em diferentes situações-problema.

Model-Eliciting Activities (MEAs)

As MEAs constituem uma estrutura que uma pessoa ou um grupo utiliza para produzir um modelo matemático para resolver problemas associados ao mundo real, a partir dessa estrutura os alunos geram soluções para um problema por meio de descrições, explicações, construções e outras produções escritas, "revelando, testando e refinando ou ampliando repetidamente suas formas de pensar" (LESH, et al., 2000, p. 597).

O desenvolvimento dessa perspectiva foi norteado por dois objetivos; primeiro, encorajar os alunos a criarem modelos matemáticos para resolver problemas complexos do mundo real, de forma similar a que são empregados na Matemática Aplicada (LESH; DOERR, 2003); segundo, viabilizar que os pesquisadores investiguem o pensamento matemático dos alunos.

As MEAs são delineadas com base em seis princípios que orientam a produção, interpretação e análise de modelos matemáticos, conforme Lesh, et al. (2000). O Quadro 3 apresenta esses princípios.

Quadro 3: Princípios orientadores das atividades de elicitação de modelos matemáticos

Princípio	**Descrição**
Construção do modelo	Garante que a atividade requeira a construção de uma descrição explícita, explicação ou procedimento para uma situação matematicamente significativa.
Generalização	Também conhecido como Princípio de Capacidade de Compartilhamento e Reutilização do Modelo. Requer que os alunos produzam soluções compartilháveis e modificáveis para outras situações relacionadas.
Documentação do modelo	Garante que os alunos criem alguma forma de documentação que revelará explicitamente como eles estão pensando a situação-problema.
Realidade	Requer que a atividade seja colocada em um contexto realista e seja projetada para que os alunos possam interpretar a atividade de forma significativa a partir de seus diferentes níveis de habilidade matemática e conhecimento geral.
Autoavaliação	Garante que a atividade contenha critérios que os alunos possam identificar e usar para testar e revisar suas atuais formas de pensar.
Protótipo eficaz	Garante que o modelo produzido será o mais simples possível, mas ainda matematicamente significativo para fins de aprendizagem (ou seja, um protótipo de aprendizagem ou uma "grande ideia" em matemática).

Fonte: Stohlmann e Albarracín (2016) com base em Lesh, et al. (2000)

Stohlmann e Albarracín (2016) sinalizam que frequentemente ao completarem uma atividade na perspectiva das MEAs os alunos irão revisar, refinar e ampliar conceitos matemáticos.

Cada atividade, desenvolvida sob as orientações das MEAs, segundo Chamberlin e Moon (2005), é composta por quatro seções. As duas primeiras seções configuram o contexto e as características da situação-problema, e as duas seções finais abordam o problema.

Na primeira seção é realizada a abordagem da situação-problema com o intuito de gerar interesse e discussão dos alunos sobre o contexto do problema. Para isso o professor pode utilizar recursos como vídeos, imagens, entrevistas, reportagens, documentários ou mesmo uma roda de conversa.

A segunda seção é composta por perguntas de prontidão, geralmente, perguntas simples, perguntas de compreensão a respeito da situação. O objetivo dessa seção é garantir que os alunos tenham o conhecimento básico necessário para resolver o problema. Nessas duas primeiras seções a ênfase está em ajudar os alunos a entender o contexto da situação-problema.

A terceira seção contempla o trabalho com os dados da situação-problema, que podem ser apresentados na forma de diagramas, gráficos, mapas, tabelas, palavras, textos escritos e assim por diante. Essa seção é frequentemente mencionada na seção de perguntas de prontidão e é sempre usada na pergunta final.

A quarta seção é a resolução de um problema decorrente da situação proposta. O problema, normalmente, não passa de um parágrafo e demanda uma interpretação matemática da situação para que possa ser solucionado. O Quadro 4 apresenta exemplos de perguntas que o professor pode utilizar para orientar a exploração em cada seção das MEAs.

Quadro 4: Exemplos de questionamentos para cada seção das MEAs

Seção	Perguntas que podem auxiliar
Primeira seção *Abordagem da situação-problema*	✓ O que vocês sabem sobre o assunto? ✓ Já tiveram experiências anteriores a respeito? ✓ O que vocês gostariam de conhecer sobre o assunto?
Segunda seção *Compreensão da situação-problema*	✓ Vocês compreenderam o que iremos investigar? ✓ O que vocês já conhecem que pode nos ajudar a solucionar o problema? ✓ Já temos todas as informações necessárias para solucioná-lo? ✓ Como podemos proceder? ✓ Onde podemos buscar as informações que ainda desconhecemos?
Terceira seção *Exploração dos dados da situação-problema*	✓ Quais as formas de organização das informações vocês julgam ser mais convenientes? Tabelas, gráficos, figuras, textos? ✓ Como essas informações podem contribuir com a investigação do problema?
Quarta seção *Resolução da situação-problema*	✓ A quais conceitos da Matemática podemos recorrer para analisar os dados coletados? ✓ Vocês já estudaram algum conteúdo matemático que pode nos ajudar a solucionar esse problema? ✓ O modelo matemático obtido fornece uma resposta coerente em termos da situação-problema? ✓ O modelo matemático pode ser utilizado para solucionar situações semelhantes? Por exemplo, "e se agora nós..."

Fonte: Dos autores

Glas (2002) lista quatro resultados educacionais alcançados pela Modelagem na sala de aula, indicando que modelos e Modelagem auxiliam os alunos (a) a reconhecer a interconectividade dentro e fora da matemática; (b) reconhecer várias perspectivas em um campo do conhecimento; (c) ser criativo no pensamento matemático e (d) ver a matemática de maneira prática e aplicável. As MEAs se configuram como um método disponível para inserir modelos e Modelagem no currículo de Matemática.

Pensamento Algébrico

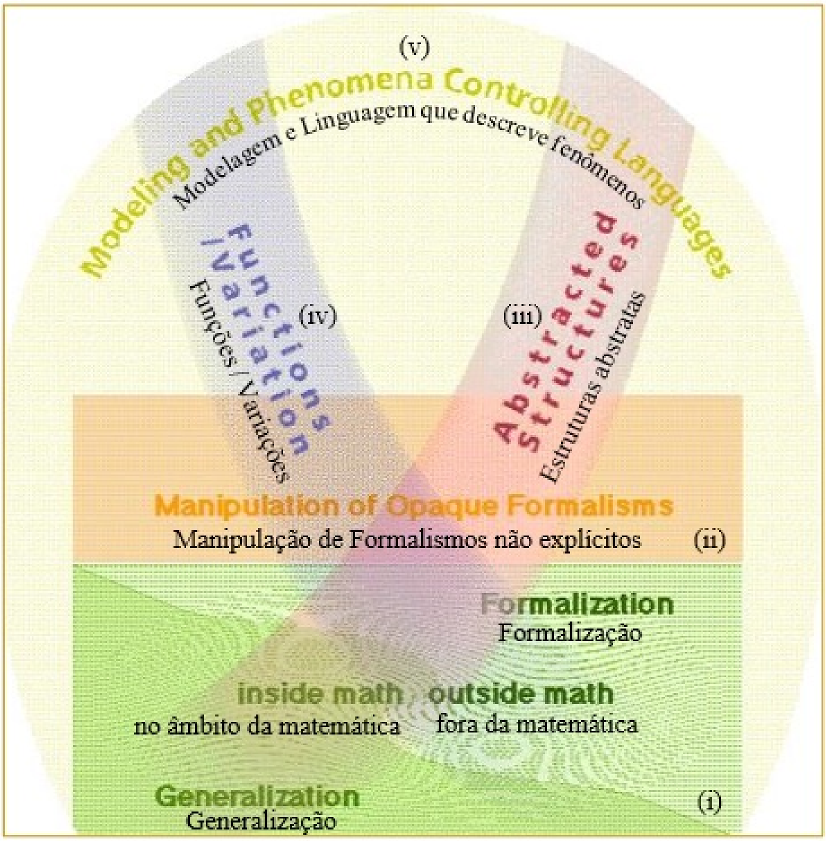
A Álgebra escolar tem sido tradicionalmente ensinada como um conjunto de procedimentos desconectados de outros conhecimentos matemáticos e da realidade dos alunos, uma vez que envolve predominantemente simplificações de expressões algébricas, resolução de equações e regras para a manipulação simbólica.

> a Álgebra envolve generalizar e expressar essa generalidade usando linguagens cada vez mais formais, cuja generalização começa na aritmética, em situações de modelagem, em geometria e em praticamente toda a matemática que pode ou deve aparecer nas séries elementares.
>
> (KAPUT, 1999, p. 134)

Essa perspectiva, defendida pelo autor, é apresentada como possibilidade de uma nova abordagem para o ensino e a aprendizagem de Álgebra, fazendo uso do pensamento algébrico, em suas várias formas, e das representações algébricas, como gráficos, tabelas, planilhas e fórmulas tradicionais, ferramentas intelectuais poderosas desenvolvidas por nossa civilização e que podem ser utilizadas para criar ambientes de ensino em salas de aula que permitam aprender com compreensão.

Kaput (1999) aponta cinco diferentes formas do pensamento algébrico: (i) álgebra como generalização e formalização de padrões e restrições; (ii) álgebra como manipulação sintática de formalismos (não explícitos); (iii) álgebra como estudo de estruturas abstratas a partir de cálculos e relações; (iv) álgebra como estudo de funções, relações e variações conjuntas; e (v) álgebra como modelagem e linguagem que descreve fenômenos. Segundo o autor as cinco formas de pensamento algébrico estão sobrepostas e inter-relacionadas entre si, como mostra a Figura 3.

Figura 3: Sobreposição e inter-relacionamento das cinco formas de pensamento algébrico



Fonte: Adaptado de Kaput (1999, p. 135)

As cinco formas de pensamento algébrico interagem ricamente de forma conceitual, e podem ser encaradas com uma estrutura inter-relacionada que sinaliza como o pensamento algébrico pode ser trabalhado ao longo dos anos escolares.

A forma (i) álgebra como generalização e formalização de padrões e restrições, indicada na Figura 3 pelo retângulo verde, se configura como a base para as outras, pois de acordo com Kaput (1999), a generalização e a formalização são intrínsecas à atividade matemática, são elas que caracterizam um pensamento como matemático.

A forma (ii) álgebra como manipulação sintática de formalismos (não explícitos), indicada na Figura 3 pelo retângulo laranja, implica na construção de relações que não estão evidentes, mas que podem ser constatadas e descritas por meio de símbolos e regras sintáticas que permitem construir significados.

A forma (iii) álgebra como estudo de estruturas abstratas a partir de cálculos e relações, indicada na Figura 3 pela faixa vermelha, sugere que das experiências matemáticas dos alunos surgem estruturas capazes de fornecer uma base para níveis mais elevados de abstração e formalização, como ocorre, por exemplo, com as ideias de correspondência e variação de quantidades que fundamentam o conceito de função, embasadas nos diversos tipos de experiências matemáticas envolvendo contagem, medição e estimativa, que indica a forma (iv) álgebra como estudo de funções, relações e variações conjuntas, indicada na Figura 3 pela faixa azul.

Por fim, a forma (v) álgebra como modelagem e linguagem que descreve fenômenos, indicada na Figura 3 pela área amarela, indica a modelagem como uma forma de descrever fenômenos extramatemáticos e matematizá-los por meio da linguagem. “Na descrição de Kaput do pensamento algébrico, a modelagem reflete a álgebra como uma ‘rede de linguagens’ que penetra todos os outros aspectos da matemática” (VAN DE WALLE, 2009, p. 318) e, por isso, na figura, engloba todas as outras formas de pensamento algébrico apresentadas.

Assim, para Kaput (1999), o trabalho com a Álgebra em sala de aula deve incluir essas cinco formas de pensamento algébrico, o qual pode ser viabilizado por meio de atividades que requerem dos alunos observações de fenômenos e experimentações, que envolvem formulação de conjecturas, justificações, argumentações, generalizações e descrições a partir do uso da linguagem matemática.

❖ Contextos de desenvolvimento do Pensamento Algébrico

Há duas vertentes que agem como “portas de entrada” (MESTRE, 2014, p. 77) para o desenvolvimento do pensamento algébrico, são elas: o pensamento relacional e o pensamento funcional (CARPENTER et al., 2003).

❖ Pensamento Relacional

No pensamento relacional procura-se compreender as relações e propriedades fundamentais das operações aritméticas em vez de focar exclusivamente nos procedimentos de cálculo (CARPENTER et al., 2003).

Carpenter et al. (2003) sugerem o desenvolvimento do pensamento algébrico trabalhando com a compreensão do sinal de igual em situações de equivalência numérica; análise de relações numéricas; elaboração de hipóteses sobre relações numéricas; e argumentação em favor dessas hipóteses. Esses autores consideram que é necessário tratar as propriedades dos números e das operações, de modo que os alunos: i) tenham acesso às propriedades matemáticas básicas; ii) percebam por que o procedimento de cálculo que usam funciona; iii) apliquem os seus procedimentos com flexibilidade numa variedade de contextos; e iv) reconheçam as relações entre álgebra e aritmética e que possam usar essa compreensão da aritmética na compreensão da álgebra.

O pensamento relacional é evidenciado quando os alunos compreendem que é possível realizar transformações em expressões ou ainda substituir expressões por outras que lhe são equivalentes, característica essencial para o pensamento algébrico (KAPUT, 2008).

❖ Pensamento Funcional

Segundo Blanton (2008), as funções são o núcleo do pensamento funcional e envolvem procurar regularidades em como as grandezas variam em relação uma à outra. Na perspectiva de Blanton (2008), o pensamento funcional envolve o pensamento algébrico porque inclui fazer generalizações sobre o modo como os dados estão relacionados.

De acordo com Smith (2008), o início do processo para o desenvolvimento do pensamento funcional acontece quando o aluno se envolve numa atividade, presta atenção às quantidades que variam e começa a focar na relação entre essas quantidades.

O desenvolvimento do pensamento funcional, desde os anos iniciais permite a "transição da linguagem natural para sistemas de notação simbólicas" (BLANTON; KAPUT, 2011, p. 12), oportunizando a compreensão do conceito de forma gradual, à medida em que os anos escolares avançam.

