

ppgmat

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

JOSIANE APARECIDA BUSQUIM MOTA

**ENSINO POR INVESTIGAÇÃO PARA A APRENDIZAGEM DE OPERAÇÕES COM
MATRIZES À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO
SEMIÓTICA**

LONDRINA

2023

JOSIANE APARECIDA BUSQUIM MOTA

**ENSINO POR INVESTIGAÇÃO PARA A APRENDIZAGEM DE OPERAÇÕES COM
MATRIZES À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO
SEMIÓTICA**

**TEACHING BY INVESTIGATION FOR LEARNING OPERATIONS WITH
MATRICES IN THE LIGHT OF THE THEORY OF SEMIOTIC REPRESENTATION
REGISTERS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, *campi* Cornélio Procópio e Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dra. Adriana Helena Borssoi

LONDRINA

2023



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho para fins não comerciais, desde que atribuam o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.

Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



JOSIANE APARECIDA BUSQUIM MOTA

**ENSINO POR INVESTIGAÇÃO PARA A APRENDIZAGEM DE OPERAÇÕES COM
MATRIZES À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA.**

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino de Matemática.

Data de aprovação: 17 de Março de 2023

Dra. Adriana Helena Borssoi, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Karina Alessandra Pessoa Da Silva, Doutorado – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Paulo Henrique Rodrigues, Dr. Doutorado – Universidade Estadual de Londrina (UEL)

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 17/03/2023.

Dedico a realização dessa pesquisa aos profissionais da educação, que buscam a cada dia aprender um pouco mais sobre como levar os estudantes a construírem conhecimentos de uma maneira significativa, em específico onde a matemática não aconteça como um 'bicho de sete cabeças', mas que ela esteja ao alcance deles de uma maneira natural e prazerosa.

AGRADECIMENTOS

Os agradecimentos são muitos, pois chegar até aqui não foi fácil, mas foi muito gratificante.

Se fosse para elencar por ordem os agradecimentos seria injusta, pois cada um que passou até agora por mim nessa caminhada foi importante e me ajudou de alguma forma.

Agradeço então à Deus, por durante esse tempo no mestrado ter concedido saúde para mim e meus familiares, para poder participar integralmente de tudo o que foi proposto nessa caminhada.

Agradeço minha família, em especial meu marido e minhas filhas. Meu marido foi meu primeiro incentivador a voltar a estudar, sempre me lembrando que sou capaz daquilo que desejo, e foi ele quem segurou as barras com as meninas quando não pude estar presente ou precisava ficar quieta em um ambiente calmo, e minhas filhas que sempre respeitaram meu espaço quando precisei ficar sozinha, ou não estar presente em alguma ocasião.

Agradeço minha professora de matemática Dra. Elaine Cristina Ferruzzi do Ensino Médio Técnico cursado no antigo CEFET-Cornélio Procópio, que foi minha inspiração para cursar Licenciatura em Matemática e me tornar professora também. Lembro de suas aulas e dedicação em como ensinar, a preocupação que tinha com seus alunos para que eles entendessem o que estava sendo ensinado e não apenas decorar, e isso me despertou o gosto pela matemática.

Agradeço a professora Dra. Adriana Helena Borssoi, que prontamente me aceitou para orientar assim que a professora Dra. Elaine aposentou. Ao ocorrer essa troca fiquei muito tranquila, pois conheço a profissional exemplar que é a professora Dra. Adriana, pois trabalhamos juntas no Grupo de Estudos e admiro sua paciência, calma e delicadeza. Sempre estive à disposição para ajudar, responder dúvidas e até mesmo tranquilizar nos momentos de incertezas.

Agradeço a professora Dra. Karina Alessandra Pessoa da Silva, que prontamente aceitou o convite para fazer parte da minha banca, fiquei muito feliz pelo seu aceite pois devido a participação no Grupo de Estudos conheço seu profissionalismo, ética e das contribuições valiosas que teceu sobre esse trabalho. Também gostaria de agradecer pelos momentos de ensinamentos, conversas, risadas, descontração pelo qual passamos juntas, tudo isso torna a caminhada mais leve e prazerosa.

Agradeço ao professor Dr. Paulo Henrique Rodrigues pelo aceite do convite para participar da minha banca, tenho certeza que suas contribuições foram muito importantes para aprimorar a conclusão desse trabalho.

Agradeço a minha amiga que o mestrado trouxe, agora Mestre, Juliana Aparecida Gonçalves, passamos por momentos muito especiais juntas, pude perceber que nesses momentos de angústias, dúvidas, incertezas, risadas, desabafos, eu não estava sozinha, tinha alguém para compartilhar desses sentimentos e isso me fortaleceu, pois, um amigo sempre incentiva o outro a não desistir.

Agradeço a todos os colegas do Grupo de Estudos ao qual faço Parte – GEPMIT – Grupo de Estudos e Pesquisa em Modelagem Matemática, Investigação Matemática e Tecnologia, coordenados pelas professoras Dr(as) Adriana Helena Borssoi e Karina Alessandra Pessoa da Silva. As experiências compartilhadas, os ensinamentos passados, as conversas, as risadas sempre deixavam o ambiente do grupo agradável, e, para mim, participar todas as sextas-feiras do grupo era uma satisfação.

*A alegria não chega apenas no encontro do achado, mas
faz parte do processo de busca. Ensinar e aprender não
pode dar-se fora da procura, fora da boniteza e da
alegria.*

(Paulo Freire)

MOTA, Josiane Aparecida Busquim. **Ensino por Investigação para a aprendizagem de operações com matrizes à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica**. 2023. 128 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2023.

RESUMO

Este trabalho tem como referencial teórico a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, tal teoria apresenta uma abordagem cognitiva que analisa as dificuldades apresentadas na aprendizagem da matemática. Um argumento para que essas dificuldades ocorram é de que o conhecimento matemático só é transformado em saber quando ocorre a mobilização espontânea pelos estudantes, de distintos registros semióticos de um mesmo objeto matemático. Nesse sentido essa teoria aborda a importância da utilização de diferentes registros semióticos ao desenvolver uma atividade matemática, pois a utilização de diferentes registros associados a um mesmo objeto matemático e ocorrida a coordenação entre eles evidencia a possibilidade de o estudante compreender o objeto matemático como um todo. A partir dessas considerações delineamos o objetivo desse trabalho: Evidenciar indícios de aprendizagem dos estudantes baseada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica sobre operações com matrizes em tarefas desenvolvidas na perspectiva do Ensino por Investigação. A partir do objetivo de pesquisa pretende-se analisar a aprendizagem cognitiva dos estudantes, residente na capacidade de reconhecer o objeto matemático de cada tarefa proposta, na correspondência das unidades de sentidos nas conversões, e por último na coordenação de registros apresentadas pelos estudantes. Para desenvolver a pesquisa apoiamos-nos na abordagem didática do Ensino por Investigação, levando em conta que nessa abordagem didática o professor incentiva o estudante a uma busca de soluções e entendimento de uma nova perspectiva do que está sendo estudado, despertando um raciocínio científico, lógico e objetivo e ao mesmo tempo criativo, e no desenvolvimento de tarefas de exploração e investigação, tarefas que apresentam um potencial para desenvolver diferentes registros semióticos. Para buscar evidências sobre a questão de pesquisa, a coleta de dados ocorreu com uma turma de estudantes do 1º ano do Novo Ensino Médio, em uma escola pública da cidade de Londrina com o conteúdo operações com matrizes. Esse conteúdo foi escolhido por estar proposto na matriz curricular para ser desenvolvido no 1º trimestre, momento em que ocorreu a coleta de dados. A pesquisa é qualitativa de cunho interpretativo, os dados coletados são analisados a partir dos registros semióticos que emergem de cada tarefa proposta, por meio da transformação ocorrida entre eles: tratamento, conversão e coordenação. A partir das análises realizadas evidenciamos indícios de aprendizagem dos estudantes por meio dos diferentes registros semióticos desenvolvidos e suas transformações, como também conseguimos identificar que os grupos analisados compreenderam a relação existente entre os diferentes registros de representação associados ao objeto matemático de cada tarefa proposta, o que evidencia indícios de aprendizagem em matemática. Como resultado dessa pesquisa elaboramos o Produto Educacional intitulado “O Ensino por Investigação para a aprendizagem de operações com matrizes por meio de registros semióticos: Orientações para o Professor”, composto por seis tarefas envolvendo operações com matrizes, cada tarefa possui orientações de desenvolvimento na abordagem didática do Ensino por Investigação.

Palavras-chave: Educação Matemática Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Ensino por Investigação. Tipos de tarefas. Operações com Matrizes. Novo Ensino Médio.

MOTA, Josiane Aparecida Busquim. **Teaching by Investigation for learning operations with matrices in the light of the Theory of Semiotic Representation Registers**. 2023. 128 p. Dissertation (Mastering in Mathematics Teaching) – Federal Technological University of Paraná, Londrina, 2023.

ABSTRATCT

This work has Raymond Duval's Theory of Registers of Semiotic Representation as a theoretical framework. This theory presents a cognitive approach that analyzes the difficulties presented in the learning of mathematics. One argument for these difficulties to occur is that mathematical knowledge is only transformed into knowledge when students spontaneously mobilize different semiotic registers of the same mathematical object. In this sense, this theory addresses the importance of using different semiotic registers when developing a mathematical activity, since the use of different registers associated with the same mathematical object and coordination between them evidences the possibility for the student to understand the mathematical object as a whole. Based on these considerations, we outlined the objective of this work: To show signs of student learning based on the Theory of Semiotic Representation Registers on operations with matrices in tasks developed from the perspective of Teaching by Investigation. From the research objective, it is intended to analyze the students' cognitive learning, residing in the ability to recognize the mathematical object of each proposed task, in the correspondence of the units of meaning in the conversions and congruences, and finally in the coordination of records presented by the students. To develop the research, we relied on the didactic approach of Teaching by Investigation, taking into account that in this didactic approach the teacher encourages the student to search for solutions and understand a new perspective of what is being studied, awakening a scientific, logical reasoning and objective and at the same time creative, and in the development of exploration and investigation tasks, tasks that have the potential to develop different semiotic registers. In order to seek evidence on the research question, data collection took place with a group of students in the 1st year of New High School, in a public school in the city of Londrina with the content operations with matrices, this content was chosen because it is proposed in the curriculum matrix to be developed in the 1st trimester, when data collection took place. The research is qualitative with an interpretative nature, the collected data are analyzed from the semiotic registers that emerge from each proposed task, through the transformation that occurs between them: treatment, conversion and coordination. Based on the analyzes carried out, we evidenced evidence of student learning through the different semiotic registers developed and their transformations, as well as identifying that the analyzed groups understood the relationship between the different representation registers associated with the mathematical object of each proposed task, the that demonstrates understanding in mathematics. As a result of this research, we elaborated the Educational Product entitled “Teaching by Investigation for the understanding of operations with matrices through semiotic registers: Guidelines for the Teacher”, composed of six tasks involving operations with matrices, each task has development guidelines in the approach didactics of Teaching by Investigation.

