UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

LUÍS FELIPE GONÇALVES CARNEIRO

JORNAL *A CONJECTURA*

LONDRINA

2021

LUÍS FELIPE GONÇALVES CARNEIRO

JORNAL *A CONJECTURA*

NEWSPAPER: *A CONJECTURA*

Produto Educacional apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dra. Eliane Maria de Oliveira Araman

LONDRINA

2021

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina

LUIS FELIPE GONCALVES CARNEIRO

PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO MOBILIZADOS POR ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL.

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 23 de Setembro de 2021

Prof.a Eliane Maria De Oliveira Araman, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof Andre Luis Trevisan, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof.a Marcia Aguiar, Doutorado - Fundação Universidade Federal do Abc (Ufabc)

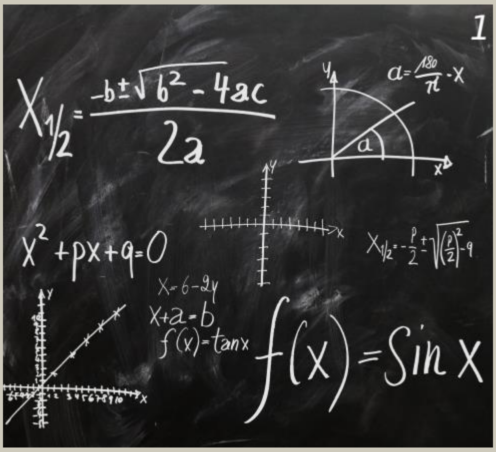
Prof.a Maria De Lurdes Serrazina, Doutorado - Universidade de Lisboa

Jornal *A Conjectura*

Julho de 2021 Notícias semanais

Pesquisadores defendem novo método de ensinar Matemática

"Para que exista compreensão efetiva dos conceitos por parte do aluno, é necessário o desenvolvimento do raciocínio"[1], declara pesquisadora.



Pesquisadores de Educação Matemática do mundo todo defendem uma mudança no ensino da disciplina. O desenvolvimento do raciocínio matemático tem sido apontado como crucial para o aprendizado da Matemática. O argumento dos pesquisadores é de que o tradicional ensino da Matemática conduz à memorização de técnicas e procedimentos sem a compreensão dos porquês de funcionarem.

Cadernos desta edição:

- Educação: Página 3
- Poder: Página 5
- Ciência: Página 6
- Cotidiano: Página 9
- Classificados: Página 11

[1] MATA-PEREIRA, 2012, p. 1.

Caro leitor, o que você tem em mãos é um produto educacional, parte da pesquisa de mestrado desenvolvida por mim, Luís Felipe, sob orientação da professora Dra. Eliane Araman, no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Câmpus Cornélio Procópio e Londrina.

O tema de nossa pesquisa foram os processos do raciocínio matemático que os estudantes mobilizam quando resolvem uma tarefa. Defendemos a ideia de que o desenvolvimento do raciocínio matemático pode contribuir muito na aprendizagem da Matemática.

Mas há alguns fatores que influem no desenvolvimento do raciocínio matemático e levam os alunos a utilizarem processos do raciocínio cada vez mais complexos, como as tarefas escolhidas para tanto e as ações do professor quando as realiza com os alunos. Além, é claro, do próprio conhecimento do professor a respeito do raciocínio matemático.

Assim, elaboramos este *jornal* para proporcionar um primeiro contato de professores de Matemática com o raciocínio matemático e, se houver interesse – e espero que ele exista –, desenvolvê-lo nas suas aulas. A quem se interessar por aprender o tema com mais profundidade, sugiro que busque pela dissertação que deu origem a esse produto e pelos textos das referências.

Boa leitura!

Pesquisadores defendem novo método de ensinar Matemática

Um novo tema tem ganho força entre pesquisadores ao redor do mundo nos últimos anos: o raciocínio matemático. Acadêmicos da área de Educação Matemática têm defendido que o seu desenvolvimento na escola leva a uma melhor aprendizagem da Matemática. "Para que exista compreensão efetiva dos conceitos por parte do aluno, é necessário o desenvolvimento do raciocínio"[2], declara Joana Mata-Pereira, que realizou recentemente uma pesquisa de doutorado sobre o tema.

Mas o que é o raciocínio matemático? "O raciocínio não é exclusivo da Matemática"[3], explicam João Pedro da Ponte, Marisa Quaresma e Joana Mata-Pereira, grupo de pesquisadores da Universidade de Lisboa. "Há alguns aspectos, no entanto, que são característicos da Matemática"[3], complementam.

Outro grupo de professores portugueses descreve o raciocínio matemático como "um conjunto de processos por meio dos quais novo conhecimento é obtido a partir de conhecimentos prévios"[4]. "Transformações entre representações de números

[2] MATA-PEREIRA, 2012, p. 1.
[3] PONTE; QUARESMA; MATA-PEREIRA, 2020, p. 7.
[4] MORAIS; SERRAZINA; PONTE, 2018, p. 555.

racionais, e processos do raciocínio matemático [...] estão intimamente relacionados"[5], completam os professores Cristina Morais, Lurdes Serrazina e João Pedro da Ponte.