Blanton e Kaput (2005) sugerem alguns encaminhamentos que favorecem o desenvolvimento do pensamento algébrico na vertente do pensamento funcional: i) simbolizar quantidades e operar com expressões simbólicas, como, por exemplo: usar símbolos para modelar problemas, usar símbolos para operar com expressões simbólicas; ii) representar dados graficamente; iii) descobrir relações funcionais, por exemplo: explorar a correspondência entre quantidades ou relações recursivas e desenvolver uma regra para descrever essa relação, usar tabelas para explorar a relação entre a variável dependente e a variável independente, descobrir, descrever, justificar e simbolizar relações matemáticas entre quantidades que variam; iv) prever resultados desconhecidos a partir de dados conhecidos, por exemplo: formular conjeturas sobre dados desconhecidos a partir dos dados conhecidos, estendendo o problema; e v) identificar e descrever padrões numéricos e geométricos, por exemplo: identificar regularidades numéricas que, por vezes, são apresentadas geometricamente, identificar regularidades geométricas e regularidades em conjuntos de expressões numéricas.

O trabalho que o professor desenvolve no âmbito do pensamento relacional contribui para a compreensão que se desenvolve no pensamento funcional, tendo em comum o desenvolvimento da capacidade de generalização, de representação dessa generalização e da argumentação sobre essas generalizações.

Três Atividades: algumas orientações

Considerando a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica que viabiliza “o estudo da Matemática a partir de temas diversos da realidade, sejam eles matemáticos ou não, oportunizando ao estudante o transitar entre a linguagem natural do fenômeno sob investigação e a linguagem matemática” (TORTOLA, 2012, p. 16), abordamos nesse material pedagógico três atividades de Modelagem Matemática que podem ser desenvolvidas no Ensino Fundamental.

- Miniaturas *Hot Wheels*
- Reciclagem
- Aerofractal

Para cada atividade apresentamos orientações que podem auxiliar em seu uso em sala de aula e no desenvolvimento do Pensamento Algébrico. Além dessas, deixamos mais três atividades como sugestão.

- Gincana Outubro Rosa
- Tecnopatias
- Ar-condicionado

Essas atividades foram discutidas em reuniões do Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação e Educação Matemática (GEPEEM), da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Toledo, e foram desenvolvidas em uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental, de um Colégio Estadual, localizado no Norte do Paraná, no âmbito de uma pesquisa de Mestrado Profissional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio e Londrina.

Os resultados dessa pesquisa são relatados na dissertação intitulada “Modelagem Matemática e Pensamento Algébrico no 6º ano do Ensino Fundamental” e forneceram subsídios para a confecção desse material pedagógico, produto educacional da pesquisa. Dessa forma, esse material contempla orientações que são resultantes de reflexões acerca da teoria e da prática, inspiradas em estratégias e encaminhamentos de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental para as atividades de Modelagem Matemática que abordamos. Professor(a), você pode realizar essas ações adequando-as à realidade e necessidade de seus alunos.

Miniaturas

Atividade 1

Resumo

Para a realização desta atividade, os alunos em grupo, irão investigar a relação entre as medidas de um carro, em tamanho original, e de sua miniatura. A atividade possibilita discussões com relação às dimensões de um carro; à estimativa, verificação e manuseio de instrumentos de medidas; e a revisão e/ou introdução de ideias como razão/escala e proporção para a produção dos modelos matemáticos. A partir da investigação os alunos podem produzir modelos matemáticos que permitam verificar e validar a razão 1:64 (um para sessenta e quatro) que as miniaturas da marca *Hot Wheels* são construídas.

Materiais necessários

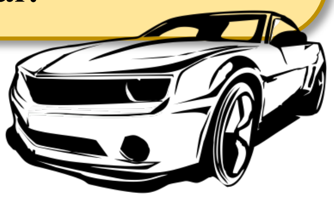
- ✓ Miniaturas *Hot Wheels;*
- ✓ Régua;
- ✓ Trena;
- ✓ Paquímetro;
- ✓ Calculadora;
- ✓ Folhas para anotações;
- ✓ Tabela com informações sobre os carros originais.

A situação-problema

É comum vermos crianças brincando com carrinhos em miniatura. Os carrinhos *Hot Wheels*, por exemplo, são muito conhecidos. Eles são adorados não só por crianças como também por adultos.

Mas será que existem carros de verdade como essas miniaturas?

E, se existem, como determinar as medidas de um carrinho *Hot Wheels* a partir do carro original?



Duração: 4 horas-aula

Conteúdos Matemáticos que podem ser abordados

- ✓ Razão;
- ✓ Escala;
- ✓ Proporção;
- ✓ Multiplicação;
- ✓ Ampliação e redução;
- ✓ Média aritmética simples;
- ✓ Divisão de números decimais;
- ✓ Arredondamento de casas decimais;
- ✓ Conceito de aproximado ≅;
- ✓ Equivalência entre unidades de medidas de comprimento;
- ✓ Unidades de medidas de comprimento e seus múltiplos;
- ✓ Manipulação de instrumentos de medida: régua, trena, paquímetro.

Elementos do Pensamento Algébrico que podem ser desenvolvidos

- ✓ a percepção de regularidades;
- ✓ percepção de aspectos invariantes em contraste de outros que variam;
- ✓ tentativas de expressar ou explicar a estrutura de uma situação problema;
- ✓ presença do processo de generalização.

Orientações para o desenvolvimento da Atividade

Divida os alunos em grupos e distribua as miniaturas *Hot Wheels* entre os grupos lançando o primeiro questionamento: “Será que existem carros de verdade como essas miniaturas?”

O número de integrantes por grupo ficará a seu critério, professor(a).

A validação da resposta ao primeiro questionamento poderá ser feita mediante a exibição dos vídeos disponíveis nos *links*: https://youtu.be/pDsGer9qqsk e https://youtu.be/pmxgLA1k7iI. Esses vídeos foram escolhidos por afirmarem que algumas miniaturas são concebidas a partir de carros originais.

Quanto ao segundo questionamento “E, se existem, como determinar as medidas de um carrinho *Hot Wheels* a partir do carro original?” você, professor(a), poderá investigar o conhecimento prévio de seus alunos perguntando se eles sabem qual é, aproximadamente, o comprimento de um carro em tamanho real. Caso você sinta a necessidade de proporcionar aos alunos uma prática para o conhecimento das medidas reais de um carro, sugerimos levá-los ao estacionamento do Colégio para realizar a medida das dimensões de algum carro.

As discussões devem levar os alunos a sentir a necessidade de conhecer as dimensões originais dos carros correspondentes às miniaturas. Momento oportuno para o(a) professor(a) disponibilizar uma tabela contendo tais dimensões. Veja um exemplo de tabela na Figura 1:

Professor(a) sugerimos que você solicite aos alunos as miniaturas antecipadamente, para que você possa organizar a tabela correspondente às miniaturas disponíveis.

Figura 1 –Dimensões originais de alguns carros correspondentes às miniaturas

DIMENSÕES ORIGINAIS DE ALGUNS CARROS

CARRO	*COMPRIMENTO*	*LARGURA*	*ALTURA*
ASTON MARTIN ONE 77	425,4 cm	184,5 cm	115,2 cm
BARRACUDA FÓRMULA S 68	480,0 cm	179,2 cm	134,4 cm

Fonte: Dos autores

Retome as discussões sobre como determinar as medidas de um carrinho *Hot Wheels* a partir do carro original. É possível que os alunos levantem hipóteses de quantas vezes a miniatura é menor que o carro original correspondente, percebendo a necessidade de conhecer as dimensões das miniaturas.

Sugerimos, também que você peça para que cada grupo identifique na tabela as dimensões originais dos carros correspondentes às miniaturas pertencentes ao grupo. Além disso, é oportuno explorar algumas relações entre os múltiplos e submúltiplos do metro.

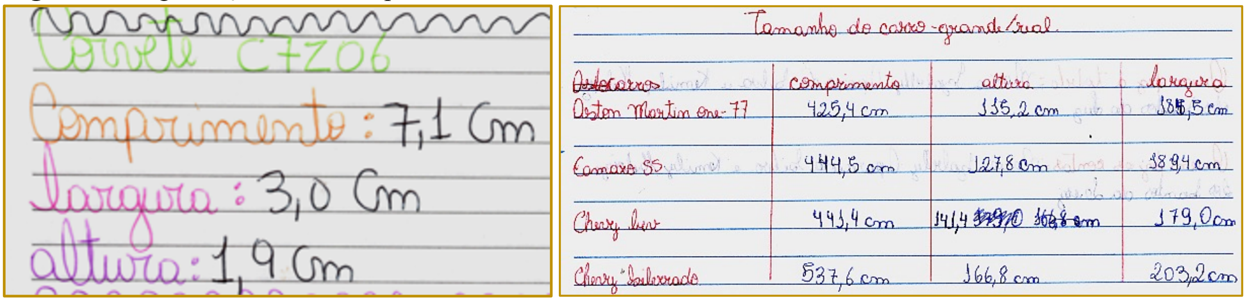
Caso isso não ocorra professor(a), você pode direcionar as discussões nesse sentido ou analisar se o raciocínio empreendido por seus alunos possibilitará solucionar a problemática inicial.

O instrumento de medida capaz de fornecer medidas mais precisas para a coleta de dados, é o paquímetro. É necessário que haja ao menos um paquímetro por grupo. Esse é o momento que irá demandar mais auxílio do(a) professor(a). É importante que o(a) professor(a) demonstre como as medidas serão realizadas e que todos os grupos sigam as instruções. Caso o Colégio não possua paquímetros, uma alternativa é demarcar as dimensões das miniaturas em um papel e realizar as medidas utilizando a régua escolar.

Provavelmente os alunos nunca tenham manipulado um paquímetro antes, dessa forma, sugerimos exibir um vídeo disponível no *link*: https://youtu.be/BhMjGKfYscw que explica como realizar medições com esse instrumento.

Peça para que os alunos organizem o registro da coleta de dados, ou seja, das dimensões das miniaturas. Esse registro pode se apresentar no formato de tabelas ou listas, como mostra a Figura 2:

Figura 2 – Organização dos dados pelos alunos

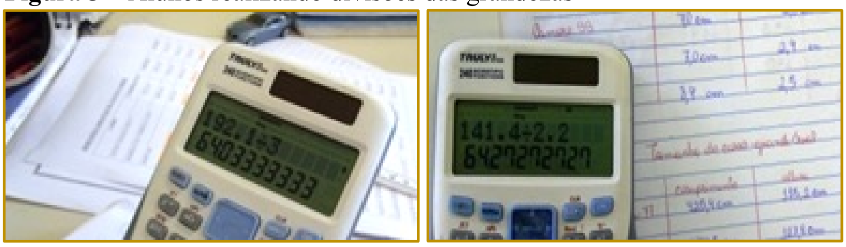


Fonte: Dos autores

Conhecendo as dimensões originais dos carros correspondentes às miniaturas e também as dimensões de cada miniatura é provável que os alunos consigam perceber que ao realizar a divisão dessas dimensões o resultado poderá ser interpretado como a quantidade de vezes que a miniatura é menor que o carro original. Caso essa percepção não ocorra, é importante que o(a) professor(a) realize questionamentos e exponha ideias que orientem os alunos para alguma estratégia de resolução.

A calculadora poderá facilitar a constatação dos alunos da proximidade dos quocientes ao número 64, como mostra a Figura 3.

Figura 3 – Alunos realizando divisões das grandezas



Fonte: Dos autores

Esse momento é oportuno para o(a) professor(a) convencionar que a comparação que os alunos realizaram entre as grandezas (dimensões do carro original e dimensões da miniatura) é chamada de razão e que uma das aplicações da razão se chama escala. Ao realizarem a divisão dessas grandezas, sempre tomando uma unidade de comprimento comum para ambas, encontrarão um valor para o quociente que é chamado constante. Ao conhecerem o valor da constante é possível determinar a medida do carro em miniatura a partir da medida do carro original, isso quer dizer que se na situação em questão eles soubessem desde o início que esse valor era o número 64, conhecendo-se as dimensões do carro original, bastava dividi-las por 64 que determinariam as dimensões da miniatura, solucionando assim, a problemática.