Keywords: Theory of Semiotic Representation Registers. Teaching by Research. Task types. Matrix Operations. Mathematics Education. New High School.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Algumas representações do número 5	23
Figura 2: Formação de uma representação identificável.....	26
Figura 3: Representação gráfica da função $y = 2x$	27
Figura 4: Exemplo de conversões entre Registros de Representação Semiótica	28
Figura 5: Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos de seu grau de desafio e de abertura.....	37
Figura 6: Diversos tipos de tarefa quanto à duração	38
Figura 7: Diversos tipos de tarefas quanto ao contexto.....	38
Figura 8: Tarefa proposta no RCO+Aulas	40
Figura 9: Tarefa adaptada do material disponibilizado no RCO+Aulas, slide número 19	41
Figura 10: Redes sociais utilizadas pelos estudantes	42
Figura 11: Tarefa 3	43
Figura 12: Tarefa proposta no RCO+Aulas	44
Figura 13: Tarefa adaptada do material disponibilizado no RCO+Aulas, slide número 19 ...	45
Figura 14: Capa do Produto Educacional.....	46
Figura 15: Tarefa 1 (floricultura)	56
Figura 16: Estudantes divididos em 5 grupos	57
Figura 17: Conversão 1, Tarefa 1 (floricultura), G5	58
Figura 18: Conversão 2, Tarefa 1 (floricultura), G5	59
Figura 19: Tratamento 1, Tarefa 1 (floricultura), G5	61
Figura 20: Tratamento 2 e Conversão 3, Tarefa 1 (floricultura), G5	61
Figura 21: Tratamento 3, Tarefa 1 (floricultura), G5	61
Figura 22: Tratamento 4 e Conversão 4, Tarefa 1 (floricultura), G5	63
Figura 23: Conversão 5, Tarefa 1 (floricultura), G5	64
Figura 24: Conversão 6, Tarefa 1 (floricultura), G5	64
Figura 25: Conversão 7, Tarefa 1 (floricultura), G5	65
Figura 26: Registro sobre a apreensão do objeto matemático.....	66
Figura 27: Esquema de tratamento e conversão desenvolvida por G5 na Tarefa 1 (floricultura).....	67
Figura 28: Conversão 1, Tarefa 1 (floricultura), 1º momento, G1	69
Figura 29: Conversão 1, Tarefa 1 (floricultura), G1, 2º momento	70
Figura 30: Conversão 2, Tarefa 1 (floricultura), G1, 2º momento	71

Figura 31: Tratamento 1, Tarefa 1 (floricultura), G 1, 2º momento.....	72
Figura 32: Tratamento 2, Tarefa 1 (floricultura), G 1, 2º momento.....	73
Figura 33: Tratamento 3, Tarefa 1 (floricultura), G 1, 2º momento.....	73
Figura 34: Tratamento 4, Tarefa 1 (floricultura), G 1, 2º momento.....	74
Figura 35: Conversão 3, Tarefa 1 (floricultura), G 1, 2º momento	75
Figura 36: Conversão 4, Tarefa 1 (floricultura), G 1, 2º momento	76
Figura 37: Conversão 4, Tarefa 1 (floricultura), G 1, 2º momento	76
Figura 38: Conversão 4, Tarefa 1 (floricultura), G 1, 2º momento	76
Figura 39: Esquema de tratamento e conversão desenvolvida por G1 na Tarefa 1 (floricultura).....	78
Figura 40: Tarefa 3 (redes sociais)	79
Figura 41: Tratamento 1, Tarefa 3 (redes sociais), G5.....	80
Figura 42: Tratamento 2 e 3, Tarefa 3 (redes sociais), G5	80
Figura 43: Conversão 1, Tarefa 3 (redes sociais), G5	81
Figura 44: Conversão 2, Tarefa 3 (redes sociais), G5	81
Figura 45: Tratamento 4, Tarefa 3 (redes sociais), G5.....	82
Figura 46: Conversão 3, Tarefa 3 (redes sociais), G5.....	82
Figura 47: Conversão 4, Tarefa 3 (redes sociais), G5	83
Figura 48: Esquema das transformações ocorridas na Tarefa das redes sociais pelo G5	84
Figura 49: Tratamento 1, Tarefa 3 (redes sociais), G1	85
Figura 50: Conversão 1, Tarefa 3, G1	86
Figura 51: Conversão 1, Tarefa 3, (redes sociais) G1	86
Figura 52: Tratamento 2, Tarefa 3 (redes sociais), G1.....	87
Figura 53: Tratamento 3, Tarefa 3 (redes sociais), G1.....	87
Figura 54: Tratamento 4, Tarefa 3 (redes sociais), G1	87
Figura 55: Tratamento 5, Tarefa 3 (redes sociais), G1.....	87
Figura 56: Conversão 2, Tarefa 3 (redes sociais), G1	88
Figura 57: Esquema das transformações ocorridas na Tarefa 3 (redes sociais), G1	89
Figura 58: Tarefa 5 – Confecção de mochilas.....	90
Figura 59: Conversão 1 e 2, Tarefa 5 (confecção de mochilas), G5, 1º momento.....	92
Figura 60: Tratamento 1 e 2, Tarefa 5 (confecção de mochilas), G5, 1º momento	93
Figura 61: Tratamento 1, 2 e 3, Tarefa 5 (confecção de mochilas), G5, 2º momento.....	94
Figura 62: Conversão 1 e 2, Tarefa 5 (confecção de mochilas), G5, 3º momento.....	96
Figura 63: Tratamento 1, 2 e 3, Tarefa 5 (confecção de mochilas), G5, 3º momento.....	99

Figura 64: Conversão 4, Tarefa 5 (confecção de mochilas), G5, 3º momento.....	100
Figura 65: Esquema das transformações ocorridas na Tarefa 5 (confecções de mochilas), 3º momento, G5	102
Figura 66: Conversão 1 e tratamento 1, Tarefa 5 (confecção de mochilas), G1, 1º momento	104
Figura 67: Conversão 1, Tarefa 5 (confecção de mochilas), G1, 2º momento.....	106
Figura 68: Estudante organizando no quadro de giz a multiplicação entre duas matrizes....	108
Figura 69: Tratamento 1, Tarefa 5 (confecção de mochilas), G1, continuação do 2º momento	110
Figura 70: Tratamento 2, Tarefa 5 (confecção de mochilas), G1, continuação do 2º momento	110
Figura 71: Tratamento 3, Tarefa 5 (confecção de mochilas), G1, continuação do 2º momento	111
Figura 72: Conversão 2, Tarefa 5 (confecção de mochilas), G1, continuação do 2º momento	112
Figura 73: Esquema das transformações ocorridas na Tarefa 5 (confecção de mochilas), G1, 2º momento e continuação do 2º momento	113

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Classificação dos Registros de Representação Semiótica quanto à natureza	29
Quadro 2: Classificação de cada tarefa de acordo com grau, abertura, duração e contexto ...	39
Quadro 3: Classificação do tipo de tarefa	39
Quadro 4: Organização dos grupos	50
Quadro 5: Objeto matemático referente a cada Tarefa	52
Quadro 6: Cronograma de desenvolvimento das tarefas propostas nessa pesquisa.....	55
Quadro 7: Conversões realizadas na Tarefa 1 (floricultura) pelo G5	66
Quadro 8: Conversões realizadas na Tarefa 1 (floricultura) pelo G1	77
Quadro 9: Conversões realizadas na Tarefa 3 (redes sociais) pelo G5	83
Quadro 10: Conversões realizadas na Tarefa 3 (redes sociais) pelo G1	88
Quadro 11: Conversões realizadas na Tarefa 5 (confecção de mochilas), pelo G5, 3º momento	101
Quadro 12: Conversões realizadas na Tarefa 5 (confecção de mochilas), pelo G1, 2º momento e continuação do 2º momento.....	112

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	14
2 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA	19
2.1 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA	19
2.2 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO	21
2.3 REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS.....	24
2.3.1 A Representação Identificável.....	26
2.3.2 O Tratamento	26
2.3.3 A Conversão	27
2.4 A COORDENAÇÃO ENTRE REGISTROS	29
3 DELINEAMENTO DA PESQUISA	32
3.1 ENSINO POR INVESTIGAÇÃO	32
3.1.1 O Papel do Professor no Ensino por Investigação.....	34
3.1.2 O Papel do Aluno no Ensino por Investigação.....	35
3.2 DIFERENTES TIPOS DE TAREFAS	36
3.3 DESCRIÇÃO DAS TAREFAS	39
3.3.1 Descrição da Tarefa 1 - Floricultura.....	40
3.3.2 Descrição da Tarefa 3 – Redes Sociais.....	42
3.3.3 Descrição da Tarefa 5 - Confecção de mochilas	43
3.4 PRODUTO EDUCACIONAL.....	45
4 ASPECTOS METODOLÓGICOS	47
4.1 O CONTEXTO E OS SUJEITOS DA PESQUISA	47
4.2 PROCEDIMENTOS PARA ANÁLISE DOS DADOS	52
5 ANÁLISE DOS DADOS	56

5.1 ANÁLISE DA TAREFA 1 - FLORICULTURA.....	56
5.1.1 Análise da Tarefa 1 (floricultura) do G5	58
5.1.2 Análise da Tarefa 1(floricultura) do G1	68
5.2 ANÁLISE DA TAREFA 3 - REDES SOCIAIS	78
5.2.1 Análise da Tarefa 3 (redes sociais) do G5	79
5.2.2 Análise da Tarefa 3 (redes sociais) do G1	85
5.3 ANÁLISE DA TAREFA 5 - CONFECÇÃO DE MOCHILAS	90
5.3.1 Análise da Tarefa 5 do G5	91
5.3.1 Análise da Tarefa 5 do G1	103
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	114
REFERÊNCIAS.....	119
APÊNDICES	122
ANEXOS.....	125

1 INTRODUÇÃO

A presente pesquisa teve início como interesse em desenvolver algo relacionado a minha¹ prática, levando em consideração minha atuação profissional como professora da rede estadual do Paraná. Optei por fazer a seleção de Mestrado na UTFPR *Campi* Cornélio Procópio e Londrina, por ser um Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, cujo perfil profissional a ser formado veio ao encontro com o que eu almejava em um Mestrado: a ampliação de conhecimentos e a aprendizagem de novas alternativas pedagógicas, baseadas em resultados de pesquisas, para aplicá-las em sala de aula.

Ao ingressar no Mestrado, além das disciplinas cursadas, também comecei a participar do GEPMIT – Grupo de Estudos e Pesquisas em Modelagem Matemática, Investigação Matemática e Tecnologia - e, durante os encontros, interessei-me pelos estudos voltados para a Investigação Matemática, pois pelos textos estudados e pelas pesquisas analisadas percebi a potencialidade de desenvolver, na prática, atividades de investigação com os estudantes. Também tive atenção voltada para pesquisas que traziam a importância de diferentes registros relacionados a um mesmo objeto matemático, que trabalhados de forma coordenada, favorecem a aprendizagem dos estudantes (DENARDI, 2019; DUVAL, 2003, 2009, 2011, 2012; VERTUAN, 2007).

A partir dessas considerações, levando em conta a experiência na docência durante o ano letivo de 2022, trabalhando com primeiros anos do Novo Ensino Médio² (NEM) e juntamente com minha orientadora, definimos as temáticas da pesquisa: A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) e o Ensino por Investigação no contexto do NEM. No âmbito da Educação Matemática é crescente a preocupação de pesquisadores em relação à construção do conhecimento, com a forma como se processa a aprendizagem. Nesse contexto, alguns pesquisadores (DUVAL, 2009; ALLEVATO; ONUCHIC, 2009; PONTE, 2005) se dedicam para a análise do processo de compreensão da construção do conhecimento, baseado no desenvolvimento de atividades de ensino.

¹ Neste trabalho, será utilizada a 1ª pessoa do singular quando ocorrerem falas específicas das práticas profissionais da professora pesquisadora em questão.

² Novo Ensino Médio (NEM) – A Lei nº 13.415/2017 alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e estabeleceu uma mudança na estrutura do ensino médio, definindo uma nova organização curricular, que contemple uma Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e a oferta de diferentes possibilidades de escolhas aos estudantes, os itinerários formativos, com focos nas áreas de conhecimento e na formação técnica e profissional. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=40361> Acessado em 20/12/2022.

Destacamos nessa linha de pesquisa Raymond Duval, filósofo e psicólogo de formação, cujos estudos têm contribuído fortemente para as pesquisas em Educação Matemática. Duval é autor da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), a qual apresenta uma abordagem cognitiva que analisa as dificuldades apresentadas na aprendizagem da matemática. Tais dificuldades ocorrem principalmente pelo fato de que os objetos matemáticos não possuem existência física e são muitas vezes imperceptíveis (DUVAL, 2009).

Para Duval (2011), o estudante só consegue compreender algo em matemática quando reconhece o objeto matemático³, e isso acontece por meio dos seus registros de representação. De acordo com Duval (2003), há uma grande variedade de registro de representação que pode ser usada na matemática: registros figurais, registros algébricos, registros geométricos, registros tabulares, registros gráficos, língua natural, entre outros.

Nessa perspectiva, os objetos matemáticos se tornam acessíveis a partir de registros de representação semiótica. Para Duval (2011), tais registros são sistemas semióticos criadores de novos conhecimentos. Seguindo esse pensamento, a diversidade de sistemas semióticos é fundamental para a aprendizagem em matemática e para a aquisição de novos conceitos.