Os pesquisadores John Lannin, Amy Ellis e Rebekah Elliott, de universidades dos Estados Unidos, explicam que o raciocínio matemático é "um processo evolutivo de conjecturar, generalizar, investigar porquês e desenvolver e avaliar argumentos"[6].

No Brasil, as pesquisas sobre o tema estão no início, mas já começam a surgir. Os pesquisadores André Trevisan e Eliane Araman, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, veem de forma positiva o trabalho com o raciocínio matemático na sala de aula e explicam que ainda não há um consenso entre todos os pesquisadores da área: "há uma polissemia quanto ao entendimento da expressão raciocínio matemático"[7]. No entanto enfatizam que o entendimento que possuem é de que raciocínio matemático é "a produção de conhecimentos matemáticos a partir de outros já existentes"[7].

Previsão do tempo

Hoje: Matematicópolis

Temperatura: π°C

[5] MORAIS; SERRAZINA; PONTE, 2018, p. 568.

[6] LANNIN; ELLIS; ELLIOTT, 2011, p. 10.

[7] TREVISAN; ARAMAN, 2021, p. 160.

Documento curricular normativo do Ministério da Educação, a BNCC completará dois anos em 2021

Documento do Ministério da Educação que serve como referência obrigatória para a elaboração dos currículos escolares de toda a Educação Básica no Brasil, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) completará dois anos da publicação de sua versão final em dezembro.

De acordo com o professor Daniel Ricardo[8] há mudanças importantes na área de Matemática. “A área de Matemática e suas Tecnologias traz uma novidade em relação aos PCN[9]: uma maior atenção e uma delimitação mais clara do raciocínio matemático, além de uma competência específica que o privilegia”[10].

De fato, na BNCC consta que o raciocínio matemático pressupõe os processos “de investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática”[11]. Veja o que diz a *competência específica 5* de Matemática na etapa do Ensino Médio, citada por Daniel Ricardo:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018, p. 540).

[8] Personagem fictício.
[9] Parâmetros Curriculares Nacionais.
[10] Carneiro, Araman e Serrazina (2019, 2020).
[11] BRASIL, 2018, p. 529.

Armandinho

Pesquisadora fala sobre os processos do raciocínio matemático

Pesquisadores que se dedicam ao estudo do ensino da Matemática têm explorado o raciocínio matemático nos últimos anos. Luísa Maathai[12] detalha os processos do raciocínio que são estudados recentemente.

Segundo Luísa, professoras da Universidade de Quebec, Doris Jeannotte e Carolyn Kieran, elaboraram um modelo no qual há duas maneiras de olhar para o raciocínio matemático: sob o aspecto estrutural, que se constitui dos raciocínios dedutivo, indutivo e abdutivo, e sob o aspecto processual, que se constitui dos processos do raciocínio matemático[13].

"Mesmo que necessário para um modelo de raciocínio matemático para o ensino e aprendizagem da Matemática escolar, o aspecto estrutural não é suficiente para entender completamente a natureza do raciocínio matemático na escola"[14], declaram as pesquisadoras da universidade canadense.

[12] Personagem fictícia.
[13] Jeannotte e Kieran (2017).
[14] JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 8.

Sobre os processos do raciocínio matemática, Luísa fez um resumo dos mais citados nos estudos e falou de alguns deles:

Conjectura: Muitas vezes, é o primeiro dos processos manifestados pelos estudantes na resolução de uma tarefa. A conjectura é uma declaração que, para a determinação de sua validade ou não validade requer outros processos do raciocínio matemático.

Generalização: A generalização consiste em uma declaração sobre um conjunto de objetos matemáticos. Pode ser produzida a partir de uma declaração que se estende para um conjunto mais amplo de objetos matemáticos. Uma conjectura, por exemplo, pode tornar-se uma generalização se ampliar seu domínio, mas não necessariamente toda generalização começa como uma conjectura.

Generalização empírica: Ocorre quando a generalização parte da exploração de poucos exemplos ou de casos particulares.

Generalização teórica: Ocorre quando a generalização é construída a partir da atribuição de um modelo aos dados, sem recorrer a casos particulares. É mais desejável que os alunos generalizem teoricamente, já que autores afirmam que possui um nível maior de complexidade que as generalizações empíricas.

Justificação: A justificação tem como objetivo determinar a validade de uma declaração. Esse processo busca por elementos que possam determinar se uma declaração é verdadeira ou não.

Há outros processos do raciocínio matemático além dos citados. Os mais citados nas pesquisas estão resumidos no quadro a seguir.

Número de ouro

A ciclista Anna Kiesenhofer é a primeira foi a primeira austríaca a ganhar uma medalha olímpica no ciclismo pelo seu país. Além disso, Anna também é doutora em... Matemática!