Como forma de validar o encaminhamento utilizado na resolução do problema, sugerimos apresentar aos alunos o vídeo "Como nasce um *Hot Wheels*", disponível no *link*: https://youtu.be/ud92JRnrXDg. Nesse vídeo, o vice-presidente de designer da Empresa fala sobre o processo de criação das miniaturas, e explica que fazem as miniaturas na escala 1:64 (um para sessenta e quatro), nesse instante no vídeo aparece a seguinte anotação:

Escala 1:64 = 64 vezes menor que um carro "real"

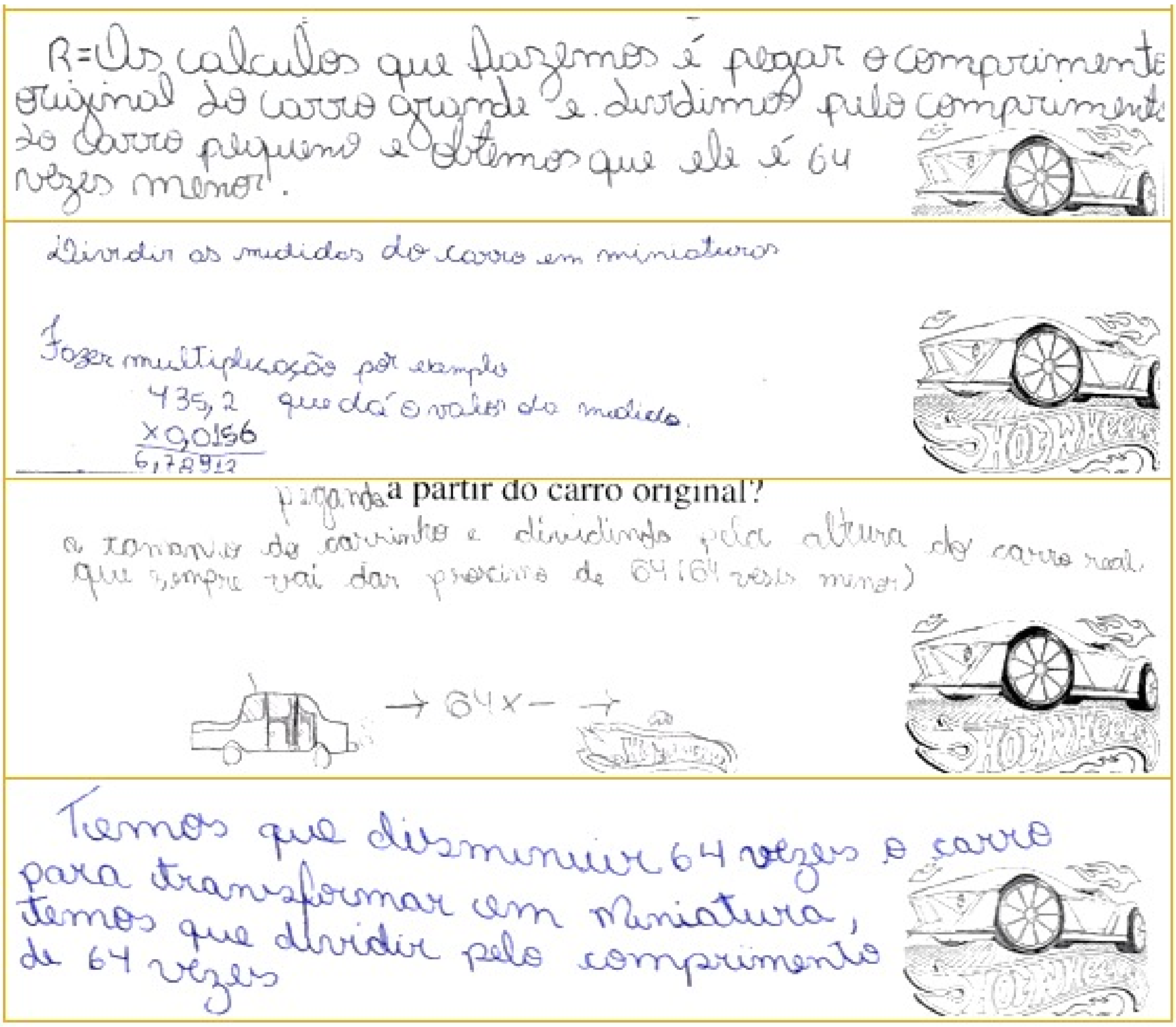
Uma das possibilidades é que os alunos dividam as dimensões da miniatura (dividendo) pelas dimensões do carro original (divisor), nesse caso a constante encontrada será aproximadamente 0,016. É importante que o(a) professor(a) discuta a validade da estratégia sinalizando que a multiplicação da dimensão do carro original por 0,016 fornecerá a dimensão da miniatura, solucionando, também, a problemática.

A discussão do conceito de escala que aparece no vídeo permite a compreensão de que a expressão "1:64" possa ser interpretada nesse contexto como: a cada 1 cm na miniatura tem-se 64 cm no carro original ou ainda, as dimensões do carro, em tamanho original, é 64 vezes maior que as dimensões da miniatura. Fundamentados nas discussões que foram realizadas durante a atividade e em seus conhecimentos, os alunos terão condições de estabelecer um modelo matemático para a situação. A Figura 4 apresenta alguns modelos matemáticos que podem ser produzidos:

Figura 4 – Modelos Matemáticos

Temos que dividir as medidas do carro grande por 64 para descobrir as medidas do carro miniatura

Os calculos que fazemos é pegar o valor do comprimento, altura ou largura do carro tamanho grande e dividimos por 64 vezes que é o valor de vezes que diminuiu ou pegar o valor do comprimento, altura e largura da miniatura e multiplicar por 64 vezes.


R=Os calculos que fazemos é pegar o comprimento original do carro grande e dividimos pelo comprimento do carro pequeno e obtemos que ele é 64 vezes menor.

Dividir as medidas do carro em miniaturas

Fazer multiplicação por exemplo
435,2 que dá o valor da medida.
x 0,0156
6,78912

pegando a partir do carro original?
o tamanho do carrinho e dividindo pela altura do carro real que sempre vai dar proximo de 64 (64 vezes menor)

→ 64x →

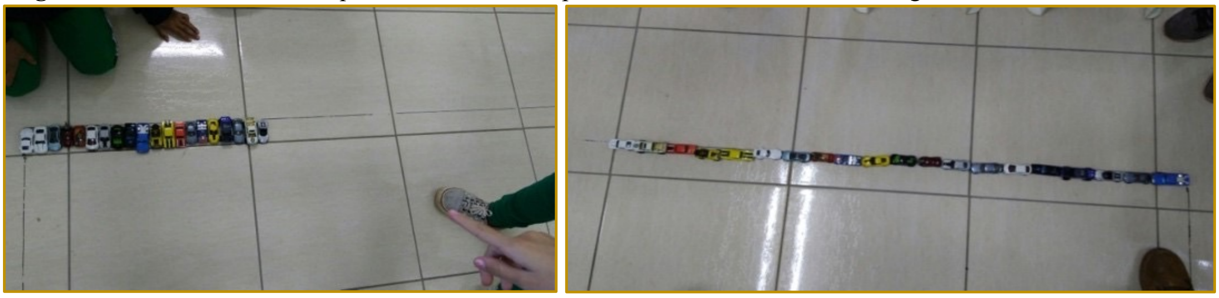
Temos que dismunuir 64 vezes o carro para transformar em miniatura, temos que dividir pelo comprimento de 64 vezes

Fonte: Dos autores

Ao analisarmos os modelos matemáticos produzidos pelos alunos do 6º ano é possível observar que as regularidades observadas na situação-problema permitiram que os alunos fizessem descrições, explicações e previsões com relação ao fenômeno sob investigação, a produção de carrinhos em miniaturas. Os modelos produzidos sinalizam a compreensão das discussões matemáticas realizadas na resolução da atividade, e se mostram matematicamente significativos para fins de aprendizagem.

Como sugestão de interpretação da anotação presente no vídeo **Escala 1:64 = 64 vezes menor que um carro "real"**, o(a) professor(a) tem a possibilidade de desenhar no chão da sala de aula um retângulo cujo comprimento e largura sejam uma média das dimensões correspondentes aos carros originais e convidar os alunos a testarem se é possível "encaixar" aproximadamente 64 miniaturas na largura e também no comprimento do retângulo desenhado. A Figura 5 mostra essa ação:

Figura 5 – Alunos testando a quantidade de vezes que a miniatura cabe no carro original



Fonte: Dos autores

A escala encontrada não é única e, sabendo disso de antemão, o(a) professor(a) pode questionar os alunos sobre a existência de miniaturas em outras escalas.

Sugerimos que o(a) professor(a) leve uma miniatura confeccionada em outra escala ou apresente uma imagem que afirme a existência de miniaturas em diferentes escalas. A Figura 6 apresenta uma sugestão de imagem que pode ser apresentada aos alunos:

Figura 6 – Miniaturas em diferentes escalas

Fonte: https://www.colecaovirtual.com.br/blog/iniciar-uma-colecao-de-veiculos-em-miniatura

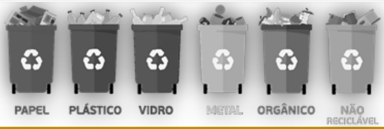
A apresentação das miniaturas em diferentes escalas pode suscitar novas discussões e contribuir com a verificação de que, de fato, miniaturas construídas na escala 1:64 terão comprimentos entre 7 cm e 8 cm, como confirmado pela coleta de dados realizada pelos alunos.

Caso você, professor(a), tenha a possibilidade de levar uma miniatura em escala diferente das miniaturas manuseadas durante a atividade, você poderá realizar uma série de questionamentos ora informando a escala em que essa miniatura foi confeccionada e solicitando, por exemplo, a dimensão do carro original que deu origem a ela, ora informando a dimensão do carro original e da miniatura e solicitando a escala na qual foi confeccionada.

Essas novas discussões possibilitarão que os alunos interpretem a nova escala apresentada, diferente daquela trabalhada no contexto da atividade (1:64), para produzir uma solução compartilhável e modificá-la para resolver uma situação relacionada, favorecendo a generalização do conceito de escala.

Reciclagem

Atividade 2



Resumo

Para a realização desta atividade os alunos irão estimar a quantidade de materiais recicláveis que viram rejeito durante o processo de triagem realizado em uma Associação de Reciclagem. A atividade possibilita a revisão e/ou introdução de conceitos pertencentes à Grandezas e Medidas, Tratamento da Informação e Números e Álgebra. É possível explorar a percepção de regularidades, o manuseio de instrumentos de medidas e o tratamento dos dados para a produção dos modelos matemáticos. Os alunos podem produzir modelos matemáticos que permitam validar a estimativa realizada a partir da investigação do fenômeno.

Materiais necessários

- ✓ Régua;
- ✓ Balança;
- ✓ Folhas para anotações.
- ✓ Recipiente para coleta da amostra de materiais.

A situação-problema

Sabendo que durante o processo de triagem parte dos materiais recicláveis coletados em nosso município viram rejeitos, estime essa quantidade.

Duração: 5 horas-aula

Conteúdos Matemáticos que podem ser abordados

- ✓ Fração;
- ✓ Divisão;
- ✓ Proporção;
- ✓ Estatística;
- ✓ Porcentagem;
- ✓ Multiplicação;
- ✓ Medidas de massa;
- ✓ Fórmula da força peso;
- ✓ Equivalência de frações;
- ✓ Aceleração da gravidade;
- ✓ Sistema monetário brasileiro;
- ✓ Leitura de números decimais;
- ✓ Representação de fração em decimais e vice-versa;
- ✓ Representação de porcentagem na forma de fração.

Elementos do Pensamento Algébrico que podem ser desenvolvidos

- ✓ a percepção de regularidades;
- ✓ percepção de aspectos invariantes em contraste de outros que variam;
- ✓ tentativas de expressar ou explicar a estrutura de uma situação problema;
- ✓ presença do processo de generalização.

Orientações para o desenvolvimento da Atividade

Divida os alunos em grupos e realize a abordagem do tema recorrendo ao conhecimento prévio de seus alunos.

O número de integrantes por grupo ficará a seu critério, professor(a).

Apresente uma imagem com a separação dos resíduos por cores das lixeiras, que, geralmente, já é conhecida pelos alunos e poderá dar início a discussões valiosas.

Além da habitual separação dos resíduos por cores das lixeiras, os símbolos de identificação dos materiais recicláveis presentes nas embalagens também poderá ser utilizado para que os alunos compreendam que existe uma classificação dos materiais que são utilizados na produção das embalagens, conforme apresenta a Figura 7.

Figura 7 – Símbolos de identificação dos materiais recicláveis

Fonte: www.revistavivasaude.uol.com.br

Professor(a), sugerimos que você distribua algumas embalagens entre os grupos para que seus alunos possam identificar a presença dos símbolos correspondente ao tipo de material do qual as embalagens são produzidas.

Esse encaminhamento insere a atividade em termos de conhecimento e experiência de vida para os alunos. Informações a respeito dos materiais que podem e que não podem ser reciclados, seja pela constituição do próprio material ou pela falta de empresas especializadas na reciclagem destes, servirão como base de compreensão para o processo de triagem dos materiais que ocorrem nas Associações de Reciclagem.

A Figura 8 apresenta a separação do plástico e do vidro em recicláveis e não recicláveis.

Figura 8 – Separação dos resíduos por tipo de material

Fonte: Adaptado de https://pt.slideshare.net/alaazzoni/curso-aracaju-completa-1-13529669

Além dessas informações, professor(a), você também poderá abordar os desafios enfrentados pelo mercado da reciclagem, no Brasil, considerando desde o baixíssimo percentual dos materiais coletados pelo setor público nas casas e ruas das cidades que são, de fato, recuperados, até o valor irrisório que é atribuído aos volumes de materiais recicláveis. Utilize esse momento para destacar a importância de se pensar em soluções e alternativas para esse cenário ambiental. Você poderá exibir a reportagem do Programa "Como Será?", disponível através do *link:* https://www.youtube.com/watch?v=MRrWn-r6yAs, que apresenta a única empresa do mundo, até a data da gravação da reportagem, especializada na reciclagem de esponjas de lavar louça. O vídeo mostra o processo de reciclagem que as esponjas sofrem para se tornar matéria prima de diversos objetos como baldes, bacias, para-choque de carros, lixeiras, entre outros, trazendo para discussão a importância da logística reversa, enfatizando o engajamento de todos para a promoção do uso consciente dos recursos.

Caso o município possua uma Associação de Reciclagem, agende uma visita para realizar a coleta de dados visando estimar a quantidade de materiais recicláveis que são considerados rejeitos, durante o processo de triagem. Não havendo a Associação, uma possibilidade é delimitar um período para que os alunos levem ao Colégio os materiais recicláveis provenientes de suas residências e posteriormente o(a) professor(a) apresente algum profissional da área ambiental que possa contribuir com a investigação da qual se propõe, auxiliando os alunos na identificação dos materiais recicláveis e não recicláveis.

Um dos possíveis encaminhamentos sugerido pelos alunos para a situação-problema é coletar uma amostra do material reciclável disponível, medir a massa do material coletado, realizar a triagem, medir a massa do rejeito resultante e medir a massa do recipiente utilizado para a coleta.

As ações realizadas para o possível encaminhamento da atividade permitirá que o(a) professor(a) discuta com seus alunos a diferença entre as grandezas peso e massa, que, geralmente, são empregadas como sinônimos. Além disso, é essencial que o(a) professor(a) solicite dos alunos uma interpretação matemática dos dados coletados, com perguntas como "e quando nós conhecermos as quantidades, o que isso vai significar?". Esse tipo de questionamento promove o levantamento de hipóteses e a argumentação em favor delas, contribuindo com a reflexão do raciocínio empreendido.