Para Denardi (2019, p. 81), a teoria abordada

[...] busca compreender e investigar as dificuldades dos alunos no processo de aquisição do conhecimento matemático e contribuir para o desenvolvimento de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização por meio de distintos registros de representação. Um dos seus principais argumentos é que o conhecimento matemático só é transformado em saber quando ocorre a mobilização espontânea pelos alunos, de distintos registros semióticos de um mesmo objeto matemático.

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), também salienta o uso de diferentes registros como competência específica de matemática e suas tecnologias para o Ensino Médio: “Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional, etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas” (BRASIL, 2018, p. 531). Levando em consideração que a BNCC é a perspectiva curricular brasileira atual, espera-se que os estudantes utilizem diferentes registros de representação no processo de aprender matemática.

Para que um sistema de representação seja considerado um Registro de Representação Semiótica são necessárias três atividades cognitivas: 1- a formação de uma representação identificável; 2- o tratamento de um registro; 3- a conversão de um registro (DUVAL, 2003).

³ Objeto matemático é “qualquer entidade ou coisa à qual nos referimos, ou da qual falamos, seja real, imaginária ou de qualquer outro tipo, que intervém de alguma maneira na atividade matemática” (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p. 12).

Para o autor, a formação de uma representação identificável consiste em, a partir de um registro, identificar o objeto matemático representado; o tratamento de uma representação consiste na transformação dessa representação em outra pertencente ao mesmo registro; as conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos matemáticos. Duval (2009) salienta que a compreensão de um conceito em matemática está associada a atividade de conversão de ao menos dois registros de representação semiótica, ou seja, é necessário que o estudante consiga mudar de sistemas de representações de um mesmo objeto matemático.

Com esse entendimento, Vertuan (2007) considera que a utilização de diferentes registros de representação associados a um mesmo objeto matemático e a coordenação adequada entre estes registros representam possibilidades de o estudante compreender o objeto matemático como um todo. Mas, para isso acontecer, é necessário que o professor crie possibilidades e proponha tarefas que possibilitem a coordenação entre registros.

Partindo da potencialidade da utilização de diferentes registros em tarefas de matemática, levamos em conta desenvolver nas aulas o Ensino por Investigação para a aprendizagem de matemática. Carvalho (2018, p. 766) define:

- [...] como ensino por investigação como o ensino dos conteúdos programáticos em que o professor cria condições em sala de aula para os alunos:
- pensarem, levando em conta a estrutura do conhecimento;
 - falarem, evidenciando seus argumentos e conhecimentos construídos;
 - lerem, entendendo criticamente o conteúdo lido;
 - escreverem, mostrando autoria e clareza nas ideias propostas.

De acordo com a definição de Carvalho (2018), percebemos que o Ensino por Investigação não é uma abordagem referente ao ensino transmissivo expositivo, em que os estudantes são induzidos a ouvirem, copiarem e reproduzirem, pelo contrário, no Ensino por Investigação os estudantes são levados a desenvolverem capacidades de pensar, refletir, analisar e concluir.

Para Sasseron (2015, p. 58):

[...] o ensino por investigação extravasa o âmbito de uma metodologia de ensino apropriada e apenas a certos conteúdos e temas, podendo ser colocada em prática nas mais distintas aulas, sob as mais diversas formas e para os diferentes conteúdos. [...] o ensino por investigação configura-se como uma abordagem didática, podendo, portanto, estar vinculado a qualquer recurso de ensino que desde que o processo de investigação seja colocado em prática e realizado pelos alunos a partir e por meio das orientações do professor.

Ferruzzi; Borssoi e Silva (2021) corroboram com essa compreensão quando falam que compreendem o Ensino por Investigação como uma abordagem didática em que o aluno é o

sujeito ativo e que abarca diversas práticas pedagógicas que se iniciam com uma situação problemática para o aluno e gera uma atividade investigativa para sua resolução.

Tendo em vista a importância da TRRS e do Ensino por Investigação, elementos necessários para desenvolver no estudante uma aprendizagem com significado, autonomia e criticidade e, considerando o momento em que a coleta de dados aconteceu, primeiro trimestre de 2022, o objeto matemático abordado na pesquisa é Operação com Matrizes.

Assim, levando em conta a matriz curricular para o 1º ano do NEM e as orientações do Registro de Classe Online (RCO) + Aulas⁴, decidimos elaborar e implementar tarefas para o estudo de operações com matrizes.

Verificamos que esse conteúdo também é abordado no Caderno de Expectativas de Aprendizagem⁵ em que, ao desenvolvê-lo por meio de tarefas, é esperado que o aluno: conceitue, interprete matrizes e suas operações; reconheça, interprete e transcreva dados em linguagem matricial; resolva situações-problemas envolvendo a igualdade e as operações de adição, subtração e multiplicação de matrizes.

Ao realizar uma busca na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, em relação à teoria de Duval e o conteúdo de matrizes, feita em um período dos últimos doze anos, de 2010 até 2022, encontramos apenas uma Dissertação, intitulada: *Semiótica e Educação Matemática: registros de representação aplicados à teoria das matrizes*, da autoria de Robinson Nelson dos Santos, de 2011.

O trabalho de Santos (2011) pretende contribuir para a compreensão dos fenômenos relacionados ao ensino e à aprendizagem de matemática, tendo como foco a apreensão do objeto matemático por meio de suas diversas representações semióticas. Para isso, apoiou-se na TRRS de Duval. Para tanto, utilizou no trabalho a teoria das matrizes, introduzida com alguns detalhes de sua evolução histórica. Para avaliar esse aspecto analisou uma amostra de livros didáticos das décadas de 1980, 1990 e 2000. O trabalho apresenta a análise de três livros didáticos de épocas diferentes, abordando como cada um trata o desenvolvimento da teoria das matrizes, evidenciando os registros semióticos encontrados.

Considerando o exposto, nossa pesquisa tem como objetivo: *evidenciar indícios de aprendizagem dos estudantes baseada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica*

⁴ RCO + Aulas – é um módulo de planejamento que está disponível no Registro de Classe Online (RCO). Nele, o professor encontra planos de aula específicos para suas disciplinas e séries https://professor.escoladigital.pr.gov.br/rco_mais_aulas. Acesso em 15/09/2022.

⁵ Caderno de Expectativas de Aprendizagem – documento elaborado pela necessidade de continuar o processo de implementação das Diretrizes Curriculares Orientadoras da Educação Básica para a Rede Estadual do Paraná (Parecer CEE/CEB n.130/10), referencial teórico que fundamenta o documento.

sobre operações com matrizes presentes em tarefas desenvolvidas na perspectiva do Ensino por Investigação.

Para orientar nossas análises, delineamos objetivos específicos:

1. Evidenciar nos diferentes registros, a ocorrência do tratamento, da conversão e da coordenação entre registros quando os estudantes desenvolvem diferentes tipos de tarefas envolvendo operações com matrizes;
2. Analisar a ocorrência de indícios de aprendizagem, segundo Duval (2003), quando estudantes do 1º ano do NEM desenvolvem diferentes tipos de tarefas na perspectiva do Ensino por Investigação envolvendo operações de matrizes.

O presente texto é composto por cinco capítulos, além da introdução, sendo eles:

No capítulo 2 iniciamos com considerações históricas sobre a semiótica; em seguida apresentamos a fundamentação teórica da pesquisa, baseado em Duval (2003, 2009, 2011, 2012) quanto a referência sobre a TRRS; em Denardi (2019) e Vertuan (2007) quanto a pesquisas realizadas nesse aspecto.

No capítulo 3 abordamos sobre o Ensino por Investigação, com base em Ferruzzi, Borssoi e Silva (2021), Carvalho (2018), Sasseron (2015). Tal abordagem didática foi a opção para desenvolver as tarefas propostas em sala de aula com os estudantes. Em seguida elencamos os diferentes tipos de tarefas de acordo com Ponte (2005) e a descrição das três tarefas analisadas nessa dissertação, por fim, apresentamos o Produto Educacional que foi implementado em condições reais de ensino.

No capítulo 4 apresentamos os aspectos metodológicos da pesquisa, abordamos sobre o contexto em que a pesquisa foi desenvolvida, os sujeitos da pesquisa, o ambiente educacional em que a implementação do Produto Educacional se deu, os dados da pesquisa, bem como sobre os procedimentos para análise dos dados.

No capítulo 5 trazemos a análise de três tarefas, a partir dos registros de dois grupos, Tarefa 1 (floricultura), Tarefa 3 (redes sociais) e Tarefa 5 (confecção de mochilas). Para cada tarefa primeiro está a análise do grupo 5 (G5) e depois a análise do grupo 1 (G1).

No capítulo 6 abordamos as considerações finais.

2 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Nesse capítulo abordamos sobre a fundamentação teórica de nossa pesquisa, começamos falando brevemente sobre a semiótica, após sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2003, 2009, 2011, 2012). Em seguida, explicamos sobre os registros de representação e os registros de representação semiótica, e dentro dos registros semióticos elencamos as três atividades cognitivas necessárias para que um registro de representação seja um registro de representação semiótica.

2.1 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Iniciamos essa seção falando brevemente sobre a semiótica. O termo semiótica tem origens antigas. É próximo ao termo latino *signum*, que reflete o sentido genérico com o qual é utilizado hoje como signo, entretanto fala-se de signos em suas diversas constituições como: signos linguísticos, signos matemáticos, signos artísticos e assim por diante.

De acordo com Duval (2011), a consideração da semiótica referente ao ensino e à aprendizagem de matemática faz uma constatação da dificuldade de compreensão e da necessidade de recorrer a outros tipos de representação além daqueles que constituem a linguagem da matemática. Nesse sentido, foi a partir do século XIX, que verdadeiramente começou o estudo dos signos, a partir da elaboração dos modelos de análises concernentes à diversidade de signos e seu papel no funcionamento da atividade científica e na comunicação.

Para tanto, três modelos de análises dos signos que fundamentaram a semiótica aparecerem quase que ao mesmo tempo, de maneira independente e não possuem nada em comum. “Nem a mesma definição de signo, nem os mesmos critérios de análise para distinguir os tipos, nem a mesma descrição do funcionamento cognitivo que eles possibilitam” (DUVAL, 2011, p. 28). Os autores desses modelos são: Charles Sanders Peirce, Ferdinand de Saussure e Gottlob Frege. “Todos os trabalhos posteriores de semiótica partem das contribuições desses três autores” (DUVAL, 2011, p. 28).

Peirce, considerado o fundador da semiótica, dedicou-se à classificação de todas as representações, semióticas e não-semióticas, relacionando-as ao desenvolvimento de um conhecimento a partir da experiência concreta. Foi ele que reconheceu a variedade dos tipos de signos que são utilizados e classificou em três classes de acordo com a relação que possuem com o objeto: ícones, índices e símbolos (DUVAL, 2011). Peirce tinha como domínio de

referência para a análise dos signos e sua utilização as disciplinas de ciências em geral, sem distinção, e a lógica.

Saussure dedicou-se ao estudo a partir do exemplo das línguas naturais, a propriedade da noção de sistema semiótico com relação à de signo: “um signo não é tal, a não ser através de suas relações de oposição ou de ligação com outros signos, relações essas que mostram o poder de expressão e de representação do sistema” (DUVAL, prefácio, p. 10). Ele, por sua vez, tinha como domínio de referência para a análise dos signos e sua utilização a disciplina de linguística.

Frege, não propôs a definição de signos. Ele desenvolveu seus estudos a partir do exemplo das linguagens simbólicas e formais e explicou como o processo semiótico é produtor de novos conhecimentos em matemática. Ele tinha como domínio de referência para a análise dos signos e sua utilização as disciplinas de matemática, a análise e a aritmética.

Em relação a qual modelo é mais apropriado para analisar as produções dos estudantes como também as atividades propostas, com objetivo de aquisição de conhecimentos matemáticos, Duval (2011) salienta que são modelos limitados, pois:

Certamente, cada um desses modelos considerou uma ideia essencial para poder analisar o papel dos signos e das representações no conhecimento em geral. Mas, os modelos propostos são inadequados em relação a tudo o que podemos observar sobre o funcionamento e o desenvolvimento da atividade matemática (DUVAL, 2011, p. 36).