<table>
<tr><td rowspan="4">Validação</td><td>Demonstração</td><td colspan="3">Processo que valida uma declaração por meio de verdades sistematizadas em uma teoria e de uma estruturação de natureza dedutiva; seus resultados são formalizados em teoria matemática</td></tr>
<tr><td>Prova</td><td colspan="3">Processo que valida uma declaração explicitando verdades já aceitas pela classe em questão possui uma estruturação de natureza dedutiva; seus resultados são acessíveis à classe</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Justificação</td><td rowspan="2">Processo que busca por elementos para validar ou refutar uma declaração</td><td>Dedutiva</td><td>Possui uma estrutura dedutiva e independe de casos particulares</td></tr>
<tr><td>Empírica</td><td>Baseada em casos particulares</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Busca por semelhanças e diferenças</td><td rowspan="2">Generalização</td><td rowspan="2">Processo de inferência de uma declaração sobre um conjunto de objetos matemáticos a partir de elementos do conjunto</td><td>Teórica</td><td>Construída a partir da atribuição de um modelo aos dados observados</td></tr>
<tr><td>Empírica</td><td>Construída a partir da exploração de poucos exemplos</td></tr>
<tr><td>Conjectura</td><td colspan="3">Processo de inferência de uma declaração potencialmente válida</td></tr>
<tr><td>Identificação de padrões</td><td colspan="3">Processo que infere uma relação recursiva entre objetos ou relações matemáticas</td></tr>
<tr><td>Classificação</td><td colspan="3">Processo que junta ou separa objetos matemáticos de acordo com seus atributos críticos</td></tr>
<tr><td>Comparação</td><td colspan="3">Processo que busca por semelhanças ou diferenças entre objetos matemáticos com o objetivo de produzir uma declaração</td></tr>
</table>

Entrevista[15]: João Pedro da Ponte

A entrevista dessa semana é com o professor João Pedro da Ponte, que esclarece uma dúvida muito comum entre professores de Matemática: exercício e tarefa são a mesma coisa?

Professor, exercício e tarefa são sinônimos?

"Existem muitos tipos de tarefa matemática. Exemplos bem conhecidos [...] são os problemas, os exercícios, as investigações, os projetos e as tarefas de modelação[16]". "A questão fundamental é saber se o aluno dispõe, ou não, de um processo imediato para a resolver. Caso conheça e seja capaz de usar, a questão será um exercício [...] Os exercícios servem para o aluno pôr em prática os conhecimentos já adquiridos anteriormente. [...] No entanto, para a maioria dos alunos, fazer exercícios em série não é uma atividade interessante"[17].

Por quê?

Com isso, "para o aluno, aprender é sobretudo 'saber como se fazem' todos os tipos de exercícios suscetíveis de saírem em testes ou exames"[18].

Há alternativas para isso?

"Para um ensino que segue uma estratégia alternativa têm sido sugeridas muitas designações [...] O melhor termo, a meu ver, talvez seja o de ensino-aprendizagem exploratório. A sua característica principal é que o

[15] Entrevista fictícia, baseada em Ponte (2005, 2014).
[16] PONTE, 2005, p. 2.
[17] PONTE, 2005, p. 4.
[18] PONTE, 2005, p. 13.

professor não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem"[15]. "A realização de tarefas abertas, de caráter exploratório e investigativo é um elemento marcante neste tipo de ensino"[19] "Uma estratégia de ensino-aprendizagem exploratória valorizará mais os momentos de reflexão e discussão"[20].

O que é uma tarefa de exploração?

"Uma exploração é uma tarefa aberta e acessível à maioria dos alunos"[21]. "Tarefas de cunho mais aberto são essenciais para o desenvolvimento de certas capacidades nos alunos, como a autonomia, a capacidade de lidar com situações complexas, etc."[22]

E qual a importância dos momentos de discussão?

"Importância idêntica [à realização da tarefa] assumem os momentos de discussão em que os alunos apresentam o seu trabalho, relatam as suas conjecturas e conclusões, apresentam as suas justificações e questionam-se uns aos outros [...] Os momentos de discussão constituem, desse modo, oportunidades fundamentais para a negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento"[16].

[19] PONTE, 2005, p. 16.
[20] PONTE, 2005, p. 15.
[21] PONTE, 2014, p. 21.
[22] PONTE, 2005, p. 17.

Processos do raciocínio matemático

Conversamos novamente com Luísa, que traz alguns processos do raciocínio matemático presentes em pesquisas sobre o tema.