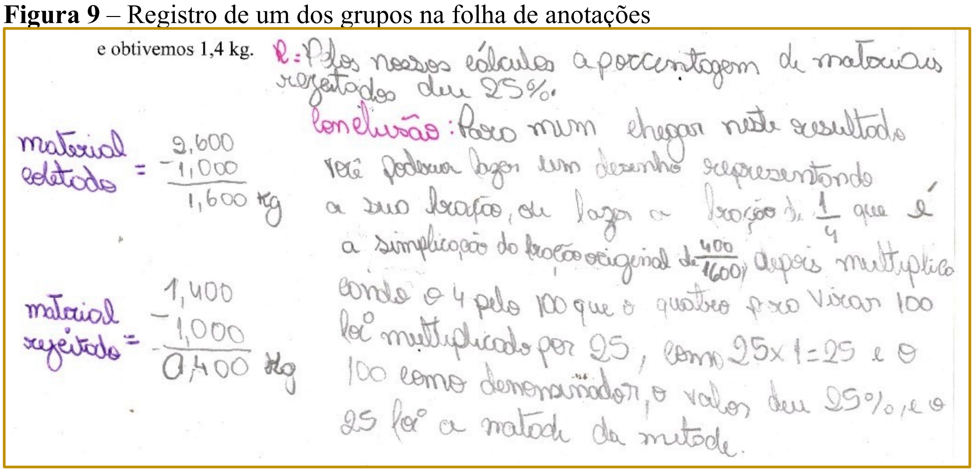
Sugerimos que toda a discussão em relação ao tratamento dos dados coletados seja pautada nos conhecimentos prévios dos alunos, priorizando as discussões nos pequenos grupos, se possível.

Provavelmente será necessário o auxílio do(a) professor(a) para que os alunos consigam escrever matematicamente a comparação entre a quantidade de rejeitos resultante do processo de triagem e a quantidade de material reciclável coletado. Caso os alunos já tenham estudado sobre Razão e Proporção, é possível que eles interpretem essa comparação como uma razão e expressem-na na forma de fração. De toda forma, o(a) professor(a) pode conduzir as discussões validando os conhecimentos e/ou argumentos que os alunos julgarem ser adequados com a situação investigada.

Professor(a), outra possibilidade para o tratamento dos dados que pode ser mencionada pelos alunos é a Porcentagem, visto que Frações e Porcentagem são conteúdos pertencentes ao currículo do 6º ano do Ensino Fundamental. Caso essa possibilidade seja citada, aproveite o contexto para explorar o conceito de fração, de equivalência de frações, fração decimal e representação na forma figural e percentual.

Ainda que as discussões acabem ocorrendo no grande grupo, com toda a turma, solicite que cada grupo faça o registro na folha de anotações condizente com as compreensões que obtiveram. Esse registro é importante tanto para o professor, que consegue acessar os pensamentos dos alunos que não foram externalizados durante as discussões como para o aluno, que revisa suas formas de pensar enquanto registra. A Figura 9 apresenta o registro de um grupo durante o desenvolvimento da atividade.

Figura 9 – Registro de um dos grupos na folha de anotações



e obtivemos 1,4 kg.

material coletado = 2,600 − 1,000 = 1,600 kg

material rejeitado = 1,400 − 1,000 = 0,400 kg

R: Pelos nossos cálculos a porcentagem de materiais rejeitados deu 25%.

Conclusão: Para mim chegar neste resultado você poderia fazer um desenho representando a sua fração, ou fazer a fração de $\frac{1}{4}$ que é a simplificação da fração original de $\frac{400}{1600}$, depois multiplicando o 4 pelo 100 que o quatro para virar 100 foi multiplicado por 25, como 25x1=25 e o 100 como denominador, o valor deu 25%, e o 25 foi a metade da metade.

Fonte: Dos autores

O registro na folha de anotações também possibilitará novas discussões, pois como se trata de um 6º ano do Ensino Fundamental, certamente, os alunos buscarão no discurso argumentativo estabelecer uma estrutura textual, fundamentada em seus conhecimentos e nas discussões que foram realizadas durante a atividade para produzir seus modelos matemáticos. No entanto, o(a) professor(a) poderá realizar questionamentos que indiquem a possibilidade do uso de outras formas de representação do resultado da investigação realizada.

Professor(a), os questionamentos podem fazer referência aos resultados de pesquisas apresentados, por exemplo, nos telejornais. Possivelmente, os alunos argumentarão sobre o uso de Gráficos.

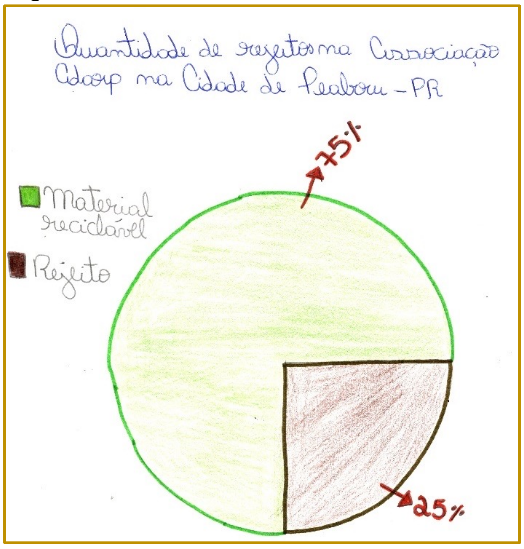
Dessa forma, o(a) professor(a) terá a oportunidade de discutir sobre o uso de gráficos para a apresentação de resultados de pesquisas. Você poderá contar, também, com o capítulo de Tratamento da Informação do livro didático de Matemática da turma para explorar os tipos de gráficos e seus principais elementos.

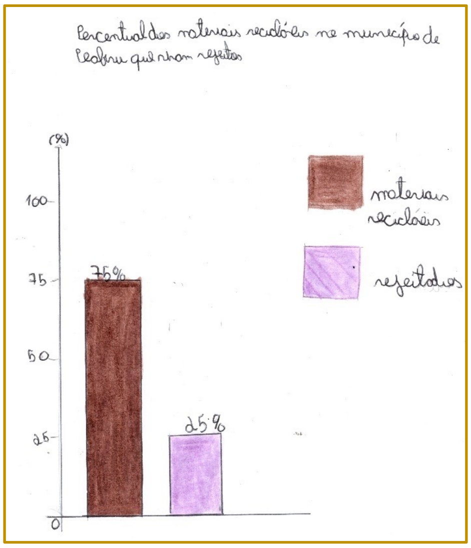
Professor(a), solicite que os grupos pensem em como representar o resultado da problemática investigada por meio de um gráfico.

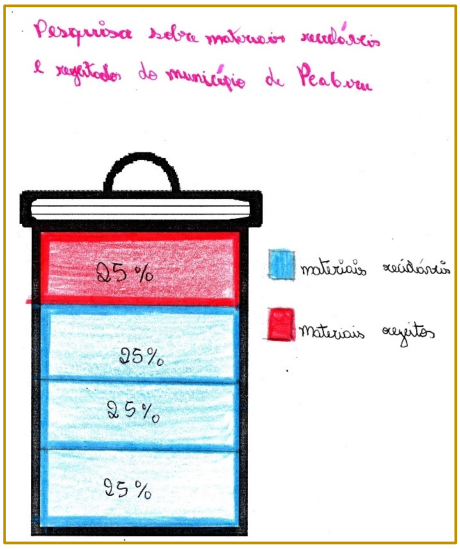
Em anexo disponibilizamos um exemplo de gráfico pictórico que pode ser distribuído aos grupos caso os alunos manifestem a intenção de produzir esse tipo de gráfico, mas tenham muita dificuldade para elaborá-lo.

A Figura 10 apresenta exemplos de modelos matemáticos que podem ser produzidos pelos alunos para o fenômeno investigado.

Figura 10 – Modelos matemáticos





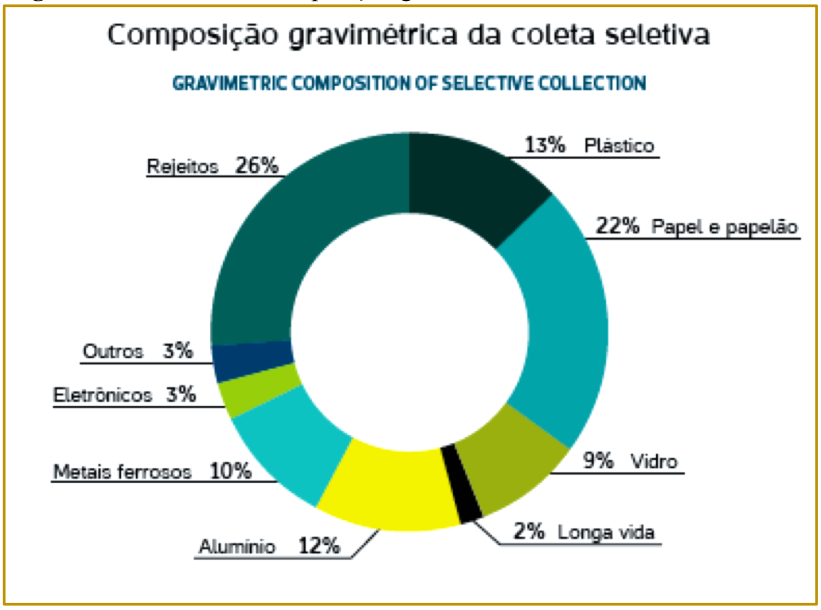


Fonte: Dos autores

Professor(a), após a construção do modelo matemático sugerimos que você faça um momento de socialização, a fim de formalizar a interpretação do resultado obtido na investigação.

Para finalizar o desenvolvimento da atividade é possível que o(a) professor(a) apresente um gráfico da composição gravimétrica da coleta seletiva no Brasil, no ano de referência, como exemplifica a Figura 11.

Figura 11 – Gráfico da composição gravimétrica da coleta seletiva no Brasil



Fonte: CEMPRE, 2019

Essa ação servirá como validação do resultado obtido na investigação realizada. Para além de todos os conceitos matemáticos empreendidos, a temática da atividade revela a grande responsabilidade ambiental que nos é atribuída todos os dias.

Aerofractal

Atividade 3

Resumo

Para a realização desta atividade, os alunos irão confeccionar um Aerofractal de nível 1 observando as regularidades existentes para determinar a relação entre a quantidade de canudos, de células e de faces recobertas por papel seda para a confecção de um Aerofractal em um nível qualquer. A atividade possibilita a revisão e/ou introdução de conceitos com relação à Geometria Plana, Espacial e Fractal; a percepção de regularidades; o manuseio de materiais manipuláveis e instrumentos de medidas; e a identificação de relações de correspondência para a produção dos modelos matemáticos. A partir da investigação os alunos podem produzir modelos matemáticos que permitam verificar e validar a relação de correspondência existente entre o nível do Aerofractal e a quantidade de material necessário para sua confecção.

Materiais necessários

- ✓ Régua;
- ✓ Tesoura;
- ✓ Cartolina;
- ✓ Papel seda;
- ✓ Fita dupla-face;
- ✓ Canudos de plástico;
- ✓ Carretel de linha;
- ✓ Palito de madeira;
- ✓ Folhas para anotações.

A situação-problema

Construir um modelo matemático que permita determinar a quantidade de material necessário para a confecção de um Aerofractal em um nível qualquer a partir das observações realizadas no Aerofractal confeccionado pelos grupos.

Duração: 5 horas-aula

Conteúdos Matemáticos que podem ser abordados

- ✓ Divisão;
- ✓ Proporção;
- ✓ Multiplicação;
- ✓ Medidas de área;
- ✓ Cálculo algébrico;
- ✓ Geometria Plana;
- ✓ Geometria Espacial;
- ✓ Geometria Fractal;
- ✓ Manuseio de instrumentos de medida;
- ✓ Equivalência de áreas de figuras planas;
- ✓ Classificação de triângulos quanto aos lados.

Elementos do Pensamento Algébrico que podem ser desenvolvidos

- ✓ a percepção de regularidades;
- ✓ percepção de aspectos invariantes em contraste de outros que variam;
- ✓ tentativas de expressar ou explicar a estrutura de uma situação problema;
- ✓ presença do processo de generalização.

Orientações para o desenvolvimento da Atividade

O número de integrantes por grupo ficará a seu critério, professor(a).

Divida os alunos em grupos e exiba o vídeo Aerofractal, disponível no endereço eletrônico https://vimeo.com/339986414. Aproveite o momento de empolgação dos alunos, que certamente ocorrerá, para convidá-los a confeccionar uma pipa no mesmo formato da exibida no vídeo.

Distribua os materiais manipuláveis necessários para a confecção da pipa. Como auxílio para a confecção da estrutura de uma célula da pipa sugerimos exibir a animação disponível no site Clubes de Matemática da OBMEP através do *link*: http://clubes.obmep.org.br/blog/atividade-pipa-uma-brincadeira-seria-sala-2-3/atividade-pipa-uma-brincadeira-seria-construcao-da-pipa-tetraedrica/.

Professor(a) a confecção da pipa exigirá seu auxílio aos grupos durante todo o processo. Sugerimos que à medida em que as células da pipa vão se formando, você discuta com seus alunos os conceitos de sólido geométrico, faces, arestas e vértices, bem como as diferenças entre figuras planas e sólidos geométricos.

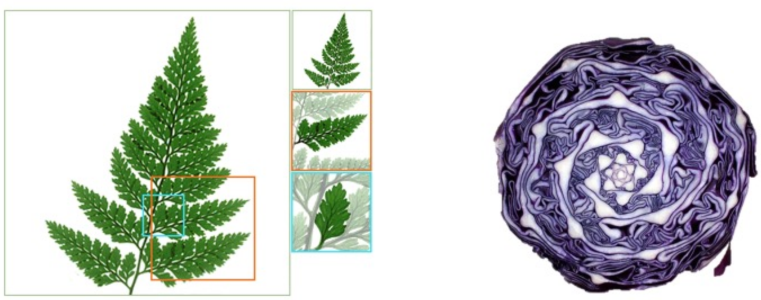
Finalizada a confecção é chegada a hora da brincadeira: empinar a pipa.

Sugerimos conduzir os alunos à alguma área externa do Colégio que permita essa ação. Geralmente o local mais apropriado costuma ser o campo de futebol *society*, quando o Colégio possuí.

O início da exploração da estrutura da pipa pode ocorrer a partir da definição de Fractal, destacando a propriedade da autossimilaridade por meio de imagens, como sugere a Figura 12.

Figura 12 – Definição de Fractal

Um **Fractal** é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo, essa característica recebe o nome de **auto-similaridade**. Eles podem ser encontrados na natureza em estruturas vegetais, animais ou podem ser produzidos artificialmente em computador através de um algoritmo matemático, criando arte.