Nesse contexto verificamos que os modelos descritos acima são considerados limitados por Duval (2011), pois não são voltados para a aprendizagem em matemática. É importante ressaltar que a teoria de Duval (2003, 2009, 2011, 2012) é voltada para a aprendizagem em matemática, diferente dos outros três modelos citados onde a aprendizagem não é o foco. A semiótica não é um campo exclusivo da matemática, é um campo bem mais abrangente relativo à linguagem. Nesse sentido, como a matemática é um tipo de linguagem, a relação existente entre matemática e semiótica é algo inevitável.

Atualmente, estudiosos da didática da matemática evidenciaram o papel da semiótica no ensino e na aprendizagem da matemática. Raymond Duval é um entre muitos que realizaram investigações muito específicas e articuladas nesse campo. Foi ele que elaborou a Teoria dos Registros de Representação Semiótica com o objetivo de compreender como ocorre o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, conforme abordamos em nossa pesquisa.

Nessa pesquisa abordamos os Registros de Representação Semiótica baseados na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval. Raymond Duval é um pesquisador francês, filósofo e psicólogo de formação, desenvolveu pesquisas em psicologia cognitiva no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática em Estrasburgo, na

França, entre 1970 e 1995, seus estudos oferecem contribuições importantes para a Educação Matemática. Em suas pesquisas trata principalmente da análise do funcionamento cognitivo, dando ênfase à atividade matemática e aos problemas de tal aprendizagem (DUVAL, 2011).

Em seu vasto acervo de livros, artigos, entrevistas e pesquisas destaca-se sua obra de 1995 que apresenta a primeira versão sistematizada da Teoria dos Registros de Representação Semiótica: *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, traduzido como: Semioses e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Esse livro é destinado tanto para pesquisadores de diferentes disciplinas que trabalham com atividades cognitivas, como professores de francês ou de matemática.

Tal teoria aborda a importância da utilização de diferentes registros semióticos ao desenvolver uma atividade matemática, pois a utilização de diferentes registros associada a um mesmo objeto matemático e ocorrida a coordenação entre eles evidencia a possibilidade de o estudante compreender o objeto matemático como um todo.

Para Denardi (2019), a teoria de Duval expressa que o conhecimento matemático só pode ser transformado em saber quando ocorre a mobilização de diferentes registros semióticos relacionada a um mesmo objeto matemático.

De acordo com Nunomura (2021, p. 39) essa teoria “caracteriza-se como um estudo de abordagem cognitiva que se volta para a análise da importância dos Registros de Representação Semiótica para a aprendizagem de matemática”.

Almeida, Silva e Veronez (2021) explicam que a teoria de Duval se deu a partir de um enfoque interpretativo das teorizações de Charles Sander Peirce, em que as representações semióticas “são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação que tem suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento” (ALMEIDA; SILVA; VERONEZ, 2021, p. 10).

2.2 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO

De acordo com Duval (2009, p. 29) “não é possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento sem se recorrer à noção de representação. [...] Porque não há conhecimento que não possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação”.

Para fazer alusão a um conceito matemático, temos que usar representações, levando em conta que não existem “coisas” para serem exibidas de maneira presencial.

Logo, a conceituação precisa necessariamente passar por registros representativos que, por vários motivos, principalmente se não de caráter linguístico, não podem ser unívocos: portanto, em matemática, não há acesso sensível (visão, tato,...) diretamente aos “objetos”, mas apenas a suas representações semióticas em diversos registros discursivos e não discursivos (D’AMORE; PINILLA; IORI, 2015, p. 133).

Damm (2000) destaca também que na matemática não existe conhecimento que não seja mobilizado por uma pessoa, sem o uso de uma representação. Para estudar a aquisição de conhecimentos matemáticos, é preciso recorrer a noção de representação.

Em matemática toda a comunicação se estabelece com base em representações, os objetos a serem estudados são conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem expressar diferentes situações, portanto para seu ensino precisamos levar em consideração as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático (DAMM, 2000, p. 135).

De acordo com Duval (2003), é importante diferenciar o objeto matemático de sua representação para compreender um conceito matemático. Para ele os objetos matemáticos não são objetos diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos e o acesso a esses objetos matemáticos acontece por meio da utilização de uma representação. Duval (2012, p. 268) exemplifica:

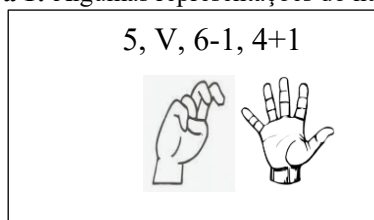
Uma escrita, uma notação, um símbolo representam um objeto matemático: um número, uma função, um vetor... Do mesmo modo, os traçados e figuras representam objetos matemáticos: um segmento, um ponto, um círculo. Isso quer dizer que os objetos matemáticos não devem ser jamais confundidos com a representação que se faz dele.

Nessa mesma linha de pensamento, Damm (2000, p. 137) exemplifica:

Neste caso as representações através de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos, desenhos, são bastante significativas pois permitem a comunicação entre o sujeito e as atividades cognitivas do pensamento, permitindo registros de representação diferentes de um mesmo objeto matemático.

Assim, é necessário voltar a atenção para a diferença entre o objeto matemático e sua representação, pois é fácil confundi-los. É importante ressaltar que o objeto representado não pode ser identificado com o conteúdo da representação, conteúdo esse que o torna acessível. Duval et al. (2011) diz que o conteúdo de uma representação depende mais do registro de representação do que do objeto representado.

Como exemplo utilizamos o numeral 5 ou a escrita cinco, que é a representação desse objeto matemático. Dentre as muitas possibilidades de representação simbólicas, icônicas e de língua escrita, é necessário que o estudante reconheça o cinco, em cada uma delas. A Figura 1, apresenta algumas representações do número 5:

Figura 1: Algumas representações do número 5

Fonte: As autoras (2022)

Os registros são sistemas cognitivamente produtores, ou mesmo “criadores”, de representações sempre novas. E a produção de novas representações permite descobrir novos objetos (DUVAL, 2011). Como exemplo temos as representações gráficas que permitem criar novos tipos de curvas.

Para Duval (2011, p. 23):

as representações são epistemologicamente ambivalentes, porque de um lado não se deve jamais confundi-las com os próprios objetos, mas de outro lado elas são por causa de sua diversidade, sempre necessárias para que se tenha acesso ao objeto. Pois, elas estão no lugar do objeto ou os evocam, quando esses não são necessariamente acessíveis.

De acordo com Vertuan (2007, p. 19) “uma representação é de fato uma ‘representação’ se exprimir ideias e se provocar na mente daqueles que o percebem uma atitude interpretativa”.

Duval (2009) apresenta as representações de três maneiras, sendo: representações mentais, representações internas ou computacionais e representações semióticas, que são definidas a seguir.

As representações mentais são todas as que permitem uma visão de objeto na ausência de todo significante perceptível, elas são geralmente identificadas às imagens mentais e cumprem a função de objetivação. Ou seja, “consistem num conjunto de imagens e concepções que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação ou sobre aquilo que está associado ao objeto ou a situação. Tais representações estão associadas à interiorização das representações externas” (VERTUAN, 2007, p. 19).

As representações internas ou computacionais segundo Duval (2009) são todas aquelas cujos significantes, de natureza homogênea, não requerem visão de objeto e que permitem uma transformação algorítmica de uma sucessão de significantes em uma outra. Nela, o sujeito acaba executando certas tarefas sem pensar em todos os passos necessários para a sua realização. São representações internas e não conscientes do sujeito. Um exemplo é o algoritmo das operações.

As representações semióticas, para Duval (2009), são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento.

Considerando nosso interesse na pesquisa pelas representações semióticas, a próxima seção é dedicada à sua compreensão.

2.3 REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

De acordo com Vertuan (2007) o termo “registros de representação semiótica” é usado para designar os diferentes tipos de representação semiótica. Como exemplo de tipos de diferentes registros de representação temos: as representações em língua natural, tabular, gráfica, figural e algébrica.

As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significados de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes (DUVAL, 2012, p. 269).

De acordo com Duval (2011, p. 52) “Trabalhamos apenas com as representações semióticas para transformá-las em outras”. Costa (2016, p. 32) também corrobora nesse sentido quando fala que “um sistema semiótico constitui um registro de representação semiótica se o mesmo possibilitar a produção de outras representações a partir de transformações realizadas na representação”.

É por isso que, em matemática, uma representação semiótica só é interessante à medida que ela pode transformar em outra representação [...]. Isso provoca evidentemente uma reversão completa do ponto de vista cognitivo comum sobre as representações e particularmente sobre as representações semióticas. [...] Se queremos descrever a maneira de trabalhar própria da matemática, são essas transformações de representações semióticas que precisamos analisar (DUVAL, 2011, p. 52).

Duval (2012, p. 296) destaca que “não é possível negligenciar ou descartar a língua natural no âmbito do ensino da matemática, pois ela é um registro tão fundamental quanto os outros registros [...]”. A língua natural, pode ser representada por meio do enunciado compreensível de um problema, pela fala clara do professor ao explicar o conteúdo, pela fala clara do estudante ao questionar algum ponto de explicação, pela abordagem utilizada pelo livro didático, ou ainda na resolução de um problema.

Em relação ao objeto matemático, D’Amore, Pirilla e Iori (2015, p. 131) dizem que “a única coisa que podemos fazer com os objetos matemáticos é descrevê-los, defini-los, denotá-los, denominá-lo, desenhá-los,..., isto é, fornecer representações semióticas”.

Nessa abordagem quanto mais diversificada for a representação de um objeto, maior é a compreensão sobre ele. Para Duval (2009), a utilização dessas diferentes representações semióticas contribui para uma reorganização do pensamento e influencia a atividade cognitiva do aluno. Sendo assim, as representações semióticas são essenciais para a compreensão dos conceitos matemáticos.

Em sua teoria, Duval (2009) apresenta dois termos relevantes para nosso estudo: *semiósis* e *noésis* e faz uma distinção entre eles, levando em consideração que as diferentes representações semióticas são necessárias para a compreensão dos conceitos matemáticos. Duval (2009) considera como *semiósis* a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e *noésis* os atos cognitivos como a apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência. Para ele não existe *noésis* sem *semiósis*, ou seja, não há como conceituar um objeto matemático sem utilizar diferentes representações desse objeto.

Vertuan (2007, p. 20) explica que:

para que a aprendizagem de um determinado conceito matemático possa acontecer, a *noésis* (conceitualização do objeto matemático) deve ocorrer por meio de significativas *semiósis* (representações). Isto implica em dizer que a compreensão em matemática acontece na medida em que o sujeito que aprende, consegue coordenar os vários registros de representação associados a um mesmo objeto matemático. Estabelecer coordenações entre os vários registros significa potencializar a compreensão deste objeto matemático.

Assim, para que aconteça a aprendizagem de um determinado conceito matemático *noésis* e *semiósis* caminham juntas. Para Vertuan (2007), a *noésis* (conceitualização do objeto matemático) deve ocorrer por meio de significativas *semiósis* (representações). Isso explicita que a compreensão em matemática acontece na medida em que o sujeito que aprende, apresenta diferentes representações semióticas, consegue coordenar os vários registros dessas representações associados a um mesmo objeto matemático.

Portanto, a aquisição de um conceito relacionado a um objeto matemático passa necessariamente pela aquisição de uma ou mais representações semióticas, e que não existe *noésis* sem *semiósis* [...] “não existe aprendizagem conceitual, algorítmica, estratégica ou comunicativa sem aprendizagem semiótica” (D’AMORE; PINILLA; IORI, 2015, p. 137).

Por sua vez, “a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação” (DUVAL, 2003, p. 14).