Conjecturas e justificações

Luísa apresenta os processos de conjectura, justificação e exemplificação presentes em um estudo[23] que expõe a resolução da seguinte tarefa por alunos de 6º ano:

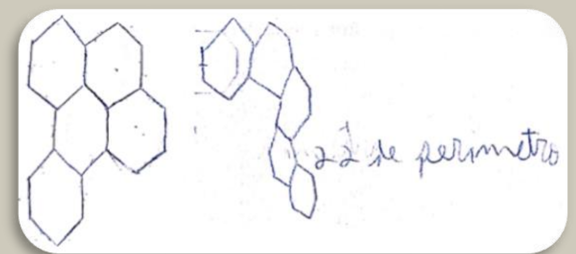
Mais hexágonos...
Hoje vamos investigar o perímetro de figuras formadas por cinco hexágonos regulares unidos pelos lados.

Este é apenas um exemplo

1- *Construa outras figuras diferentes, desenhe-as e observe o que se passa com o seu perímetro. Tente encontrar uma explicação para as descobertas que fizer.*
2- *Construa agora uma figura qualquer com cinco hexágonos. Você consegue determinar o perímetro dessa figura sem contar os lados?*

Luísa explica que nessa tarefa os alunos deveriam construir outras figuras com base no exemplo dado, mas dispondo os hexágonos regulares de outras maneiras. "Dessa forma, os perímetros seriam diferentes mesmo utilizando a mesma quantidade de polígonos", explica. Veja um exemplo da discussão citada por ela a seguir.

José: O meu deu dezessete. O seu também?
Lucas: Não sei. Não contei ainda.
José: Pensei que ia dar dezoito.
Lucas: O meu deu mais de dezoito. [...] O meu deu vinte e dois.
José: Mas jamais. Ele é com tudo, assim.
Beatriz: Deu vinte e dois.
Lucas: Deu vinte e dois, mesmo. Mesma coisa que o seu.



Construções de José e de Lucas

[23] Carneiro, Araman e Serrazina (2020).

Luísa, o que é possível identificar nesse diálogo?

É interessante notar que os alunos não sabiam ainda que figuras com diferentes disposições dos cinco hexágonos poderiam também ter perímetros diferentes. Por isso José fica curioso quando percebe que a sua figura possui um perímetro de 18 enquanto a de seu colega um perímetro de 22. Ele esperava que as figuras construídas com cinco hexágonos regulares tivessem 18 de perímetro, já que, tanto a dele quanto a do exemplo tinham.

Essa era a sua conjectura?

Exatamente. Essa foi a conjectura que José elaborou. Mas ele foi confrontado com dados que apontavam para a não validade da sua conjectura, que eram a figura de Lucas e também a de Beatriz, ambas com perímetros diferentes do que ele encontrou. E nesse momento os alunos já começam a mobilizar outro processo, que é a justificação. Eles começam a buscar por elementos que sustentem suas conjecturas.

Há um diálogo bastante interessante nesse estudo, que mostra a importância que tem, além das discussões entre os próprios alunos, os questionamentos do professor para que os alunos avancem no desenvolvimento do raciocínio matemático.

Professor: Por que aqui deu vinte e dois e aqui deu dezesseis? O que é que muda dessa para essa?
José: Está mais fechada.
Professor: O que isso quer dizer? Por que nessa o perímetro é menor?
José: Sim, mas tem mais 'negocinho' fechado aqui. Está mais para dentro.
Lucas: As linhas de dentro não ficam mais para fora.
José*:* Ah, elas estão juntas. Uma do lado da outra.
Professor: De dois hexágonos, você fala?
José: Sim. Dos dois.

Lucas: [Cada linha] É de dois hexágonos.
Professor: É de dois hexágonos. No que isso influencia no perímetro?
Lucas: Ah, aqui fica maior.
Professor: Então o que você conclui? Quanto mais linhas dentro o perímetro é maior ou o perímetro é menor?
Lucas: Mais dentro é menor.
Professor: Menor. Por quê?
Lucas: Porque quanto mais dentro, vai ter menos o de fora.

Pode nos explicar melhor isso?

Com certeza. Nesse diálogo que citei, o professor questiona os alunos na direção de uma justificação. São eles os responsáveis pela justificação, é claro, mas talvez sem os questionamentos os alunos não sentissem a necessidade de justificar. Então, com duas outras construções feitas, de 16 e 22 de perímetro, o professor pede que eles as comparem e digam o porquê de os perímetros serem diferentes.

Aos poucos, os alunos começam a elaborar uma justificação. Primeiro, José diz que uma figura está 'mais fechada' que a outra. Quando questionado novamente, ele se refere às 'linhas de dentro' da figura. Quando Lucas diz que essas 'linhas de dentro' não estão na parte externa da figura, José percebe que elas representam os lados de dois hexágonos unidos.

Essa ideia vai sendo trabalhada pelos alunos nas discussões entre eles e diante dos questionamentos do professor, até que Lucas diz que quanto mais 'linhas de dentro' uma figura tem, menor seu perímetro. Ele explica que isso ocorre porque quanto mais 'linhas' dentro, há menos para ser contada como perímetro. "Porque quanto mais de dentro vai ter menos o de fora". Essa frase é uma justificação.