Fonte: Dos autores

Entregue aos grupos a primeira folha com questões referentes a pipa confeccionada, conforme apresenta a Figura 13. Essas questões requerem dos alunos a percepção de regularidades e a identificação de padrões, elementos caracterizadores do pensamento algébrico.

Figura 13 – Folha com as questões propostas aos alunos

Estudantes:____

____

ATIVIDADE: PIPA TETRAÉDRICA - AEROFRACTAL

Um Fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo, essa característica recebe o nome de auto-similaridade. Eles podem ser encontrados na natureza em estruturas vegetais, animais ou podem ser produzidos artificialmente em computador através de um algoritmo matemático, criando arte.

a) Observe a Pipa que você confeccionou. Você consegue observar se nela existe essa auto-similaridade? Descreva o que você consegue observar.

b) Quantos canudos foram utilizados para construirmos a estrutura de uma célula da Pipa Tetraédrica?

c) Quantas células possui a Pipa construída por você e seu grupo?

d) Quantos canudos foram utilizados na estrutura da Pipa construída por você e seu grupo?

e) Ao unirmos as Pipas de quatro grupos, teremos uma estrutura maior, com as mesmas características da Pipa Tetraédrica inicial. Quantas células terá essa nova estrutura?

f) Quantos canudos são necessários para formar a estrutura dessa Pipa Tetraédrica?

g) As células que formam a estrutura da Pipa possuem quatro faces triangulares. Quantas dessas faces são recobertas por papel seda?

h) Na Pipa construída por você e seu grupo, quantas faces ao todo receberam papel seda?

i) É possível saber quantas faces estão recobertas por papel seda na Pipa que surge ao unirmos as pipas dos quatro grupos? Se sim, descreva como você pensou.

j) Quantos centímetros quadrados de papel seda você e seu grupo utilizou na confecção da Pipa? (Desconsidere a quantidade utilizada para as dobras).

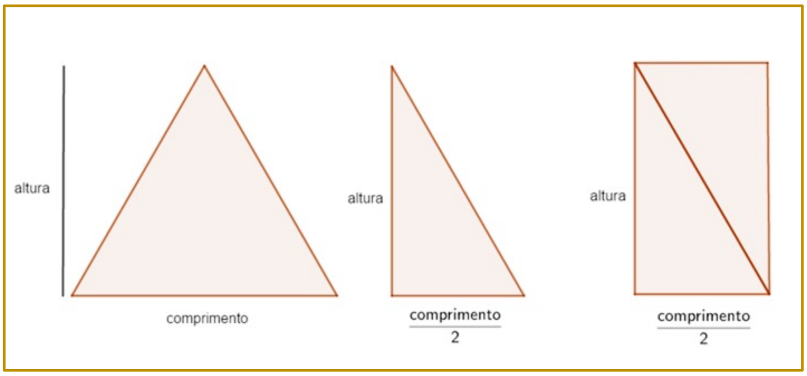
Fonte: Dos autores

Professor(a) solicite que os alunos discutam as questões com seu grupo e respondam na folha de anotações. Tente realizar o mínimo possível de intervenções, concedendo autonomia aos alunos na identificação de regularidades que, posteriormente, serão socializadas com toda a turma. Sugerimos que a questão j) seja discutida coletivamente, já que se trata do cálculo da área do triângulo equilátero, conteúdo que certamente os alunos do 6º ano ainda não estudaram.

Uma sugestão para encaminhar as discussões relacionadas a questão j) é apresentar aos alunos um triângulo equilátero confeccionado em papel sulfite com as mesmas dimensões do triângulo equilátero correspondente a face de um tetraedro. Você poderá sobrepor esse triângulo à uma das faces do tetraedro para que os alunos verifiquem que se trata da mesma figura geométrica. Desafie a turma questionando se existe a possibilidade de "transformar" o triângulo equilátero confeccionado em papel sulfite em um quadrado ou em um retângulo. Provavelmente os alunos já possuem o conhecimento de cálculo de área dessas duas figuras geométricas.

A intenção aqui professor(a) é levar os alunos à perceberem, a partir da decomposição do triângulo equilátero, a congruência entre as áreas do retângulo formado e do triângulo equilátero inicial, observando a relação entre as dimensões dessas figuras geométricas, a altura será invariante e a base do retângulo terá a metade da dimensão da base do triângulo, conforme apresenta a Figura 14.

Figura 14 – Decomposição de um triângulo equilátero em um retângulo



Fonte: Dos autores

A segunda folha que deverá ser entregue aos alunos contém, inicialmente, questões relacionadas ao Aerofractal que aparece no vídeo, conforme mostra a Figura 15.

Figura 15 – Questões relacionadas ao Aerofractal propostas aos grupos

O AEROFRACTAL DO VÍDEO

É possível determinar:

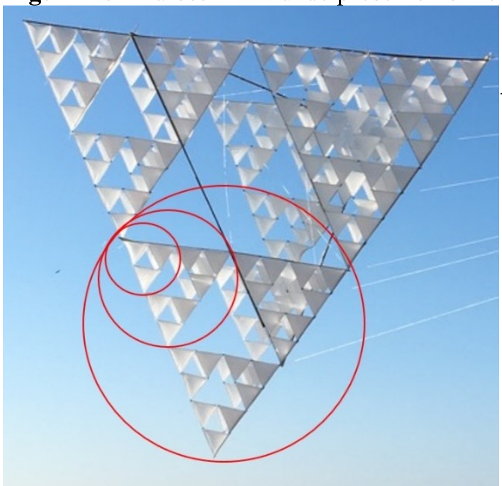
- quantos canudos há;
- quantas células há;
- quantas faces estão recobertas por papel seda na Pipa Tetraédrica que aparece no vídeo?

Se sim, descreva como você pensou.

Fonte: Dos autores

Professor(a), você pode retomar as discussões sobre Fractais utilizando a imagem do Aerofractal exibido no vídeo. Animações realizadas no *Software PowerPoint* poderão ser utilizadas para destacar a característica da autossimilaridade, conforme sugere a Figura 16. Aproveite para pontuar que o Aerofractal em estudo é considerado um Fractal Geométrico por ser formado apenas por sólidos geométricos, diferentemente dos Fractais encontrados na Natureza.

Figura 16 – autossimilaridade presente no Aerofractal



Fonte: Dos autores

Como os alunos não terão o Aerofractal para manipular, sugerimos deixar a imagem projetada no quadro contribuindo com as observações relacionadas à sua estrutura.

Professor(a), é possível que os alunos tenham dificuldade para visualizar como a estrutura do Aerofractal é formada. Caso isso ocorra, discuta a formação dessa estrutura com seus alunos sinalizando, por exemplo, que a estrutura envolta pela circunferência média é formada por **quatro** estruturas iguais a envolta pela circunferência menor, assim como a estrutura envolta pela circunferência maior é formada por **quatro** estruturas iguais a anterior, envolta pela circunferência média.

O momento de socialização dos resultados dessas questões é, particularmente, valioso, pois os grupos têm a oportunidade de confrontar seus raciocínios, argumentando, inclusive, o uso de estratégias distintas que permitem obter o mesmo resultado. Além disso, durante as discussões, os alunos também poderão constatar os erros cometidos relatando seus equívocos.

Na mesma folha entregue aos alunos há uma tabela, conforme apresenta a Figura 17, a ser preenchida, que reuni os dados tanto da pipa confeccionada pelos grupos, como do Aerofractal apresentado no vídeo, objetivando que os alunos estabeleçam um modelo matemático para o cálculo dos materiais necessários para a confecção de um Aerofractal em um nível qualquer.

Figura 17 – Tabela

Preencha a tabela a seguir, considerando as respostas dadas às questões anteriores:

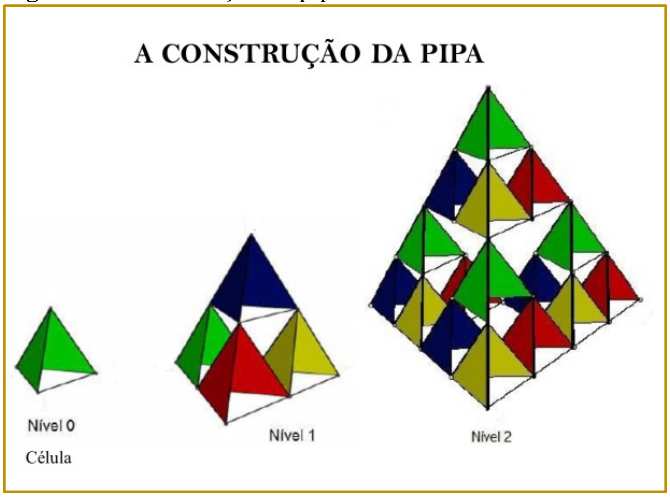
Nível	Número de canudos	Número de células	Número de faces com papel seda
0			
1			
2			
⋮			
AEROFRACTAL			
n			

Fonte: Dos autores

Professor(a), como o conceito de 'nível', pertencente à Geometria dos Fractais, não ocorreu durante as questões anteriores, é preciso que você explique o significado desse termo no contexto da atividade.

Uma sugestão para explorar o conceito de ‘nível’ com os alunos é recorrer à imagem apresentada na Figura 18, que contém a construção da pipa até o nível 2.

Figura 18 – Construção da pipa até o nivel 2



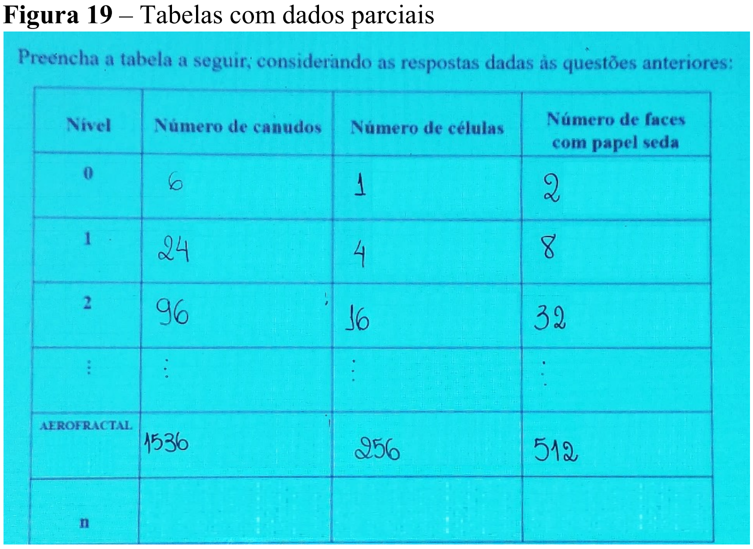
Fonte: Adaptado de http://clubes.obmep.org.br/blog/atividade-pipa-uma-brincadeira-seria-sala-2-3/

Professor(a), relembre com seus alunos como vocês confeccionaram a pipa, sinalizando que para ser considerada pipa a estrutura deveria conter quatro células. Exponha à seus alunos que a célula inicial é equivalente ao nível 0, por não configurar, ainda, a estrutura de uma pipa. A pipa considerada de nível 1, confeccionada pelos grupos, é resultante da união de quatro células, iguais a de nível 0, assim como a pipa de nível 2 é resultante da união de quatro estruturas iguais a de nível 1.

Solicite que os grupos completem os dados da tabela até o nível do Aerofractal, inclusive, desafie os alunos a determinar a que nível ele corresponde.

Assim que os grupos manifestarem ter completado os dados da tabela conforme a orientação dada, o(a) professor(a) pode se dirigir ao quadro e socializar os resultados colocando-os na tabela projetada, conforme apresenta a Figura 19, incentivando os alunos a perceberem a relação de correspondência existente entre o nível da pipa e o número de canudos, por exemplo.

Figura 19 – Tabelas com dados parciais



Preencha a tabela a seguir, considerando as respostas dadas às questões anteriores:

Nível	Número de canudos	Número de células	Número de faces com papel seda
0	6	1	2
1	24	4	8
2	96	16	32
⋮	⋮	⋮	⋮
AEROFRACTAL	1536	256	512
n			

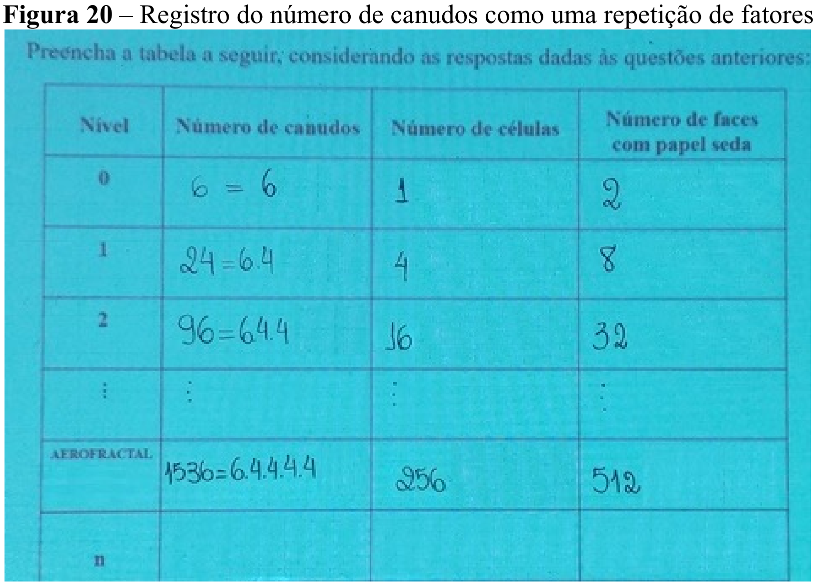
Fonte: Dos autores

Provavelmente os alunos irão manifestar um pensamento covariacional ao observarem os dados correspondentes ao nível da pipa e ao número de canudos. Direcione as discussões no sentido de viabilizar a percepção dos alunos para a relação de correspondência que se pode estabelecer. Nesse sentido, você pode questionar seus alunos como eles determinariam o número de canudos utilizados na confecção da pipa de nível 2, se não soubessem quantos canudos haviam sido utilizados na confecção da pipa anterior, de nível 1.