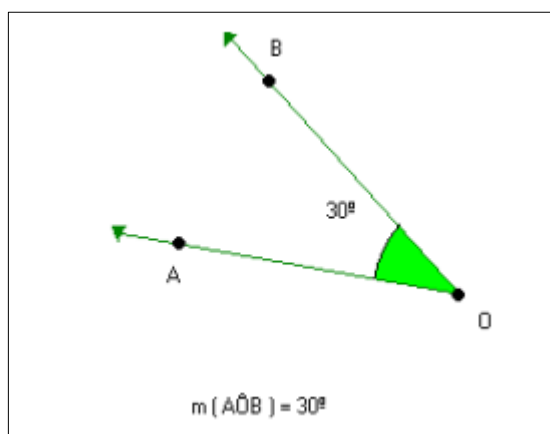
Para que um sistema de representação seja considerado um Registro de Representação Semiótica é necessário desenvolver três atividades cognitivas: 1- a formação de uma representação identificável; 2- o tratamento de um registro de representação; 3- a conversão de um registro de representação para outro (DUVAL, 2003).

A seguir, abordamos cada uma dessas três atividades cognitivas.

2.3.1 A Representação Identificável

A formação de uma representação identificável consiste em, a partir de um registro, identificar o objeto matemático representado, ou seja, uma representação é identificável quando reconhecemos na representação o objeto que ele representa, por exemplo: na Figura 2, com a representação do ângulo de 30° de forma figural e sua notação escrita.

Figura 2: Formação de uma representação identificável



Fonte: Júnior (s/d, p. 39)

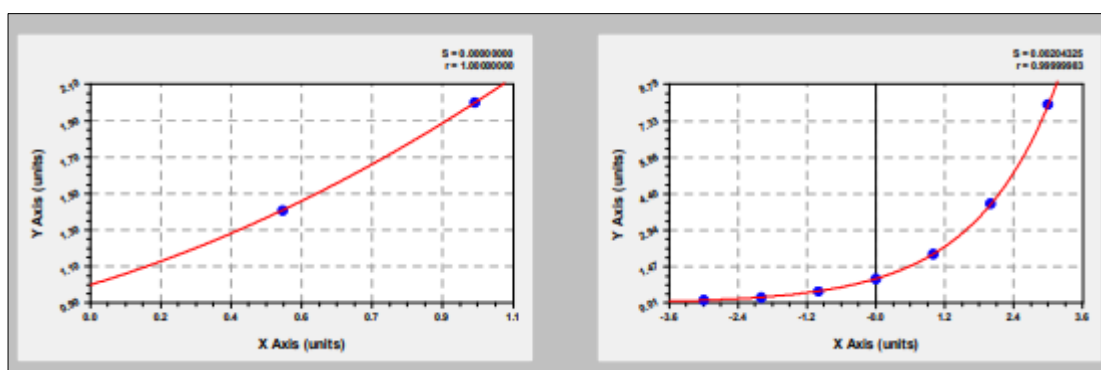
2.3.2 O Tratamento

O tratamento de uma representação é a transformação dessa representação no próprio registro em que ela foi formada, ou seja, o tratamento é uma transformação interna a um registro e está ligado à forma e não ao conteúdo do objeto matemático. De acordo com Duval (2009, p. 57):

Um tratamento é a transformação de uma representação obtida como dado inicial em uma representação considerada como terminal em relação a uma questão, a um problema ou a uma necessidade, os quais fornecem o critério de parada na série de transformações efetuadas.

Na Figura 3, apresentamos um exemplo de tratamento apresentado no registro gráfico. Os dois gráficos representam a função $y = 2^x$, a diferença ocorre na escala utilizada. Ao aumentar a escala, ocorre um tratamento dentro do mesmo sistema de representação, o gráfico.

Figura 3: Representação gráfica da função $y = 2^x$



Fonte: Rosa (2009, p. 24)

Para Duval (2009), a atividade matemática não pode se restringir somente ao tratamento, pois, para ele esse tipo de transformação não favorece a visualização de todos os diferentes aspectos do objeto matemático.

Esse tipo de transformação provavelmente seja o mais utilizado pelos professores nas aulas de matemática, pois esse tipo de transformação corresponde a procedimentos de justificação. Para Vertuan (2007, p. 23), “Na expectativa de que os alunos ‘compreendam’ determinados conceitos, o professor procura ‘o melhor registro’ do qual pode fazer uso para justificar uma ideia referente aquele conceito”.

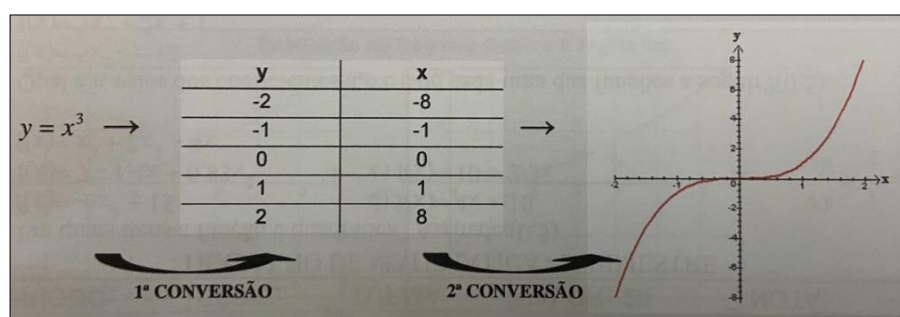
2.3.3 A Conversão

A conversão consiste na transformação de representação de um objeto matemático em uma representação em outro registro, a conversão é uma transformação externa ao registro de partida. Para Duval (2009, p. 58) “Converter é transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro”.

É preciso compreender que a conversão entre registros é uma atividade cognitiva diferente do tratamento. Mesmo Duval (2003) reconhecendo a importância do tratamento em atividades de matemática, enfatiza que é a conversão entre registros que constitui uma condição especial para a compreensão do objeto matemático. E que a compreensão em matemática está associada à atividade de conversão de ao menos dois registros de representação semiótica.

Na Figura 4, apresentamos um exemplo da ocorrência de duas conversões: a primeira delas é a transformação do registro algébrico para o tabular e a segunda é a transformação do registro tabular para o registro gráfico.

Figura 4: Exemplo de conversões entre Registros de Representação Semiótica



Fonte: Vertuan (2007, p. 24)

Duval (2009) observa que as conversões das representações semióticas são mais difíceis de serem realizadas pelos estudantes do que o tratamento:

Porém, numerosas observações em aula, assim como a análise dos resultados de investigações e de avaliações, e experiências de aprendizagem mostram que a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos (DUVAL, 2009, p. 63).

Para se aprofundar na análise cognitiva, Duval (2003) apresenta na realização da conversão a relação entre a natureza dos diferentes registros de representação semiótica. Nesse contexto, Duval classifica os registros de representação em multifuncionais e monofuncionais quanto à natureza e quanto as suas formas: discursiva e não discursiva.

Em relação a registros de saída e registros de chegada, Duval (2011) relata alguns fatores que podem influenciar a congruência de uma conversão, tais como a natureza da representação de saída e de chegada, que podem ser monofuncionais e cujos tratamentos são algoritmizáveis, ou multifuncionais, cujos tratamentos não são algoritmizáveis; a forma das representações que podem ser discursivas (sistema de escrita e cálculos) ou não discursivas (gráficos cartesianos). Nesse sentido, Duval (2003) apresenta uma classificação quanto à natureza dos registros de representação semiótica, de acordo com o Quadro 1.

Quadro 1: Classificação dos Registros de Representação Semiótica quanto à natureza

REGISTROS	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis	Língua natural: associações verbais (conceituais) Formas de relacionar: • argumentação a partir de observações, de crenças...; • dedução válida a partir de definições ou teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: os tratamentos são, principalmente, algoritmos	Sistemas de escritas: • numéricas (binária, decimal, fracionária...) • algébricas; • simbólicas (línguas formais); • cálculo.	Gráficos cartesianos: • mudança de sistema de coordenadas; • interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval (2003, p. 14)

Para Duval (2003), a conversão pode ser mais complexa ou menos complexa dependendo da natureza dos registros envolvidos. Para o autor, menos complexa em se tratando de registros de mesma natureza (ambos multifuncionais ou ambos monofuncionais) e mais complexa em se tratando de registros de naturezas distintas (um multifuncional e outro monofuncional).

2.4 A COORDENAÇÃO ENTRE REGISTROS

Duval (2011) destaca que a coordenação consiste em trabalhar com diferentes representações de um mesmo objeto matemático, salientando a importância de transitar entre os diferentes registros e entender que estes estão ligados a um mesmo objeto matemático. Ainda, considera que a mobilização e a coordenação de diferentes registros de representação são importantes para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com sua representação, mas que eles possam ser reconhecidos em cada uma delas.

Para Duval (2012, p. 284):

[...] o principal caminho das aprendizagens de base matemática não pode ser somente a automatização de certos tratamentos ou a compreensão de noções, mas deve ser a coordenação de diferentes registros de representação, necessariamente mobilizados por estes tratamentos ou esta compreensão. A coordenação de registros aparece como condição fundamental para todas as aprendizagens de base, ao menos nos domínios em que os únicos dados que são utilizados são as representações semióticas, como em matemática e em francês.

Duval (2003, p. 15) salienta que “[...] a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas”. Além da mobilização desses registros ele sinaliza a criatividade do aluno quando o mesmo consegue trocar a todo momento de registro de representação.

Partindo dessa consideração percebemos que mais importante do que realizar a conversão é a coordenação existente entre os registros, sempre enxergando nos diferentes registros o mesmo objeto matemático. Nesse sentido, também conseguimos identificar que enquanto a *semiósis* apresenta os vários registros de representação a um determinado conceito, a *noésis*, por sua vez busca a coordenação entre estes registros. Quanto mais simples para o aluno for esta coordenação, mais ele consegue diferenciar o objeto matemático de sua representação (VERTUAN, 2007, DUVAL, 2012).

É importante voltar a atenção para a necessidade de a coordenação acontecer não apenas quando são desenvolvidas conversões de um registro para outro, mas sim, compreender que todos os registros mobilizados correspondem ao mesmo objeto matemático. De acordo com Vertuan (2007, p. 28):

A coordenação não implica em realizar somente uma conversão do registro algébrico para o tabular e, em seguida, realizar uma conversão do registro tabular para o gráfico, por exemplo, mas compreender que todos esses registros dizem respeito ao mesmo objeto matemático e podem mesmo se complementar no sentido de que um registro pode expressar características ou propriedades do objeto matemático que não são expressas com clareza em outro registro.

Partindo da importância dos diferentes registros semióticos produzidos pelos estudantes, relacionados a um mesmo objeto matemático, para a aquisição do conhecimento, faz-se necessário que o professor em sua sala de aula crie possibilidade aos estudantes para que eles possam desenvolver esses diferentes registros e tenham a possibilidade de realizar a conversão e a coordenação entre eles.

Normalmente, o que acontece em sala de aula ao desenvolver atividades matemáticas é a formação de um registro e o tratamento deste, sem explorar outros registros que possam levar o aluno à conversão e à coordenação do mesmo, prestando atenção que todos esses registros e essas transformações são associadas a um mesmo objeto matemático. Vertuan (2007) também corrobora desse pensamento quando fala que o tratamento é a transformação mais utilizada pelos professores de matemática, pois essa transformação corresponde a procedimentos de justificação.

Nesse contexto, vislumbramos o Ensino por Investigação como uma abordagem possível para desenvolver diferentes tipos de tarefas que possibilitem aos estudantes o desenvolvimento de diferentes registros, dentre eles, o de representação semiótica.

3 DELINEAMENTO DA PESQUISA

Nesse capítulo abordamos sobre o Ensino por Investigação, com base em Ferruzzi, Borssoi e Silva (2021), Carvalho (2018), Sasseron (2015). Tal abordagem didática foi a opção para desenvolver as tarefas propostas em sala de aula com os estudantes. Em seguida elencamos os diferentes tipos de tarefas de acordo com Ponte (2005) e a descrição das tarefas que serão analisadas nesse trabalho, por fim, apresentamos o Produto Educacional que foi implementado em condições reais de ensino⁶.

3.1 ENSINO POR INVESTIGAÇÃO

De acordo com a definição de Carvalho (2018), compreende-se que o Ensino por Investigação não é uma abordagem referente ao ensino transmissivo expositivo, onde os estudantes são induzidos a ouvirem, copiarem e reproduzirem, pelo contrário, no Ensino por Investigação os estudantes são induzidos a desenvolverem capacidades de pensar, refletir, analisar e concluir. O autor ressalta a importância de o professor criar condições favoráveis em sala de aula para os estudantes pensarem, falarem, lerem e escreverem de modo a se expressarem de maneira autônoma e criativa.