Generalizações

Luísa também apresenta tarefas em que os alunos mobilizam o processo de generalização. Uma delas pedia que os alunos formassem 13 cêntimos[24] e, depois, 26 cêntimos, com moedas de 1, 2 e 5 cents[25]. A tarefa[26] era a seguinte:

Primeira parte da tarefa

Duas maneiras diferentes

13 = ... ✖ 5 + ... ✖ 2 + ... ✖ 1

13 = ... ✖ 5 + ... ✖ 2 + ... ✖ 1

Se não há moedas de 2 cents

13 = ... ✖ 5 + ... ✖ 1

Se não há moedas de 1 cent

13 = ... ✖ 5 + ... ✖ 2

Se não há moedas de 5 cents

13 = ... ✖ 2 + ... ✖ 1

> ***Marta:*** Primeiro fiz 2 × 5 que era 10, depois 1 × 2 que era 2, 10 + 2, e depois mais 1, que é 1 × 1.
> ***Professora:*** Me diz o que você esteve a fazer com esse número.
> ***Marta:*** Decompor. [...]
> ***João:*** Eu fiz 1 × 5 que é 5, fiz 4 × 2 que era 8, e depois pus o 0. Aqui, aqui tem 0, mais 2 × 4 mais 5 dava 13. [...]
> ***Luís:*** Nós fizemos 1 × 5, 2 × 2, 4 × 1. Porque 1 × 5 é 5 e 2 × 4 é 8, soma 5 com 8 dá 13[27].

O que tem a nos dizer sobre essa tarefa?

Está dividida em duas partes. Na primeira os alunos devem obter 13 cêntimos com moedas de 1, 2 e 5 cents. E o fazem.

---

[24] Cêntimos de euro, a moeda utilizada em Portugal, contexto da pesquisa citada.
[25] O mesmo que cêntimo.
[26] Araman, Serrazina e Ponte (2020).
[27] ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2020, p. 453.

Os autores desse estudo vão nos dizer que essas estratégias que os alunos relatam são conjecturas. Podem ser validadas ou não. Os pesquisadores chamam a atenção para a fala do aluno Luís, por exemplo, que também apresenta uma justificação pois, segundo eles, evidencia elementos que sustentam sua conjetura. Então, quando Luís diz o porquê, ele está mobilizando o processo de justificação.

Segunda parte da tarefa

Duas maneiras diferentes

26 = ... × 5 + ... × 2 + ... × 1

26 = ... × 5 + ... × 2 + ... × 1

Se não há moedas de 2 cents

26 = ... × 5 + ... × 1

Se não há moedas de 1 cent

26 = ... × 5 + ... × 1

Se não há moedas de 5 cents

26 = ... × 2 + ... × 1

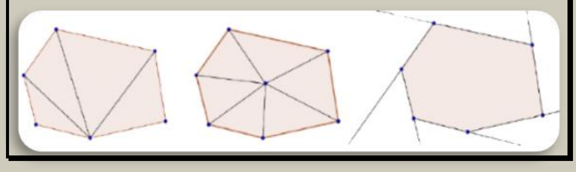
João: 4 vezes 5 dá 20. Depois eu fiz 2 × 2 dá 4 mais 2 × 1 que é 2 dá 6, dá 26.
Ricardo: Primeiro fui fazer 2 vezes 5, duas vezes moedas de 5 cêntimos davam 10 cêntimos, depois fiz esse cálculo outra vez, só que ao contrário, com moedas de 2 cêntimos (referindo-se a 5 × 2), já tinha 20 cêntimos, mais 6 cêntimos que é 6 × 1, dava 26.

E na segunda parte?

Também há observações interessantes. Os autores da pesquisa dizem que os alunos utilizam a mesma estratégia da primeira parte. No entanto, os alunos generalizam a ideia de que fazer a multiplicação da decomposição. Se antes haviam decomposto o 13, agora fizeram o mesmo com o 26. Mas dessa vez multiplicando os resultados anteriores. Quando os alunos fazem isso, estão mobilizando o processo de generalização. Eles estendem seu raciocínio de uma conjectura para uma generalização. Há uma outra tarefa que também ilustra isso.

A tarefa mencionada por Luísa:

> Na tarefa "Relações entre ângulos" encontraste uma generalização para a soma dos ângulos internos de um polígono regular qualquer de n lados. Para isso, observa as três figuras seguintes. Todas elas partem do mesmo hexágono, no qual se iniciou uma estratégia possível para chegar à conclusão procurada. Usa uma das figuras e completa a justificação recorrendo ainda a outras relações que já tenhas estabelecido.[28]



> ***Célia:*** O primeiro hexágono está dividido em 4 triângulos. Todos os vértices de cada triângulo cobrem todos os ângulos internos do polígono. A expressão que generaliza é (n-2) × 180. Se um polígono tiver 10 lados, é possível desenhar 8 triângulos; se tiver 6 lados, desenhamos 4 triângulos. Se tiver n lados, desenhamos n-2 triângulos[29].