Professor(a), a identificação da relação de correspondência entre o nível da pipa e o número de canudos irá viabilizar o registro em termos de uma linguagem matemática, estabelecendo, assim, um modelo matemático para o fenômeno investigado. É possível que os alunos consigam perceber que essa relação de correspondência pode ser escrita na forma de potenciação, conteúdo, certamente, já estudado por eles. Mas caso nenhum aluno manifeste essa percepção, você poderá direcionar as discussões nesse sentido, contribuindo para a compreensão da escrita em linguagem algébrica que será estabelecida no nível ‘n’ do Aerofractal.

A Figura 20 apresenta o número de canudos escrito, inicialmente, como uma repetição de fatores iguais, com o intuito de construir significados para as observações que direcionam a escrita da relação entre o nível da pipa e o número de canudos para a forma de potenciação, considerando todas discussões já ocorridas nas questões anteriores.

Figura 20 – Registro do número de canudos como uma repetição de fatores iguais



Preencha a tabela a seguir, considerando as respostas dadas às questões anteriores:

Nível	Número de canudos	Número de células	Número de faces com papel seda
0	6 = 6	1	2
1	24=6.4	4	8
2	96=6.4.4	16	32
⋮	⋮	⋮	⋮
AEROFRACTAL	1536=6.4.4.4.4	256	512
n			

Fonte: Dos autores

Professor(a), durante esse registro procure evidenciar o fato do número de canudos utilizados para a confecção de uma célula do Aerofractal estar diretamente ligado a estrutura do Aerofractal como um todo. Essa observação contribuirá para a escrita do números de canudos na forma de potenciação, além de auxiliar na compreensão das propriedades da potência com expoente 0 e expoente 1, que são motivos de algumas incompreensões, quando estudadas como regras preestabelecidas.

É provável que assim que o(a) professor(a) inicie a escrita do número de canudos na forma de potência os alunos sinalizem que o nível da pipa está diretamente relacionado ao expoente da potência que representa o número de canudos utilizados, manifestando compreensões a respeito da relação de correspondência. Caso isso ocorra, reforce essa interpretação dando destaque à relação mencionada, como mostra a Figura 21.

Figura 21 – Relação de correspondência entre o nível do Aerofractal e o número de canudos

Preencha a tabela a seguir, considerando as respostas dadas às questões anteriores:

Nível	Número de canudos	Número de células	Número de faces com papel seda
0	$6 = 6.4^0$	1	2
1	$24 = 6.4 = 6.4^1$	4	8
2	$96 = 6.4.4 = 6.4^2$	16	32
⋮	⋮	⋮	⋮
AEROFRACTAL	$1536 = 6.4.4.4.4 = 6.4^4$	256	512
n			

Fonte: Dos autores

Professor(a), esse registro também permitirá que os alunos determinem a que nível o Aerofractal corresponde, argumentando a favor de suas considerações.

A partir dessa discussão, o(a) professor(a) poderá avançar nas reflexões preparando os alunos para representarem o número de canudos necessários para a confecção de um Aerofractal em um nível qualquer por meio de uma linguagem algébrica, definindo, assim, um modelo matemático para o fenômeno sob investigação. Possivelmente ao acompanhar as discussões realizadas e as relações identificadas, os alunos serão capazes de definir o modelo matemático para o item "Número de canudos". A expressão algébrica 6.4^n expressa o modelo matemático em termos de uma linguagem algébrica.

Professor(a), desafie a turma a discutir em seus grupos e determinar o modelo matemático, também, para o número de células e para o número de faces com papel seda. Permaneça auxiliando os grupos que requererem sua presença.

Assim que os grupos registrarem seus modelos matemáticos na folha de anotações o(a) professor(a) pode realizar a socialização com a turma. Escreva os dados da tabela na forma de potenciação à medida em que os grupos forem comunicando seus registros, encaminhando as reflexões para o reconhecimento da relação entre a álgebra e a aritmética, realizando intervenções para que os alunos possam reconhecer as relações entre álgebra e aritmética, colaborando, assim, com o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A Figura 22 apresenta uma possibilidade de completar os dados da tabela representando o modelo matemático definido para a problemática.

Figura 22 – Modelo matemático estabelecido para a problemática

Preencha a tabela a seguir, considerando as respostas dadas às questões anteriores:

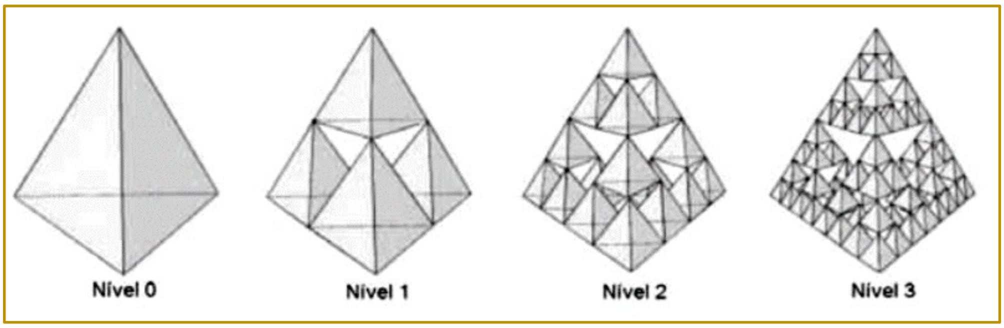
Nível	Número de canudos	Número de células	Número de faces com papel seda
0	$6 = 6.4^0$	$1 = 4^0$	$2 = 2.4^0$
1	$24 = 6.4 = 6.4^1$	$4 = 4^1$	$8 = 2.4^1$
2	$96 = 6.4.4 = 6.4^2$	$16 = 4.4 = 4^2$	$32 = 2.4^2$
⋮	⋮	⋮	⋮
AEROFRACTAL 4	$1536 = 6.4.4.4.4 = 6.4^4$	$256 = 4.4.4.4 = 4^4$	$512 = 2.4^4$
n	6.4^n	4^n	2.4^n

Fonte: Dos autores

A partir da definição do modelo matemático é possível questionar os grupos sobre a quantidade de material necessário para a construção do Aerofractal em níveis diferentes do contexto da atividade, promovendo, assim, o processo de generalização, elemento caracterizador do pensamento algébrico.

Para finalizar a atividade, o(a) professor(a) poderá relembrar com os alunos que a pipa confeccionada se trata de um Fractal Geométrico, que pode ser produzido artificialmente em computador através de um algoritmo matemático, criando arte. Sendo assim, sugerimos que você exiba um *gif* da construção da pipa até o nível que desejar, sinalizando que a produção do algoritmo se dá diferentemente da confecção com materiais manipuláveis, uma vez que o programa considera o nível 0, não como a célula inicial, mas como uma célula cujas dimensões externas não se alteram à medida em que os níveis avançam. Uma imagem que pode ser apresentada aos alunos demonstrando como se dá a produção de um Aerofractal em um *software* é a retratada pela Figura 23, cujo Aerofractal está desenvolvido até o nível 3.

Figura 23 – Aerofractal desenvolvido artificialmente até o nível 3



Fonte: Dos autores

Além da apresentação da Figura 23, o(a) professor(a) pode confeccionar uma pipa com as mesmas dimensões da pipa confeccionada pelos grupos, conforme apresenta a Figura 24, demonstrando o que seria o nível 0 quando a produção é realizada artificialmente, sem esquecer de sinalizar a presença da autossimilaridade nessa produção.

Figura 24 – Nível 0 confeccionado com materiais manipuláveis representando o Aerofractal produzido artificialmente

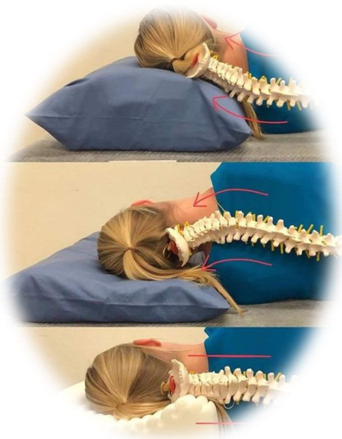
Fonte: Dos autores

Tanto a imagem utilizada na Figura 23, quanto a pipa confeccionada exibida pela Figura 24, permitirá discutir conceitos matemáticos diferentes dos abordados no contexto da atividade, tais como, equivalência de áreas, ponto médio, quádruplo, proporção, entre outros.

Sugestões de Atividades

Professor(a), para além das atividades abordadas, deixamos três temáticas como sugestão. Para cada uma delas apresentamos uma contextualização, algumas dicas e orientações. Todavia, a ideia é que a atividade seja planejada e desenvolvida de acordo com suas intenções e interesses, a partir do conhecimento de sua turma.

Há uma infinidade de outros temas que podem ser explorados tornando visível aos estudantes o papel da Matemática dentro e fora da sala de aula.



Gincana Outubro Rosa

Atividade 4

Resumo

Para a realização desta atividade os alunos irão pensar em estratégias para conseguir o máximo de curtidas em um período de tempo preestabelecido, para uma *selfie* da turma, com referência à Campanha Outubro Rosa, postada em uma conta do *Facebook*. A outra tarefa é de caráter social e visa envolver, assim como a primeira, todo o Colégio. Trata-se da arrecadação de alguns produtos alimentícios com destinação à Rede Feminina de Combate ao Câncer. Os alunos devem pensar na escrita de uma "regra/fórmula" que viabilize o cálculo da pontuação por sala. A atividade possibilita a revisão e/ou introdução de conceitos pertencentes à unidade temática Números e Álgebra. É possível explorar as operações básicas da Matemática, as propriedades da potenciação, a percepção de regularidades, a utilização da linguagem algébrica e o tratamento dos dados para a produção dos modelos matemáticos. Os alunos podem produzir modelos matemáticos que permitam validar tanto a estratégia utilizada para a tarefa da *selfie,* quanto para o cálculo da pontuação por sala.

Materiais necessários

- ✓ Folhas para anotações;
- ✓ Contas no *Facebook;*
- ✓ Produtos alimentícios (água de coco, biscoito água e sal ou maisena, caixa de leite);
- ✓ Tabela contendo o produto e sua respectiva pontuação.

Duração: 3 horas-aula

Conteúdos Matemáticos que podem ser abordados

- ✓ Adição;
- ✓ Divisão;
- ✓ Proporção;
- ✓ Estimativa;
- ✓ Multiplicação;
- ✓ Cálculo mental;
- ✓ Cálculo algébrico;
- ✓ Variáveis discretas;
- ✓ Equivalência numérica;
- ✓ Números pares e ímpares;
- ✓ Propriedades da igualdade;
- ✓ Propriedades da multiplicação;
- ✓ Potenciação de números naturais;
- ✓ Numerais multiplicativos (dobro, triplo,...)
- ✓ Multiplicação como adição repetida de parcelas.

Elementos do Pensamento Algébrico que podem ser desenvolvidos

- ✓ a percepção de regularidades;
- ✓ percepção de aspectos invariantes em contraste de outros que variam;
- ✓ tentativas de expressar ou explicar a estrutura de uma situação problema;
- ✓ presença do processo de generalização.

Orientações para o desenvolvimento da Atividade

Professor(a), você pode iniciar a atividade realizando uma roda de conversa sobre o tema, expondo sua relevância e argumentando sobre o papel das redes sociais na divulgação da Campanha Outubro Rosa.

Professor(a), as tarefas propostas exigem conscientização de seus alunos, especialmente, a tarefa de cunho social.

Peça que os alunos pensem sobre ideias para a *selfie* da turma.

Deixe claro os prazos preestabelecidos para as tarefas que estão sendo propostas.

Questione: quais são as alternativas que nós podemos adotar para que a nossa *selfie* seja a mais curtida?

As hipóteses apresentadas mostrarão os encaminhamentos a serem seguidos para a obtenção de um modelo matemático que traduza o fenômeno investigado. Possivelmente os alunos poderão estabelecer uma quantidade mínima de curtidas que eles acreditem ser suficientes para vencer essa tarefa. A provável estratégia que os alunos podem utilizar é dividir essa quantidade estabelecida pelo número de alunos da turma, atribuindo a cada aluno a responsabilidade de obter essa quantidade de curtidas para a *selfie* da turma. Professor(a), caso a potência não seja citada, você poderá mencionar a eficácia dessa estratégia durante a validação do modelo matemático, pois os alunos terão a oportunidade de atribuir significado a essa operação, sinalizando que a potenciação se difere da operação da multiplicação, por vezes utilizadas como sinônimos. Você poderá exibir para os alunos um trecho do filme "A corrente do bem", que apresenta a potenciação como uma possibilidade de atingir um grande número de pessoas em um curto intervalo de tempo.

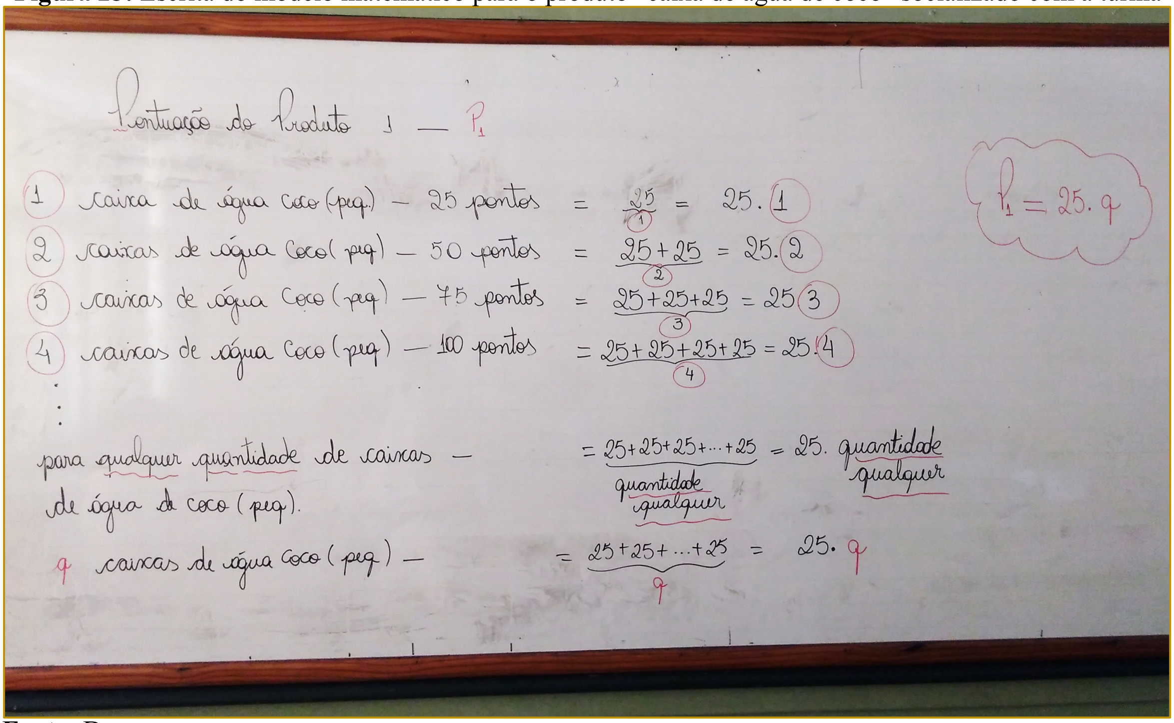
A tarefa de cunho social necessita que você informe seus alunos quais os produtos alimentícios que deverão ser arrecadados, bem como, a pontuação referente a cada produto.