Carvalho (2018) diz ainda que no Ensino por Investigação é desenvolvido um conhecimento científico, partindo do princípio que a aprendizagem de conceitos baseada em problemas permite aos estudantes uma mudança intelectual, pois nessa perspectiva ele participa de forma ativa do processo de construção do conhecimento.

Para Baptista (2010), no Ensino por Investigação, os estudantes são conduzidos por suas curiosidades, a aprendizagem é conduzida e controlada pelos estudantes ao resolver um problema ou compreender uma observação.

Os alunos começam a colocar questões sobre o que os intriga e surpreende, em seguida, relacionam os conteúdos com as estratégias para resolverem as questões colocadas. Deste modo, desenvolvem competências processuais que podem transpor para outros contextos. [...] O ensino por investigação permite a aprendizagem de conteúdos e a aplicação dos mesmos, relacionando-as com o fenômeno em estudo (BAPTISTA, 2010, p. 92).

⁶ As tarefas contidas no Produto Educacional foram implementadas em uma turma do 1º ano do Novo Ensino Médio de uma escola pública do interior do Estado do Paraná.

Para Sasseron (s/d), ao utilizar o Ensino por Investigação em sala de aula, o professor estimula uma busca de soluções e entendimento de uma nova perspectiva sobre o que está sendo estudado, despertando um raciocínio científico, lógico e objetivo e ao mesmo tempo criativo.

O ensino por investigação desse ponto de vista, não é uma estratégia de ensino, mas uma abordagem didática, pois pode congrega diversas estratégias, das mais inovadoras às mais tradicionais, desde que seja um ensino em que a participação dos estudantes não se restrinja a ouvir e copiar o que o professor propõe (SASSERON, s/d, p. 121).

Sasseron (2015) complementa que o Ensino por Investigação é uma abordagem didática, pois ele torna-se associado ao trabalho do professor e não apenas fica limitado a uma estratégia de ensino.

[...] o ensino por investigação configura-se como uma abordagem didática, podendo, portanto, estar vinculado a qualquer recurso de ensino desde que o processo de investigação seja colocado em prática e realizado pelos alunos a partir e por meio das orientações do professor (SASSERON, 2015, p. 58).

Ferruzzi, Borssoi e Silva (2021) compreendem o Ensino por Investigação “como uma abordagem didática em que o aluno é o sujeito ativo e que abarca diversas práticas pedagógicas que se iniciam com uma situação problemática para o aluno e gera atividade investigativa para sua resolução”.

Azevedo (2006) ressalta a importância de o professor desenvolver aulas na abordagem investigativa, pois, essa estrutura favorece a problematização do conteúdo a ser ensinado, fazendo com que o aluno interaja com o objeto de estudo durante toda a prática escolar.

Em nossa pesquisa abordamos o Ensino por Investigação no mesmo sentido, como uma abordagem didática (SASSERON, 2015; FERRUZZI; BORSSOI; SILVA, 2021) sendo o professor o responsável por criar condições favoráveis para que esse ensino aconteça de forma eficiente (CARVALHO, 2018).

Levamos em consonância também que a diversidade do Ensino por Investigação, enquanto abordagem didática, pode ser desenvolvida em diferentes componentes curriculares e em diferentes conteúdos: “o ensino por investigação extravasa o âmbito de uma metodologia de ensino apropriada apenas a certos conteúdos e temas, podendo ser colocada em prática nas mais distintas aulas, sob as mais diversas formas e para os diferentes conteúdos” (SASSERON, 2015, p. 58). Em específico, na nossa pesquisa, desenvolvemos o Ensino por Investigação nas aulas de matemática, com o conteúdo de matrizes.

3.1.1 O Papel do Professor no Ensino por Investigação

Na perspectiva de abordagem didática o papel do professor é de colocar em prática habilidades que ajudem os estudantes a resolver as situações problemáticas, interagindo com os colegas, com os materiais existentes, com os conhecimentos prévios que eles possuem. O professor deve também ressaltar a importância das pequenas ações desenvolvidas durante o trabalho, os pequenos erros manifestados pelos estudantes, as hipóteses originadas, as relações desenvolvidas, ou seja, é um trabalho desenvolvido em parceria entre professor e estudantes. “A grande mudança do papel do professor no Ensino por Investigação é ser o promotor de oportunidades para novas interações entre o aluno e o conhecimento” (SASSERON, s/d, p. 122).

Para Baptista (2010), o papel do professor na inclusão das aulas do Ensino por Investigação é bem diferente de um ensino tradicional, pois ele deve promover alterações na dinâmica da aula. O professor deve tomar decisões, correr riscos e quebrar a rotina de forma a enfrentar as dificuldades que aparecerem e seus dilemas.

É importante ressaltar que a partir do momento em que o professor decide desenvolver com seus estudantes problemas envolvendo o Ensino por Investigação, ele deve estar ciente das dificuldades de implementação

[...] assumir um novo papel na sala de aula; [...] promover diversas aprendizagens; fomentar o trabalho em grupo na sala de aula; desenvolver um trabalho de caráter investigativo, permitindo colocar questões sobre sua prática, recolher dados e analisá-los; gerir o tempo, uma vez que este tipo de actividade pode demorar mais tempo do que outra estratégia de ensino; orientar as questões colocadas pelos alunos; incluir este tipo de actividade na avaliação dos alunos; e lidar com os pais, directores das escolas e outros membros da comunidade, que não compreendem as linhas orientadoras do ensino por investigação (BAPTISTA, 2010, p. 109-110).

Para Sasseron (s/d, p. 122) “o professor no ensino por investigação é um inovador”. Nesse novo papel o professor será o caminho para os estudantes chegarem a novas interações e novos conhecimentos. Para isso faz-se necessário que o ambiente da sala de aula esteja propício a discussões e a apresentações de ideias, e o professor deve fomentar em suas aulas o surgimento e a discussão de ideias distintas e discordantes. Para tanto é importante que o professor esteja aberto para fazer perguntas e a ouvir as respostas dos estudantes. Colocar tudo isso em prática não é tarefa simples, deve-se para isso detalhar os objetivos a serem alcançados com clareza e estabelecer estratégias para permitir que isso aconteça.

3.1.2 O Papel do Aluno no Ensino por Investigação

De acordo com Sasseron (s/d), o Ensino por Investigação somente acontece efetivamente quando os estudantes estão engajados com a proposta de ensino, sendo sujeitos ativos em sua aprendizagem. São os estudantes que farão as discussões, interações entre eles, deles com o professor e deles com o material didático. Isso não quer dizer que os estudantes estejam totalmente motivados para participar de uma aula com essa abordagem, pois a investigação por si própria deve ser o fator que motiva a atenção pelo desafio proposto e as ações desempenhadas para a construção do conhecimento.

[...] podemos perceber que o ensino por investigação não insere modificações com relação às atividades que são levadas para a sala de aula: sua grande atenção e novidade estão voltadas para o modo como o professor trabalha com seus estudantes, sendo orientador do trabalho e colocando-os no papel de atores centrais de sua aprendizagem (SASSERON, s/d, p. 123).

Para tanto, Ferruzzi; Borssoi e Silva (2021) salientam que o ensino, para ser de cunho investigativo, requer que os estudantes aceitem o convite, ou seja, que “aceitem pesquisar com afinco, a testar conjecturas, procurar com atenção, indagar e buscar provas para suas descobertas” (FERRUZZI; BORSSOI; SILVA, 2021, p. 5). Conseqüentemente, para aceitar este convite o estudante deve estar propenso a isto, e a escolha do tema ou do problema a ser resolvido pode estar diretamente ligado a esta pré-disposição.

Ao desenvolver a prática investigativa, os estudantes não podem assumir um papel apenas de espectador, pelo contrário, devem “argumentar, agir, interferir, questionar, fazer da construção de seu conhecimento” (AZEVEDO, 2006, p. 25). Assumindo essa postura, diferente da usual, os estudantes poderão participar efetivamente da aquisição de seu conhecimento. Nesse sentido, o professor tem papel determinante para que o aluno não desanime, aceite o convite e participe ativamente da aula

E como incentivar os estudantes? Nesse momento, voltamos novamente para o papel do professor, onde o mesmo deve considerar o conhecimento prévio dos estudantes e valorizá-los, levando em consideração o que eles sabem para a situação proposta, ou seja, “a necessidade de apresentar a situação-problema e, por meio dela, verificar o que o estudante já sabe, possibilitando traçar estratégias para o desenvolvimento da aula de forma motivadora” (XAVIER, 2016, p. 18).

Para desenvolver com os estudantes aulas na perspectiva do Ensino por Investigação, resolvemos trabalhar diferentes tipos de tarefas, baseadas na classificação descrita por Ponte (2005).

3.2 DIFERENTES TIPOS DE TAREFAS

Para desenvolver o Ensino por Investigação em sala de aula com os estudantes, selecionamos diferentes tipos de tarefas, abordaremos e classificaremos essas diferentes tarefas de acordo com alguns pesquisadores (PONTE, 2005, 2014; PONTE; QUARESMA; BRANCO, 2012).

De acordo com Ponte (2005), não existe apenas uma única tarefa, há uma diversidade de tarefas que podem ser propostas aos estudantes “As tarefas podem ser de muitos tipos, umas mais desafiantes outras mais acessíveis, umas mais abertas outras mais fechadas, umas referentes a contextos da realidade outras formuladas em termos puramente matemáticos” (PONTE, 2005, p. 1). Alguns exemplos de tarefas conhecidos: exercícios, problemas, investigações, atividades de exploração e projetos. Em especial, em nossa pesquisa abordaremos tarefas de investigações e atividades de exploração. Levando em conta que diferentes tipos de tarefas são apropriados para o desenvolvimento do aluno:

Uma estratégia de ensino envolve diferentes tipos de tarefas, articuladas entre si. Um único tipo de tarefa dificilmente atingirá todos os objetivos curriculares valorizados pelo professor. Por isso, usualmente ele procura variar as tarefas, escolhendo-as em função dos acontecimentos e da resposta que vai obtendo do aluno (PONTE, 2005, p. 1).

Nosso entendimento quanto à tarefa vem ao encontro com o exposto por Ponte (2005) que fala que a tarefa é realizada quando é envolvida uma atividade, ou seja, a tarefa é o objeto da atividade. A tarefa pode surgir ou ser elaborada de diversas maneiras, pode ser formulada pelo professor e proposta ao estudante, partir da iniciativa do estudante e resultar de uma discussão entre professor e estudante. A tarefa também pode ser proposta com o enunciado logo no início do trabalho ou ir sendo construída. É importante apresentar tarefas que suscitem atividades por parte dos estudantes. “Não basta, no entanto, selecionar boas tarefas é preciso ter atenção ao modo de as propor e de conduzir a sua realização na sala de aula” (PONTE, 2005, p. 2).

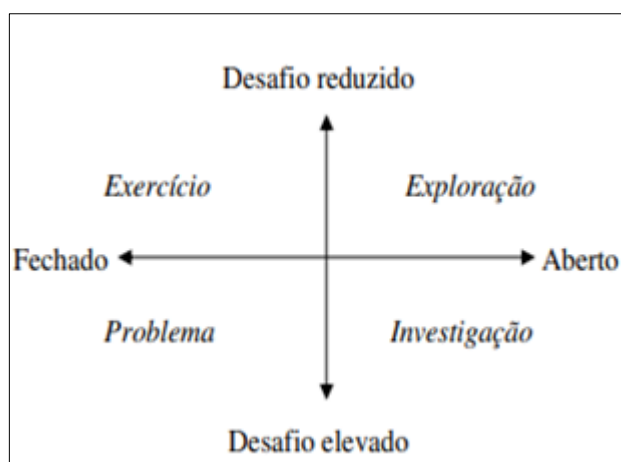
Em nossa pesquisa caracterizamos as tarefas que serão desenvolvidas com os estudantes de acordo com 3 esquemas organizadores apresentados nas Figuras 6, 7 e 8, dos diferentes tipos de tarefas proposto por Ponte (2005).