Onde está a generalização nesse caso?

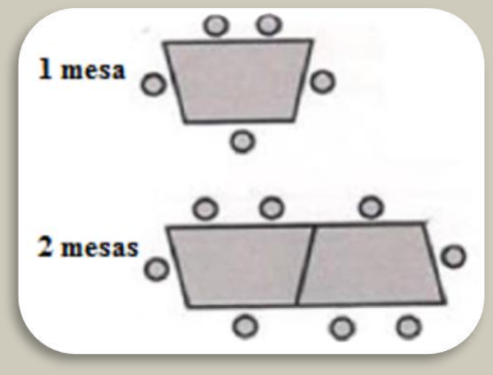
Está no fato de Célia partir da decomposição do hexágono em triângulos para concluir algo a respeito de calcular a soma de seus ângulos internos.

Ou seja, partindo da decomposição dos hexágonos em triângulos ela concluiu algo a respeito de um conjunto mais amplo, que incluiu todos os polígonos de n lados.

Célia obteve uma fórmula para calcular a soma dos ângulos internos de qualquer polígono, não apenas do hexágono.

[28] BRUNHEIRA; PONTE, 2019, p. 95.

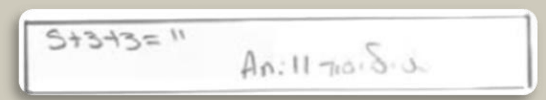
[29] BRUNHEIRA; PONTE, 2019, p. 97.



a) Quantas crianças podem se sentar em 3 mesas?

(b) Quantas crianças podem se sentar em 10 mesas?[30]

(a) Quantas crianças podem se sentar em 3 mesas?



Resposta: 11 crianças

(b) Quantas crianças podem se sentar em 10 mesas?

3 mesas = 11 10 mesas = x

3	**4**	**5**	**6**	**7**
11	*14*	*17*	*20*	*23*

8	**9**	**10**	**11**
26	*29*	*32*	*35*

Em negrito: Número de mesas
Em itálico: Número de crianças

Há outros tipos de generalizações?

Penso que sim. Há generalizações empíricas, que são produzidas pelos alunos a partir da exploração de casos particulares, e há as teóricas, que surgem da atribuição de um modelo aos dados observados. Em um estudo, por exemplo, alguns pesquisadores mostram uma tarefa em que os alunos demonstram ter generalizado empiricamente.

Como era essa tarefa?

Ela mostrava uma mesa na qual poderiam se sentar 5 crianças. Em seguida, uma mesa idêntica anexada a essa primeira. Agora, 8 crianças poderiam se sentar, porque cada mesa perdia um lugar quando eram anexadas. Então era pedido que os alunos dissessem quantas crianças poderiam se sentar em 3 e em 10 mesas.

[30] CHIMONI; PITTA-PANTAZI; CHRISTOU, 2018, p. 63.

Os autores mostram uma resolução em que os alunos respondem que 11 crianças podem se sentar em 3 mesas e, para responder quantas sentam-se em 10 mesas, eles constroem uma tabela com 3 mesas, 4 mesas, 5 mesas, e assim por diante, até chegar em 10 mesas.

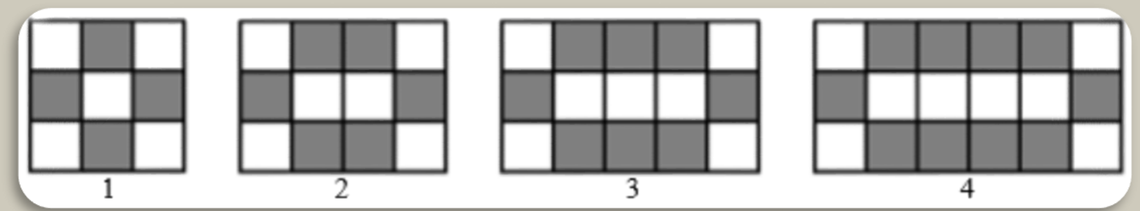
Portanto, nessa resolução, eles identificam um padrão, o de que cada mesa a mais anexada adiciona lugares para mais três crianças. Sua generalização se constitui quando produzem uma declaração para um conjunto de objetos. E, como fazem isso partindo de casos particulares, analisando cada número de mesas, sua generalização é empírica.

E quanto às generalizações teóricas? Há exemplos?

Há um estudo[31] de pesquisadores portugueses que mostra generalizações de natureza teórica em uma tarefa. Era mostrada uma sequência de figuras formadas por azulejos brancos e uma das questões pedia aos estudantes que completassem uma tabela com a quantidade de azulejos de cada cor desde a figura 1 até a figura n. Os pesquisadores também apresentam resoluções nas quais penso que houve uma generalização teórica devido ao modo como foi construída.