Professor(a), sugerimos que você eleja algum aluno para realizar o controle dos produtos que estão sendo arrecadados pela turma e, durante a semana, escolha um dia e peça para que os alunos calculem a pontuação que a turma possui., até aquele momento. Essa ação irá ajudá-los a compreender a situação-problema que será proposta.

Questione: é possível escrever uma "regrinha", uma fórmula, que permita calcular a pontuação de cada turma do Colégio, independente da quantidade de produtos que tenha sido arrecadado?

Professor(a), provavelmente você terá que iniciar com seus alunos a escrita do modelo matemático para algum dos produtos alimentícios. Esse momento é muito valioso, pois permite que os alunos opinem sobre quais termos querem utilizar durante o processo da escrita, atribuindo significado para a linguagem simbólica que está sendo utilizada. A Figura 25 apresenta um exemplo de modelo matemático que foi estabelecido para o produto alimentício “caixa de água de coco”, cuja pontuação era 25 pontos.

Figura 25: Escrita do modelo matemático para o produto “caixa de água de coco” socializado com a turma



Fonte: Dos autores

No dia estabelecido para o término da arrecadação, você poderá validar o modelo matemático estabelecido para a problemática, calculando a pontuação final da turma.

Tecnopatias

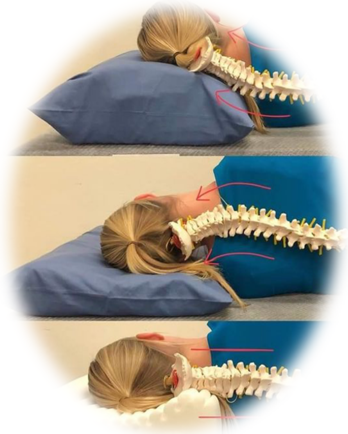
Atividade 5

Resumo

Para a realização desta atividade os alunos irão refletir sobre as novas doenças surgidas com o uso inadequado de smartphones, tablets e notebooks, que atingem pessoas de todas as idades, mas sobretudo os adolescentes. A má postura ao usar o celular produz efeitos semelhantes ao uso de travesseiros muito altos ao dormir. O apoio que damos à cabeça é importante para evitar dores no pescoço e nas costas. Nesse contexto, os alunos irão investigar qual deve ser a altura ideal do travesseiro para que a postura, ao dormir, não prejudique a coluna. A atividade possibilita a revisão e/ou introdução de conceitos pertencentes à unidade temática Números e Álgebra. e Grandezas e medidas. É possível dar significado as operações envolvendo frações com denominadores iguais, abordar a ideia de ângulo, explorar a percepção de regularidades para a produção dos modelos matemáticos. Os modelos produzidos poderão ser validados pelos alunos por meio de experimentações.

Materiais necessários

- ✓ Régua;
- ✓ Fita métrica;
- ✓ Transferidor de 180º;
- ✓ Travesseiro individual;
- ✓ Folhas para anotações.



Duração: 4 horas-aula

Conteúdos Matemáticos que podem ser abordados

- ✓ Adição;
- ✓ Ângulos;
- ✓ Proporção;
- ✓ Medidas de tempo;
- ✓ Frações equivalentes;
- ✓ Representação de fração;
- ✓ Frações mista e imprópria;
- ✓ Manuseio de instrumentos de medida;
- ✓ Multiplicação de um número natural por uma fração;
- ✓ Adição e subtração de frações com denominadores iguais.

Elementos do Pensamento Algébrico que podem ser desenvolvidos

- ✓ a percepção de regularidades;
- ✓ percepção de aspectos invariantes em contraste de outros que variam;
- ✓ tentativas de expressar ou explicar a estrutura de uma situação problema;
- ✓ presença do processo de generalização.

Orientações para o desenvolvimento da Atividade

Professor(a), você pode iniciar a atividade projetando as imagens que se referem ao Programa Detox Digital Brasil, lançado pelo Governo Federal, como apresenta a Figura 26.

Certamente, a exibição dessas imagens fará com que seus alunos sintam a necessidade de compartilhar as experiências de vida relacionadas ao tema.

Figura 26: Apresentação do tema da atividade

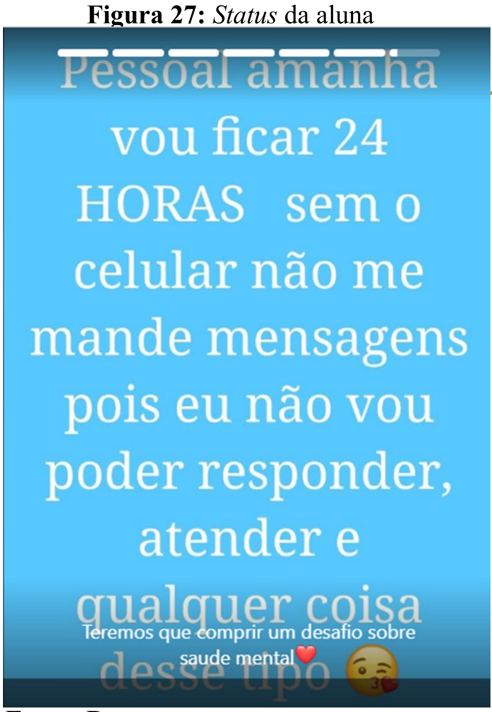
Fonte: https://reinaldobessa.com.br/parana-sera-pioneiro-em-campanha-de-prevencao-as-tecnopatias/

Aproveite os momentos de interação e discuta sobre a quantidade de horas diárias que seus alunos utilizam as tecnologias digitais. Lance o desafio do Programa Detox Brasil – 24 horas sem o uso das tecnologias digitais.

Professor(a), o dia D escolhido para o cumprimento desse desafio é o dia 10 de outubro, que coincide com o dia Mundial da Saúde Mental. No entanto, nada impede que a atividade seja realizada em outra data.

A Figura 27 apresenta o *status* de uma das alunas da turma em que a atividade foi desenvolvida. O incentivo do(a) professor(a) é fundamental para o envolvimento dos alunos.

Figura 27: *Status* da aluna



Fonte: Dos autores

Professor(a), permita que seus alunos falem sobre as atividades que eles realizaram durante o dia do desafio. Você pode pontuar os benefícios das atividades desenvolvidas.

Certamente a tecnologia digital mais utilizada por seus alunos é o celular. Diante disso, compartilhe com eles a informação de que a má postura ao usar o celular produz efeitos semelhantes ao uso de travesseiros muito altos ao dormir. O apoio que damos à cabeça é importante para evitar dores no pescoço e nas costas. Nesse contexto, os alunos podem investigar qual deve ser a altura ideal do travesseiro para que a postura, ao dormir, não prejudique a coluna.

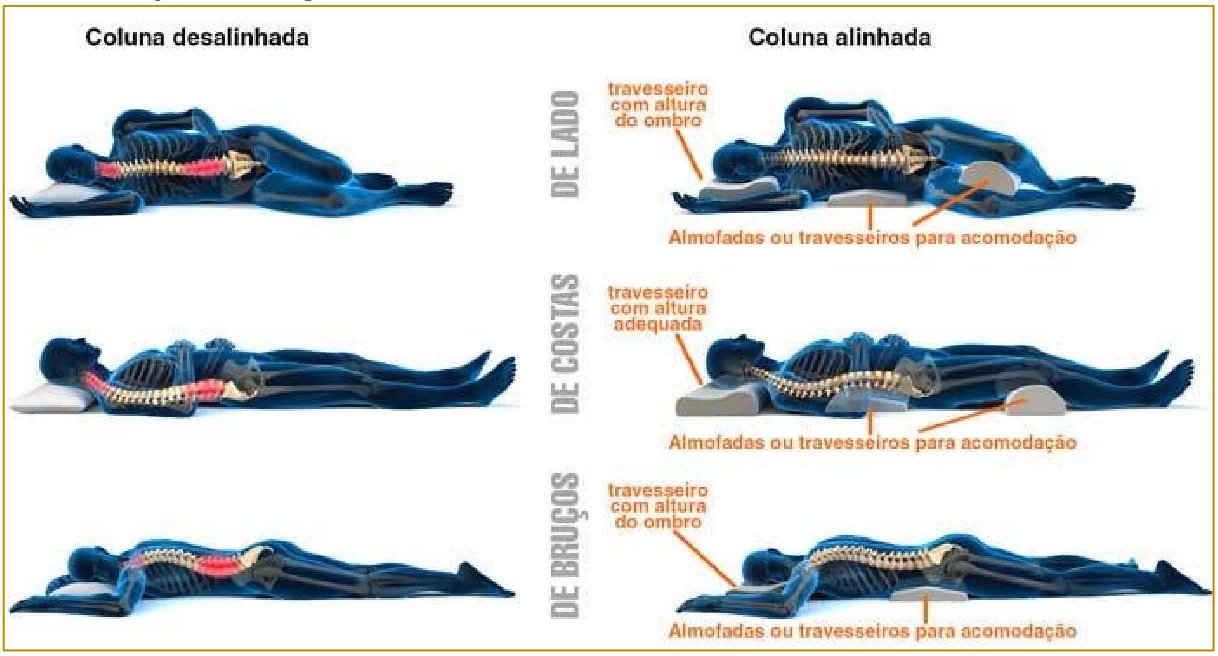
Professor(a), sugerimos que você opte, juntamente com seus alunos, por uma das posições (de lado, de bruços ou de costas) para realizar essa investigação. Será preciso que cada aluno esteja com seu travesseiro, além disso, sugerimos que a atividade seja desenvolvida em um ambiente propício, por exemplo, uma sala com tatame, caso o Colégio possua, ou algum outro material que proporcione conforto a seus alunos durante o desenvolvimento da atividade.

As hipóteses dos alunos poderão ser testadas por meio das experimentações relacionadas a altura de seus travesseiros. Professor(a), peça para que seus alunos se atentem para o fato de que a altura do travesseiro se modifica quando a cabeça está apoiada sobre o mesmo, pois pode acontecer dos alunos testarem os travesseiros, mas medirem a altura sem estar com a cabeça apoiada.

Professor(a), os modelos matemáticos que seus alunos podem produzir deverão levar em conta a necessidade do alinhamento de 90º entre cabeça e ombro, para que assim, eles possam perceber que a altura ideal do travesseiro será aquela que preenche esse espaço, ou seja, essa altura é igual a altura do ombro, o que é variável de pessoa para pessoa.

A validação dos modelos matemáticos estabelecidos para o fenômeno sob investigação pode ocorrer por meio da exibição de um episódio do Programa Bem Estar, disponível através do *link:* https://globoplay.globo.com/v/3710302/, que conta com a participação de uma médica que analisa fotos da postura dos telespectadores ao dormir e vai demonstrando a forma correta, utilizando travesseiros. No vídeo a médica menciona que o travesseiro ideal é aquele que "preenche o espaço de cabeça e ombro de forma alinhada". Além da exibição do vídeo, o(a) professor(a) pode apresentar, também, a imagem da Figura 28, que compara o alinhamento da coluna ao utilizar o travesseiro na altura ideal, para três posições distintas.

Figura 28: Comparativo do alinhamento da coluna ao utilizar o travesseiro na altura ideal



Fonte: https://www.ims-hs.com/voce-sabia-que-a-postura-correta-para-dormir-e-tao-importante-quanto-a-adotar-a-postura-correta-para-desenvolver-as-tarefas-laboraistrabalho/

Ar-condicionado

Atividade 6



Resumo

Para a realização desta atividade os alunos irão investigar qual a potência ideal de um aparelho de ar-condicionado a ser instalado na sala de aula. A atividade possibilita a revisão e/ou introdução de conceitos pertencentes à unidade temática Números e Álgebra, Geometrias, Grandezas e Medidas. É possível explorar a necessidade dos diversos parâmetros que fazem parte do nosso dia a dia, bem como, argumentar sobre o conhecimento científico que os fundamentam; reconhecer os fatores que podem influenciar na determinação da potência do ar-condicionado, observando fatores invariantes em contraste de outros que variam; utilizar a percepção de regularidades para a produção dos modelos matemáticos. Os modelos produzidos poderão ser validados por meio da presença de um técnico da área ou de alguma plataforma que esteja de acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas - ABNT, NBR 5858/1983 e permita ser alimentada com as dimensões do objeto de estudo, ou seja, as dimensões da sala de aula.

Materiais necessários

- ✓ Régua;
- ✓ Trena;
- ✓ Fita métrica;
- ✓ Calculadora;
- ✓ Folhas para anotações;
- ✓ Tabela para cálculo de carga térmica;
- ✓ Mapa do fator geográfico por região.

Duração: 5 horas-aula

Conteúdos Matemáticos que podem ser abordados

- ✓ Proporção;
- ✓ Porcentagem;
- ✓ Carga térmica;
- ✓ Pontos Cardeais;
- ✓ Medidas de área;
- ✓ Trajetória do Sol;
- ✓ Geometria Plana;
- ✓ Cálculo algébrico;
- ✓ Gráfico de setores;
- ✓ Medidas de massa;
- ✓ Expressões numéricas;
- ✓ Medidas de comprimento;
- ✓ Medidas de temperatura;
- ✓ Média aritmética simples;
- ✓ Sistema monetário brasileiro;
- ✓ Potência de eletrodomésticos;
- ✓ Unidade caloria no formato Kcal;
- ✓ Operações com números decimais;
- ✓ BTU (Unidade Térmica Britânica);
- ✓ Manuseio de instrumentos de medida.