A Figura 6 mostra a relação entre diversos tipos de tarefas, em termos de seu grau de desafio matemático e de abertura. Segundo Ponte (2005), o grau de desafio matemático varia com os polos de desafios reduzido e elevado, que relaciona-se com a percepção das dificuldades de uma questão e constitui uma dimensão usada para guardar as questões que se propõem aos

estudantes; já o grau de estrutura da tarefa varia entre os polos abertos e fechados, uma tarefa é fechada onde claramente é dito o que é dado e o que é pedido, e uma tarefa é considerada aberta quando comporta um grau de indeterminação significativo no que é pedido, no que é dado, ou em ambas as coisas.

Cruzando essas duas dimensões (grau de desafio matemático e abertura), obtém-se os quatro quadrantes mostrado na Figura 5.

Figura 5: Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos de seu grau de desafio e de abertura



Fonte: Ponte (2005)

Ainda de acordo com a Figura 5 e baseado em Ponte (2005), o autor situa os tipos de tarefas apresentadas:

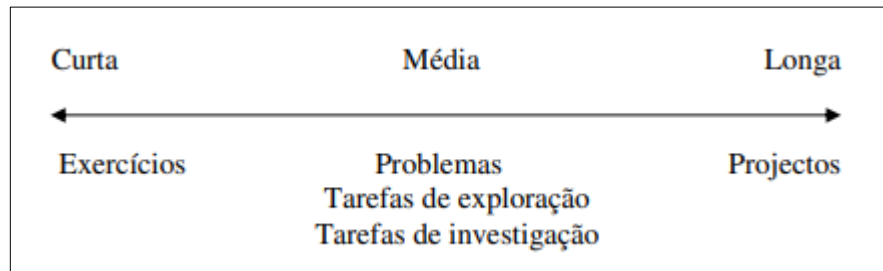
- 1- Exercício: é uma tarefa fechada e de desafio reduzido (2º quadrante);
- 2- Problema: é uma tarefa fechada, mas com elevado desafio (3º quadrante);
- 3- Investigação: é uma tarefa com um grau de desafio elevado, mas é uma tarefa aberta (4º quadrante);
- 4- Exploração: é uma tarefa aberta, mas de nível fácil (1º quadrante).

Baseado em Ponte (2005), a diferença da tarefa de investigação e exploração está no grau de desafio de cada uma. Ainda, para ele, as tarefas de exploração e os exercícios podem ser correspondentes, dependendo do enunciado, conforme os conhecimentos prévios dos estudantes.

A Figura 6, mostra a classificação das tarefas de acordo com sua duração e seu contexto, baseado em Ponte (2005). As dimensões das tarefas referentes à duração e ao contexto são de grande importância. Em relação à duração, a realização de uma tarefa em matemática pode requerer poucos minutos, horas, ou demorar dias, semanas ou meses, a duração pode ser curta, média ou longa. O projeto é um exemplo de uma tarefa de longa duração, que contém

características de investigação. “As tarefas de longa duração podem ser mais ricas, permitindo aprendizagens profundas e interessantes, mas comportam um elevado risco dos alunos se dispersarem pelo caminho [...]” (PONTE, 2005, p. 9).

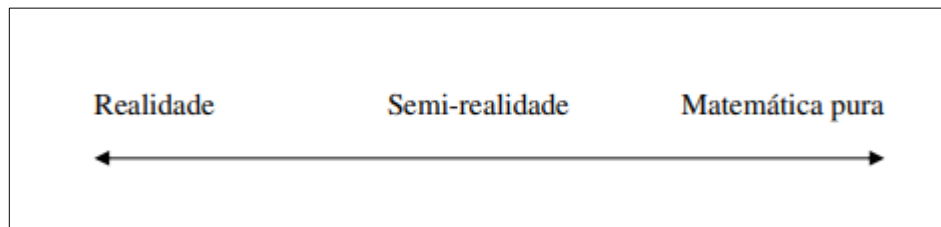
Figura 6: Diversos tipos de tarefa quanto à duração



Fonte: Ponte (2005)

A Figura 7 mostra a classificação de tarefas quanto ao seu contexto, segundo Duval (2005). Os pólos desse contexto são enquadrados como realidade, semi-realidade ou em tarefas formuladas em termos puramente matemáticos.

Figura 7: Diversos tipos de tarefas quanto ao contexto



Fonte: Duval (2005)

Skovsmose (2000) também fala que questões e atividades matemáticas podem se referir a matemática e somente a ela, mas, também é possível se referir a uma semi-realidade, ou seja, uma realidade construída, e, por fim, estudantes e professores podem trabalhar com tarefas com referências a situação da vida real.

Para Skovsmose (2000) os problemas e exercícios de matemática estão no contexto de semi-realidade, pois embora estejam em causa de situações reais, para o estudante estas podem não significar grande coisa. Para Ponte (2005) as tarefas de modelagem se encontram no contexto de realidade, pois de um modo geral, esse tipo de tarefa possui uma natureza problemática e desafiante.

Como parte do delineamento de nossa pesquisa, procuramos caracterizar as tarefas implementadas com os estudantes de acordo com o referencial adotado e descrito nesta seção.

Assim, seis tarefas foram planejadas na perspectiva do Ensino por Investigação. Classificamos cada uma das tarefas, como mostra o Quadro 2 (grau de desafio, abertura, duração e contexto).

Quadro 2: Classificação de cada tarefa de acordo com grau, abertura, duração e contexto

	Grau de desafio	Grau de abertura	Duração	Contexto
Tarefa 1	Elevado	Fechado	Média	Semi-realidade
Tarefa 2	Elevado	Fechado	Média	Semi-relaidade
Tarefa 3	Elevado	Aberto	Média	Realidade
Tarefa 4	Elevado	Fechado	Curta	Semi-realidade
Tarefa 5	Elevado	Fechado	Média	Semi-realidade
Tarefa 6	Elevado	Fechado	Média	Realidade

Fonte: As autoras (2022)

No Quadro 3 indicamos a classificação das tarefas quanto ao tipo.

Quadro 3: Classificação do tipo de tarefa

Tarefas	Tipo de Tarefa
Tarefa 1	Problema
Tarefa 2	Problema
Tarefa 3	Investigação
Tarefa 4	Problema
Tarefa 5	Problema
Tarefa 6	Problema

Fonte: As autoras (2022)

Tais tarefas integram o Produto Educacional vinculado à pesquisa e são apresentadas nas seções 3.3 e 3.4.

3.3 DESCRIÇÃO DAS TAREFAS

Neste trabalho, apresentamos a descrição de três tarefas, a Tarefa 1 (floricultura), a Tarefa 3 (redes sociais) e a Tarefa 5 (confeção de mochilas), que foram implementadas e que são analisadas, faremos também a classificação de cada uma delas de acordo com os diferentes tipos de tarefas de Ponte (2005).

Parte das tarefas foram adaptadas das propostas no RCO+Aulas, como é o caso da Tarefa da floricultura e da Tarefa da confeção de mochilas. Decidimos fazer algumas

adaptações nas tarefas com o intuito de proporcionar aos estudantes, com o desenvolvimento das mesmas, a oportunidade de fazerem a relação de diferentes registros semióticos a um mesmo objeto matemático. Levando em conta o que Ponte et al. (2013) dizem: que no Ensino por Investigação o professor deve selecionar cada tarefa de acordo com o objetivo definido para cada aula.

3.3.1 Descrição da Tarefa 1 - Floricultura

A Tarefa 1 foi inspirada no material disponibilizado no RCO+Aulas, em específico do slide número 19⁷, que aborda o conteúdo adição e subtração de matrizes II. A escolha dessa tarefa (Figura 9) emergiu levando em consideração o potencial que a pergunta da tarefa propicia, pois por meio dele, desenvolvendo a tarefa em uma abordagem de Ensino por Investigação, os estudantes poderiam ser capazes de fazer uma investigação e chegarem sozinhos em como realizar a adição e subtração de matrizes, por meio de “testar conjectura, buscar generalizações e demonstrar resultados matemáticos obtidos a partir de conjecturas válidas para casos específicos” (FERRUZZI; BORSSOI; SILVA, 2021, p. 1).

Na Figura 8, trazemos a tarefa como estava proposta no material disponibilizado aos professores.

Figura 8: Tarefa proposta no RCO+Aulas

Praticando 1

O dono de uma rede de floriculturas mantém registrado cada tipo de ornamento vendido em três de suas lojas, para controlar a compra de suprimentos sem precisar manter um estoque elevado.

As tabelas abaixo mostram as vendas em duas semanas.

Semana 1	Loja 1	Loja 2	Loja 3	Semana 2	Loja 1	Loja 2	Loja 3
Arranjo	120	290	230	Arranjo	90	270	98
Cesta	49	40	37	Cesta	76	44	53
Buquê	130	89	77	Buquê	123	76	90

Escreva as matrizes correspondentes a cada semana e calcule o total e a diferença nas vendas de cada tipo de ornamento em cada loja nas duas semanas.

Fonte: <https://youtu.be/2Oc-A7czU04>

⁷ Disponível em: <https://youtu.be/2Oc-A7czU04>. Acessado em 03/10/2022.


Para desenvolver essa tarefa com os estudantes, fizemos algumas adaptações com a finalidade de desenvolvê-la na abordagem didática do Ensino por Investigação e com o intuito de proporcionar aos estudantes uma diversidade de registros semióticos. Na Figura 9, trazemos a tarefa com as adaptações feitas.

Figura 9: Tarefa adaptada do material disponibilizado no RCO+Aulas, slide número 19

TAREFA 1

A dona de uma rede de floricultura mantém registrado cada ornamento vendido em suas três lojas, para controlar a compra de suprimentos sem precisar manter um estoque elevado. Em duas semanas, ele anotou as seguintes vendas em seu caderno:

- 1ª semana: loja 1 → vendeu 120 arranjos; 49 cestas e 130 buquês; loja 2: vendeu 290 arranjos, 40 cestas e 89 buquês; loja 3: vendeu 230 arranjos, 37 cestas e 77 buquês.
- 2ª semana: loja 1 → vendeu 90 arranjos, 76 cestas e 123 buquês; loja 2: 270 arranjos, 44 cestas e 76 buquês; loja 3: vendeu 98 arranjos, 53 cestas e 90 buquês.



Calcule o total e a diferença de vendas de cada ornamento, em cada loja, nas duas semanas. O que você concluiu com os resultados encontrados?

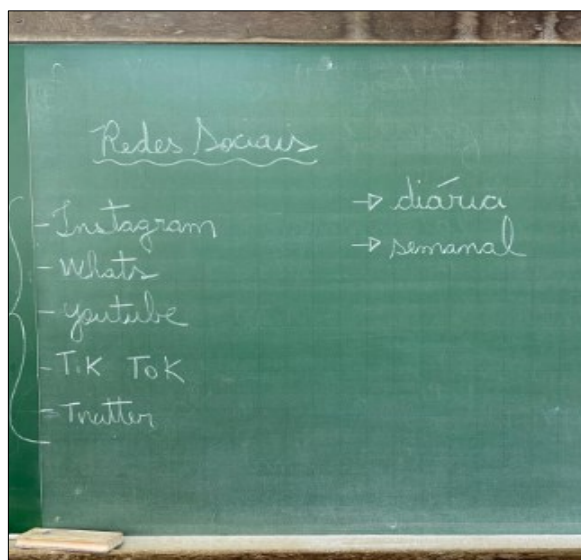
Fonte: As autoras (2022)

Em relação a essa tarefa, baseada na Figura 5, de Ponte (2005), classificamos esse tipo de tarefa como problema. Considerando em termo de grau ser um desafio elevado, pois é por meio dela que os estudantes poderão construir o conceito de adição e subtração de matrizes; em relação a abertura, consideramos fechado, pois ela apresenta uma resposta, onde cada grupo ficará à vontade para resolver a tarefa utilizando conceitos que acharem necessários. Em relação à duração da tarefa, Ponte (2005), Figura 6, classificamos como média, levando em conta que problemas se enquadram na duração média; e de acordo com o contexto referente a Figura 7, é uma tarefa de semi-realidade pois constitui duas dimensões: realidade e matemática pura. Para Skovsmose (2003) há ainda um terceiro contexto, que de alguma forma é intermediário, designado como semi-realidade.