[31] Mata-Pereira e Ponte (2018)

1. A Sara construiu uma sequência de figuras utilizando pequenos azulejos brancos e cinzentos, dispostos do seguinte modo[32]:



1.3 Ajuda a Sara a completar a tabela que fez para organizar os dados. Repara que na última linha da tabela deves introduzir expressões algébricas:

Número da figura	Número de azulejos cinzentos	Número de azulejos brancos	Número total de azulejos
1			
2			
3	8	7	15
4			
5			
...			
n			

Uma das estudantes que resolveu a questão, Andreia, diz que a expressão algébrica que representa o número de azulejos cinzas é 2n + 2 e dos brancos n + 4. Mas é o modo como a aluna elaborou essa generalização que é interessa. Ela observou, por exemplo, na figura 2, que havia também dois azulejos cinzas na parte de cima e na parte de baixo da figura, além dos dois quadrados cinzas nas pontas da figura. A partir disso, ela chega na expressão 2n + 2.

Andreia: Eu encontrei o termo geral dos quadrados cinzentos e dos quadrados brancos.
Professora: Fizeste logo, foi a tua primeira abordagem? [...] Como é que fizeste, Andreia? Explica-me.
Andreia: Dos quadrados cinzentos [...] Eu pus que era 2n + 2. [...] Estava dois. Então eu vi que de cima e de baixo era dois também. [...] E depois tinha mais dois de cada lado.
Professora: 2n mais os das pontas, muito bem.[32]

[32] MATA-PEREIRA; PONTE, 2018, p. 795.

E por que essa é uma generalização teórica?

Devido ao modo como ela foi construída. Andreia conectou a sua generalização ao contexto do problema. Ao contrário da tarefa que mencionei anteriormente, na qual os alunos generalizam analisando casos particulares, ela generaliza estabelecendo um esquema geométrico entre a sua expressão e o contexto do problema.

Nesse mesmo estudo há outro exemplo de resolução assim. Andreia construiu, para o número total de azulejos, a expressão (2n + 2) + (n + 4), a soma das expressões do número de quadrados cinzas e brancos. Mas outros estudantes constroem a expressão 6 + 3n e a professora pede que ele pense na relação que sua expressão possui com a de Andreia.

> ***Guilherme:*** Foi um que é 6 mais 3n.
> ***Professora:*** E isso tem alguma relação com o que a Andreia fez? Agora sou eu a pôr-vos a pensar. O termo do Guilherme [...] 6 mais 3n. Qual a relação do teu termo geral com aquilo que a Andreia fez? [...]
> ***Guilherme:*** Sim, o meu, o 6 era dos que mantinha de lado. [...]~
> ***Álvaro:*** O três é o número de... Pronto... É o número de... [gesticula aproximando e afastando as mãos na horizontal][33].

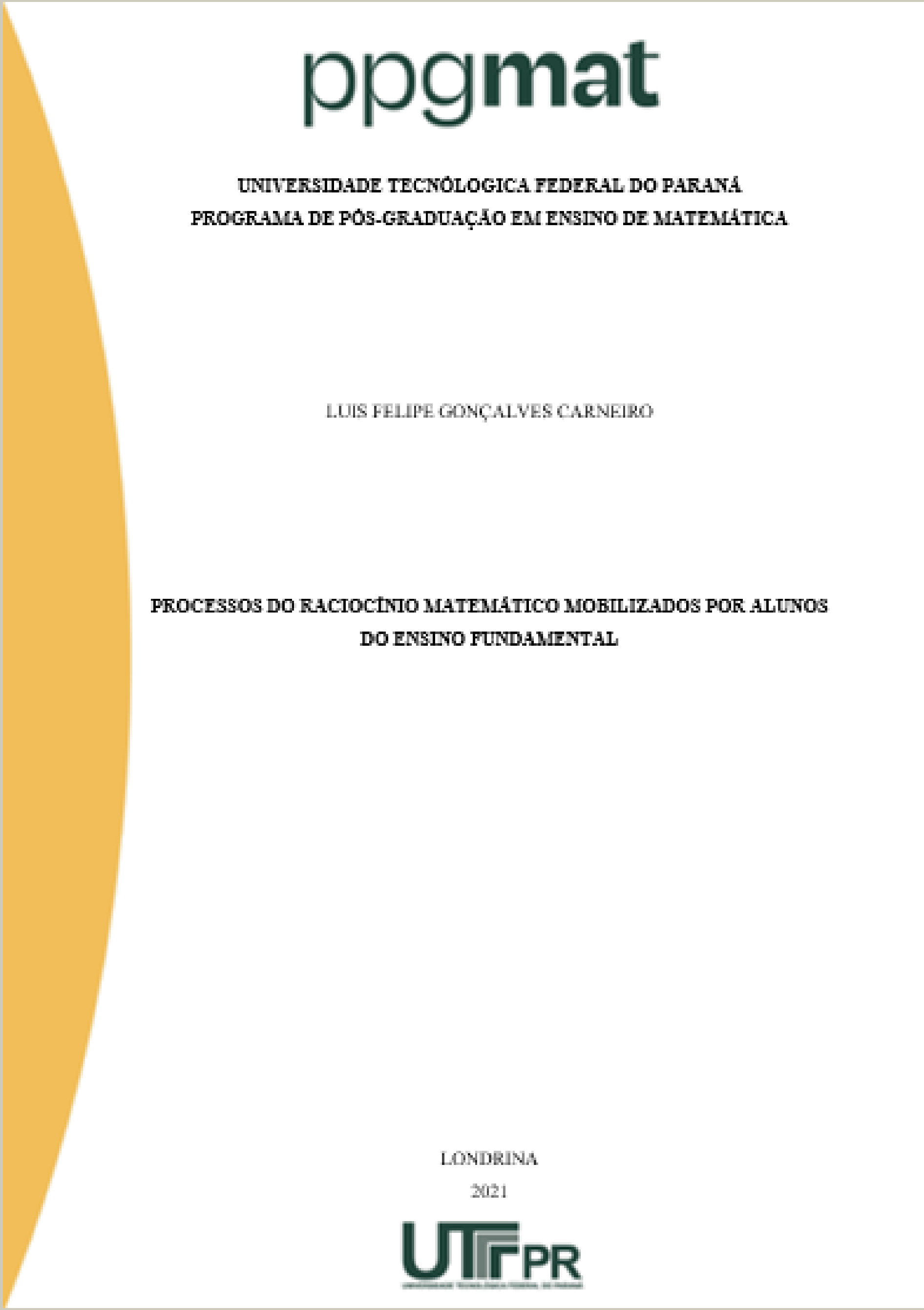
Nesse caso, os alunos não somam as expressões do número de quadrados brancos e cinzas. Em vez disso, Guilherme percebe que nas colunas das pontas havia sempre 6 quadrados, e Álvaro complementa dizendo que 3 é o número de quadrados das outras colunas, que não estão nas pontas, quando gesticula. Portanto, de novo, uma generalização teórica, já que os