Elementos do Pensamento Algébrico que podem ser desenvolvidos

- ✓ a percepção de regularidades;
- ✓ percepção de aspectos invariantes em contraste de outros que variam;
- ✓ tentativas de expressar ou explicar a estrutura de uma situação problema;
- ✓ presença do processo de generalização.

Professor(a), você pode iniciar a atividade com uma conversa sobre os benefícios do conforto térmico na hora dos estudos. Estabeleça um diálogo permitindo que seus alunos coloquem os pontos de vista a respeito da importância do ar-condicionado em sala de aula.

Mesmo que a sala de aula já possua um aparelho de ar-condicionado, questione seus alunos sobre a potência ideal para aquele ambiente, convidando-os a realizar essa investigação.

Professor(a), é importante que você saiba qual o conhecimento que seus alunos possuem a respeito do termo "potência". Para explicar sobre a unidade de medida da potência do ar-condicionado, o BTU - *British Thermal Unit,* você pode fazer uma analogia com as unidades que os alunos já têm conhecimento, unidades de massa, de comprimento, de capacidade, pontuando que o BTU, assim como as unidades citadas, se refere a uma grandeza específica, a potência.

Encaminhe as discussões de modo que os alunos reflitam sobre os elementos que podem influenciar na escolha da potência de um ar-condicionado. A Figura 29 apresenta os itens elencados pela turma na qual a atividade foi desenvolvida.

Figura 28: Itens considerados pela turma

Itens que os alunos consideraram influenciar na escolha da potência de um ar-condicionado

- A área da sala;
- Quantidade de pessoas;
- Quantidade de portas e janelas;
- Se tem cortinas;
- Quantidade de lâmpadas;
- O horário que pega sol;
- Quantidade de aparelhos eletrônicos;
- O tipo de material do forro.

Fonte: Dos autores

Professor(a), caso você tenha contato com algum técnico da área de refrigeração, sugerimos que você o convide a realizar uma conversa com sua turma, analisando os itens elencados por seus alunos e realizando considerações a respeito. Ao final da conversa, você pode solicitar que ele revele e/ou registre, apenas para você, a potência ideal de um aparelho de ar-condicionado para aquela sala. Essa informação poderá ser utilizada para validar o modelo matemático estabelecido para a situação-problema. Porém, caso você não possa contar com a presença de um profissional, exiba algum vídeo e/ou informações que possam confirmar, refutar ou ampliar os itens que seus alunos julgaram influenciar na escolha da potência de um ar-condicionado.

Professor(a), os itens elencados por seus alunos são considerados fontes de procedência do calor, que emitem para o ambiente uma determinada quantidade de calorias, contribuindo para o seu aquecimento. O resultado da soma de todas as formas de calor em um determinado ambiente é chamado de carga térmica. A potência do ar-condicionado está diretamente relacionada à quantidade de carga térmica presente no ambiente.

Professor(a), a tabela para cálculo da carga térmica, Figura 29, que será disponibilizada aos estudantes, integra a Associação Brasileira de Normas Técnicas - ABNT, NBR 5858/1983. É importante elucidar todos os termos que a compõe, para que os alunos se sintam confortáveis para argumentar durante as discussões.

Figura 29: Tabela para cálculo de carga térmica

Carga Térmica								
Procedência do calor	Unidades			Fatores			Unid.xFator	BTU/h
Tipo I - Janelas c/ insolação	Largura	Altura	Total	S/ Proteção	Proteção Int.	Proteção Ext.		
1.1 - Norte				1000	480	290		
1.2 - Nordeste				1000	400	290		
1.3 - Leste				1130	550	360		
1.4 - Sudeste				840	360	290		
1.5 - Sul				0	0	0		
1.6 - Sudoeste				1680	670	480		
1.7 - Oeste				2100	920	630		
1.8 - Noroeste				1500	630	400		
Tipo II - Janelas Transmissão	Largura	Altura	Total					
2.1 - Vidro comum				210				
2.2 - Tijolo de vidro/ vidro duplo				105				
Tipo III - Paredes	Largura	Altura	Área Janel	Constr. Leve		Cons. Pesada		
3.1 - Externas voltadas p/ o sul				55		42		
3.2 - Externas outras orientações				84		50		
3.3 - Interna // ambientes ñ cond.				33				
Tipo IV - Teto	Compr.	Largura	Total					
4.1 - Laje				315				
4.2 - Em laje, c/2,5 cm de isolação ou mais				125				
4.3 - Entre andares				52				
4.4 - Sob telhado isolado				72				
4.5 - Sob telhado sem isolação				160				
Tipo V - Piso	Compr.	Largura	Total					
Piso não colocado sobre o solo				52				
Tipo VI - Pessoas								
Em Atividade Normal				630				
Em Atividade Física (Academia)				1000				
Tipo VII - Iluminação e aparelhos								
Lâmpadas (Incandecentes)			W	4				
Lâmpadas (Fluorescentes)			W	2				
Aparelhos Elétricos			KW	860				
Motores			HP	645				
Número de Computadores			W	3,412				
Tipo VIII - Portas ou vãos	Largura	Altura	Total					
Abertos constantemente				630				
						SubTotal		

Aparelho (Capacidade BTU)	Modelo	Tensão

Fator Climático da região	
Carga Térmica Total BTU/h	
TR	

Fonte: https://www.refrigeracao.net/Topicos/carga_termica.htm

Professor(a), nesse site você poderá fazer o *download* da NBR 5858/1983, como também, da planilha de carga térmica. Esse arquivo é editável e disponibiliza a planilha, juntamente com o mapa do fator geográfico por região. Você, também, encontrará uma planilha para cálculo simplificado da carga térmica e um gráfico da distribuição percentual das fontes de procedência do calor presentes no ambiente sob investigação, que é gerado a partir da inserção dos dados nas planilhas..

Os fatores preestabelecidos na tabela se referem à quantidade de calorias emitida para o ambiente. Explique a seus alunos que esses fatores podem ser interpretados como tantos outros parâmetros que fazem parte do nosso dia a dia, como por exemplo, a velocidade máxima permitida para veículos leves em rodovias com acostamento (110 km/h); a temperatura considerada estado febril (37º C); o percentual de presença para obter aprovação (75%). É importante sinalizar que esses parâmetros foram estabelecidos a partir de estudos e testes, e determinam diversas atividades diárias que realizamos.

Professor(a), assim que os alunos determinarem a potência do ar-condicionado para a sala de aula, você pode projetar a planilha e socializar os resultados encontrados. Valide a potência determinada por meio da informação dado pelo técnico em refrigeração ou por meio de uma plataforma que esteja de acordo com a NBR 5858/1983.

Geralmente as salas de aula de um Colégio possuem dimensões padronizadas, dessa forma, convide os alunos a produzirem um modelo matemático que permita determinar a potência ideal de um aparelho de ar-condicionado para quaisquer das salas de aula do Colégio.

Professor(a), o modelo matemático proposto terá as áreas dos fatores de procedência de calor: janelas com insolação, janelas de transmissão, paredes, teto, piso, iluminação e portas, todos como coeficientes, visto que as salas de aulas possuem dimensões padronizadas, as variáveis serão os fatores preestabelecidos na tabela para cálculo de carga térmica que se referem à quantidade de calorias emitida para o ambiente. O modelo matemático produzido agrupará as informações que se encontram de forma detalhada na tabela de cálculo de carga térmica, facilitando a determinação da potência ideal para o aparelho de ar-condicionado.

Referências

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. Discussões sobre "como fazer" Modelagem Matemática na sala de aula. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. (Orgs.). **Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática**: relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina: Eduel, p. 19-43, 2011.

ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. Modelagem Matemática na Educação Matemática. In: ALMEIDA, M. W. L; SILVA, K. A. P. (Orgs.). **Modelagem em Foco**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2014.

BASSANEZI, R.C. **Ensino–aprendizagem com modelagem matemática.** São Paulo: Contexto, 2002.

BLANTON, M. L. **Algebra and the Elementary Classroom – Transforming Thinking, Transforming Practice**. Portsmouth, NH: Heinemann, 2008.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v.36, n.5, p.412-446, 2005.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In: CAI, J.; KNUTH, E. (Eds.). **Early algebraization**, Berlin: Springer, p.5-23, 2011.

CARPENTER, T. P.; FRANKE, M. L.; LEVI, L. **Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school**. Portsmouth, NH: Heinemann, 2003.

CHAMBERLIN, S. A.; MOON, S. Model-Eliciting Activities as a Tool to Develop and Identify Creatively Gifted Mathematicians. **Journal of Secondary Gifted Education**, v. 17, n.1, p. 37-47, 2005.

FERRUZZI, E. C.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E.; ALMEIDA, L. M. W. Possibilidades de desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática em diferentes níveis de escolaridade. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais**... Salvador: SBEM, 2010.

GLAS, E. F. Klein's model of mathematical creativity. Science and Education, v.11, p. 95–104, 2002.

HESTENES, D. Notes for a Modeling Theory of Science, Cognition and Instruction. In: **GIREP Conference: Modelling in Physics and Physics Education**, Amsterdam, Netherlands, 2006.

KAPUT, J. J. Teaching and learning a new algebra with understanding. In: FENNEMA, E.; ROMBERG, T. A. (Orgs.) **Mathematics classrooms that promote understanding**. Mahwah, NJ: Erlbaum, p. 133-155, 1999.

KAPUT, J. J. What is algebra? What is algebraic reasoning? In: KAPUT, J. J.; CARRAHER, D. W.; BLANTON, M. L. (Eds.). **Algebra in the early grades**, 2008. p.5-17. New York: Lawrence Erlbaum Associates.

LESH, R.; HOOVER, M.; HOLE, B.; KELLY, A.; POST, T. Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers. In: KELLY, A. E.; LESH, R. A.(Eds.). **Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education.** Mahwah: Routledge, 2000. p.591-646.

MESTRE, C. **O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade: Uma experiência de ensino**. Tese (Doutoramento em Educação na especialidade de Didática da Matemática) – Universidade de Lisboa, Instituto de Educação, 2014.

NISS, M., BLUM, W.; GALBRAITH, P. Introduction to modelling and applications in mathematics education. In BLUM, W.; GALBRAITH, P. L.; HENN, H. W.; NISS, M. (eds). **Modelling and Applications in Mathematics Education**. **14th ICMI Study**. New York, USA: Springer. p. 3-32, 2007.

SILVA, K. A. P.; VERONEZ, M. R. D. Atividades de Modelagem Matemática: diferentes abordagens para diferentes níveis de escolaridade. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, EPMEM, 4, 2010, Maringá. **Anais**... Maringá: UEM, 2010. v. 1. p. 1-11.

SMITH, E. Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In: KAPUT, J. J.; CARRAHER, D. W.; BLANTON, M. L. (Eds.), **Algebra in the early years**. Reston, VA: NCTM, p. 133-160, 2008.

STILLMAN, G. Problem Finding and Problem Posing for Mathematical Modelling. In: HOE, L. N.; DAWN, N. K. E. (Edts.). **Mathematical Modelling**: from theory to practice. Singapore: World Scientific Publishing, 2015. p. 41-56.

STOHLMANN, M.; ALBARRACIN, L. What is known about elementary grades mathematical modelling. **Education Research International**, London, v. 1, n. 9, 2016. http://dx.doi.org/10.1155/2016/5240683

TORTOLA, E. **Configurações de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.** 2016. 306 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

TORTOLA, E. **Os usos da linguagem em atividades de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.** Dissertação. Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

VAN DE WALLE, J. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. 6ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

Anexos

Anexo A: Dimensões originais de alguns carros

CARRO	*COMPRIMENTO*	*LARGURA*	*ALTURA*
ASTON MARTIN ONE 77	425,4 cm	184,5 cm	115,2 cm
BARRACUDA FÓRMULA S 68	480,0 cm	179,2 cm	134,4 cm
BMW M4	454,4 cm	185,6 cm	134,3 cm
CADILLAC ELMIRAJ	499,2 cm	192,1 cm	128,0 cm
CAMARO 14	460,8 cm	191,7 cm	128,8 cm
CAMARO SS	444,5 cm	189,4 cm	127,8 cm
CHEVY LUV	441,4 cm	179,0 cm	141,4 cm
CHEVY SILVERADO	537,6 cm	203,2 cm	166,8 cm
CORVETTE C7Z06	467,2 cm	193,5 cm	122,4 cm
DATSUN 240Z	444,9 cm	204,6 cm	128,3 cm
DODGE CHALLENGE 71	459,8 cm	185,3 cm	121,8 cm
DODGE CHARGER 69	512,3 cm	192,5 cm	140,5 cm
DODGE RAM 1500	524,7 cm	223,9 cm	223,4 cm
FIAT 500	371,6 cm	165,7 cm	153,2 cm
HONDA CIVIC TYPE-R	439,0 cm	191,8 cm	140,9 cm
PORSCHE 918 SPYDER	454,5 cm	194,0 cm	108,9 cm
TOYOTA LAND CRUISER	435,2 cm	191,5 cm	198,4 cm
TOYOTA TUNDRA 2010	505,4 cm	229,9 cm	236,8 cm
VOLKSWAGEN BEETLE	415,7 cm	179,2 cm	185,6 cm
VOLKSWAGEN NEW BEETLE CUP	428,9 cm	198,2 cm	166,4 cm

Anexo B: Situação-problema da Atividade Miniaturas

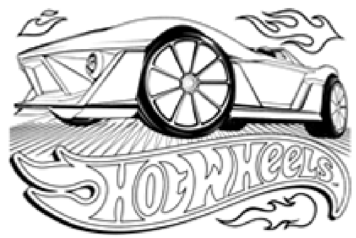
Estudantes:____

____

É comum vermos crianças brincando com carrinhos em miniatura. Os carrinhos Hot Wheels, por exemplo, são muito conhecidos. Eles são adorados não só por crianças como também por adultos.

Mas será que existem carros de verdade como essas miniaturas?

E, se existem, como determinar as medidas de um carrinho Hot Wheels a partir do carro original?



Anexo C: Modelo de gráfico pictórico