[33] MATA-PEREIRA; PONTE, 2018, p. 796-797.

alunos não analisam casos particulares. Eles, na verdade, constroem um modelo a partir da observação dos dados.

Luísa, muito obrigado pelos exemplos que nos trouxe. Até a próxima!

Para saber mais



Referências bibliográficas

ARAMAN, E.; SERRAZINA, L.; PONTE, J. P. Raciocínio Matemático nos Primeiros Anos: ações de duas professoras ao discutir tarefas com seus alunos. **Bolema**, v. 34, n. 67, 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (1ª a 4ª séries):** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª séries):** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio):** Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, MEC, 2000.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ (Ensino Médio)**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, MEC, 2002.

BRUNHEIRA, L.; PONTE, J. P. Justificando Generalizações Geométricas na Formação Inicial de Professores dos Primeiros Anos. **Bolema**, v. 33, n. 63, 2019.

CARNEIRO, L. F. G.; ARAMAN, E.; SERRAZINA, L. A abordagem ao raciocínio matemático em documentos curriculares brasileiros: uma breve análise. In: II Congresso Internacional de Ensino – CONIEN. **Anais...** Cornélio Procópio, 2019.

CARNEIRO, L. F. G.; ARAMAN, E.; SERRAZINA, L. Processos do Raciocínio Matemático Mobilizados por Estudantes de 6º Ano do Ensino Fundamental ao Resolverem uma Tarefa de Geometria. **JIEEM**, v. 13, n. 1, 2020.

CHIMONI, M.; PITTA-PANTAZI, D.; CHRISTOU, C. Examining early algebraic thinking: insights from empirical data. **Educ Stud Math**, v. 98, n. 1, 2018.

JEANNOTTE, D.; KIERAN, C. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educ Stud Math**, v. 96, n. 2, 2017.

LANNIN, J.; ELLIS, A.; REBEKAH, E. **Developing Essential Understanding of Mathematical Reasoning for Teaching Mathematics in Prekindergarten-Grade 8**. Reston: NCTM, 2011.

MATA-PEREIRA, J. **O raciocínio matemático em alunos do 9º ano no estudo dos números reais e inequações**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Lisboa. Lisboa, 2012.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. **Bolema**, v. 32, n. 62, 2018.

MORAIS, C.; SERRAZINA, L.; PONTE, J. P. Mathematical Reasoning Fostered by (Fostering) Transformations of Rational Number Representations. **Acta Scientiae**, v. 20, n. 4, 2018.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Org.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005, p. 11-34.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA, J. Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? **Educação e Matemática**, v. 2, n. 156, 2020.

TREVISAN, A.; ARAMAN, E.. Processos do Raciocínio Matemático Mobilizados por Estudantes de Cálculo em Tarefas Envolvendo Representações Gráficas. **Bolema**, v. 35, n. 69, 2021.