3.3.2 Descrição da Tarefa 3 – Redes Sociais

A Tarefa 3, emergiu de uma conversa em sala com os estudantes. Foi perguntado aos estudantes quais as redes sociais eles mais utilizavam, levando em consideração que todos os estudantes da sala possuem celular e possuem redes sociais. O resultado falado pelos estudantes foi: *Instagram, WhatsApp, Youtube, Tik Tok e Twitter*, conforme anotado na lousa, Figura 10. Os estudantes foram questionados quanto ao uso do Facebook e responderam que “*Facebook é coisa do passado*”. Os estudantes levantaram a questão que algumas marcas de celulares possuem o relatório semanal do uso dessas redes sociais e outras trazem o uso diário, dessa forma foi construído junto com os estudantes a situação que eles iriam trabalhar.

Figura 10: Redes sociais utilizadas pelos estudantes



Fonte: Arquivo da professora (2022)

A partir da situação descrita na Figura 11, a professora entregou para cada grupo a Tarefa 3, em que deveria elaborar um problema e resolver em casa, baseado na situação levantada, como uma atividade extraclasse. Os estudantes tiveram três semanas para desenvolver essa tarefa. Durante essas três semanas, eles poderiam fazer perguntas, trocar ideias com a professora, trocar ideia com outros grupos.

Figura 11: Tarefa 3



TAREFA 3

De acordo com a pesquisa feita em sala de aula pela professora com a ajuda dos alunos, foram levantados quais redes sociais são mais utilizadas pelos mesmos: Instagram, Whats App, Youtube, Tik Tok e Twitter. A partir disso, e, levando em consideração que todos os alunos possuem celular e possuem acesso a quantidade diária e semanal de uso dessas redes sociais, **elaborem um problema** (um por grupo) utilizando o conteúdo que estamos estudando juntamente com os dados descritos acima.

Fonte: As autoras (2022)

A Tarefa 3 é classificada como uma tarefa de investigação, pois de acordo com Ponte (2005), Figura 5, ela possui, em termos de grau, ser um desafio elevado, em relação a abertura, consideramos aberto, pois cada grupo deverá escrever um problema e resolvê-lo. De acordo com Ponte, Branco e Quaresma (2012), as tarefas de investigação “servem principalmente para promover o desenvolvimento de novos conceitos e para aprender novas representações e procedimentos matemáticos” (p. 2). Dessa forma, não podemos prever qual será o problema, a questão levantada por cada grupo e conseqüentemente não podemos prever as respostas. Ficará a cargo de cada grupo realizar uma investigação sobre a situação proposta.

3.3.3 Descrição da Tarefa 5 - Confecção de mochilas

A Tarefa 5, foi inspirada no material disponibilizado no RCO+Aulas, em específico do slide número 22⁸, que aborda o conteúdo multiplicação de matrizes II. A escolha dessa tarefa, Figura 12, emergiu levando em consideração ser a primeira tarefa disponibilizada nos slides para a apresentação de multiplicação de matrizes. A partir disso, fizemos algumas adaptações.

⁸ Disponível em: <https://youtu.be/KxLPzUJtt6o>. Acessado em 03/10/2022.

Na Figura 12, trazemos a tarefa como estava proposta no material disponibilizado aos professores.

Figura 12: Tarefa proposta no RCO+Aulas

Praticando 1

Uma fábrica de mochilas utiliza três **tamanhos** de zíper na confecção de dois modelos de mochilas, conforme indicado no quadro a seguir.

	Modelo X	Modelo Y
Pequeno	4	2
Médio	2	3
Grande	1	2

Essa fábrica recebeu a seguinte **encomenda** para o último trimestre do ano.

	Outubro	Novembro	Dezembro
Mochila X	50	100	200
Mochila Y	50	150	100

Calcule o produto **T.E** e responda: quantos zíperes de tamanho médio serão necessários para confeccionar as mochilas encomendadas no mês de novembro?

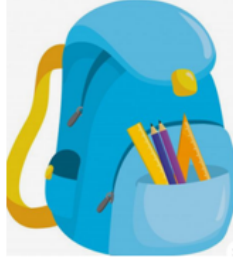
Fonte: <https://youtu.be/KxLPzUJtt6o>

Para desenvolver essa tarefa com os estudantes, fizemos algumas adaptações, tanto no enunciado como na questão, com a finalidade de desenvolvê-la na abordagem didática do Ensino por Investigação, proporcionando aos estudantes momentos que poderiam ser capazes de fazer uma investigação e chegarem sozinhos em como calcular a multiplicação de matrizes, por meio de “testar conjectura, buscar generalizações e demonstrar resultados matemáticos obtidos a partir de conjecturas válidas para casos específicos” (FERRUZZI; BORSSOI; SILVA, 2021, p. 1). Além disso, as adaptações realizadas propiciam o desenvolvimento de diferentes registros semióticos.

Na Figura 13, trazemos a tarefa com as adaptações feitas.

Figura 13: Tarefa adaptada do material disponibilizado no RCO+Aulas, slide número 19

TAREFA 5



Uma fábrica de mochilas utiliza três tamanhos de zíperes: pequeno, médio e grande; na confecção de dois modelos de mochilas: modelo X e modelo Y. Na fabricação do modelo X são utilizados 4 zíperes pequenos, 2 médios e 1 grande; na fabricação do modelo Y são utilizados 2 zíperes pequenos, 3 médios e 2 grandes. Essa fábrica recebeu a seguinte encomenda de mochilas para o último trimestre do ano: modelo X, 50 para outubro, 100 para novembro e 200 para dezembro; modelo Y, 50 para outubro, 150 para novembro e 100 para dezembro. Com base nessas informações, qual a quantidade de cada tamanho de zíperes necessários para a confecção das mochilas em cada mês?

Fonte: As autoras (2022)

A Tarefa 5, Figura 13, baseados em Ponte (2005), foi classificada como problema. Considerando em termo de grau ser um desafio elevado, pois é por meio dela tanto do enunciado como da questão que os estudantes poderão construir o conceito de multiplicação de matrizes; em relação a abertura, consideramos fechado, cada grupo ficará à vontade para resolver a tarefa utilizando conceitos que acharem necessários, mas a resposta será apenas uma. Em relação à duração da tarefa, classificamos como média, levando em conta que problemas se enquadram na duração média; e de acordo com o contexto é uma tarefa de semi-realidade pois constitui duas dimensões: realidade e matemática pura. Para Skovsmose (2003) há ainda um terceiro contexto, que de alguma forma é intermediário, designado como semi-realidade.

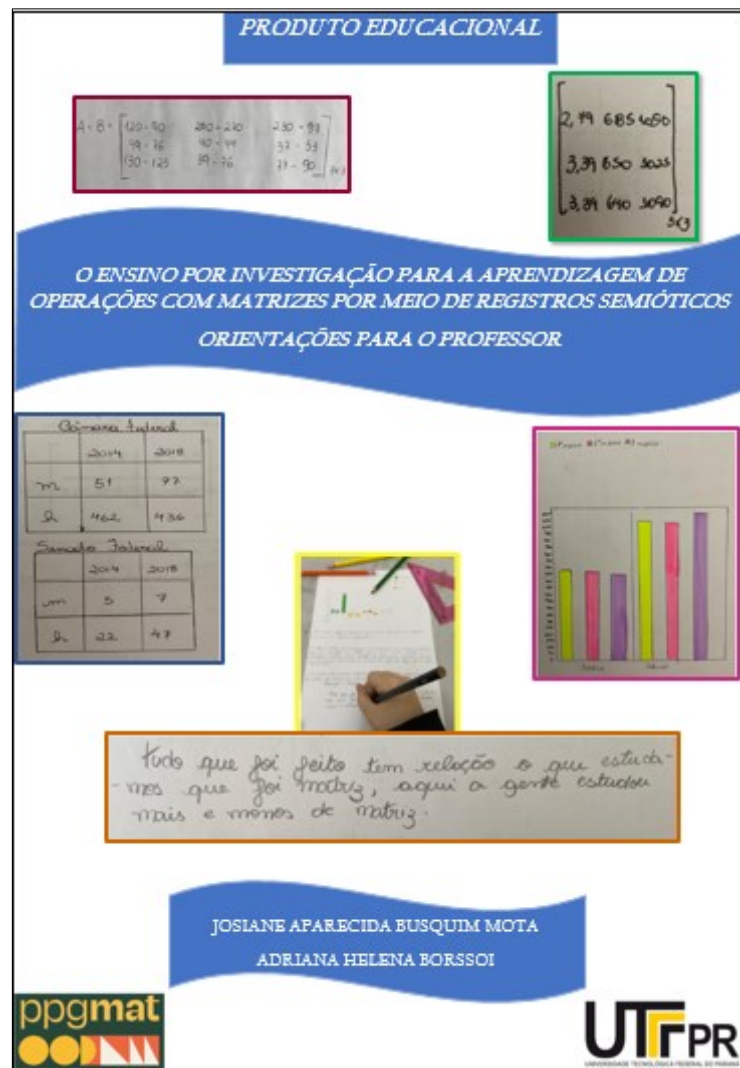
3.4 PRODUTO EDUCACIONAL

O Produto Educacional surgiu a partir de uma conversa informal na sala dos professores da escola onde a professora pesquisadora trabalha. Era no horário de hora-atividade e outra professora de matemática que estava fazendo hora-atividade na mesma sala com a professora pesquisadora perguntou como andava o Mestrado. A professora pesquisadora então relatou do andamento da coleta de dados, e brevemente mencionou a teoria da pesquisa, a abordagem didática utilizada e as tarefas a serem desenvolvidas com os estudantes. Após, a professora perguntou o que seria esses registros semióticos? A professora pesquisadora então respondeu e a partir desse momento foram surgindo outras perguntas, como: o que é um objeto matemático? O que seria o Ensino por Investigação? Por que trabalhar com diferentes tarefas, não são todas iguais? Por que que adaptar as tarefas propostas no RCO+Aulas?

A partir desses questionamentos, a professora pesquisadora achou relevante estruturar um Produto Educacional não apenas com as tarefas desenvolvidas, mas sim explicando de uma maneira direta e simples como trabalhar com as tarefas e com isso quais os objetivos da pesquisa desenvolvida.

Dessa forma, almejamos como Produto Educacional um caderno de instruções para o professor desenvolver diferentes tipos de tarefas na abordagem didática do Ensino por Investigação, ressaltando a importância dos registros de representação semiótica para a aprendizagem do estudante. O objetivo com esse Produto é que o professor leia, entenda e sintase motivado a trabalhar nessa perspectiva. No contexto de nossa pesquisa, utilizamos o material disponibilizado pelo Estado do Paraná, no entanto, as orientações buscam mostrar que é possível realizar adaptações de outros materiais, como livros didáticos, por exemplo. A Figura 14 traz a capa do Produto Educacional.

Figura 14: Capa do Produto Educacional



Fonte: As autoras (2022)

4 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Nesse capítulo abordamos sobre o contexto em que a pesquisa foi desenvolvida, os sujeitos da pesquisa, o ambiente educacional em que a implementação do Produto Educacional se deu, os dados da pesquisa, bem como sobre os procedimentos para análise dos dados.

4.1 O CONTEXTO E OS SUJEITOS DA PESQUISA

Optamos por desenvolver a pesquisa associada à prática profissional da pesquisadora, assim, denominaremos de professora pesquisadora a autora desta pesquisa, cujos dados foram obtidos durante o desenvolvimento de seu estágio de docência.

A professora pesquisadora é formada em Licenciatura em Ciências com Habilitação em Matemática desde o ano de 2002. É professora concursada do Estado do Paraná há 18 anos na disciplina de matemática, anteriormente foi professora por três anos do Ensino Fundamental I- Anos iniciais. Atualmente, atua no Ensino Médio 2º ano e no Novo Ensino Médio, 1º ano, mas já atuou também no Ensino Fundamental II - Anos finais.

Assim, a pesquisa se desenvolveu em um Colégio Estadual da cidade de Londrina-PR, responsável pela oferta do Ensino Fundamental II, Ensino Médio, Novo Ensino Médio, Ensino Técnico e Ensino Profissional. No período matutino funcionam 13 turmas, sendo 2 turmas de 9º ano, 3 turmas do 1º ano do Novo Ensino Médio, 1 turma de 1º ano do Novo Ensino Médio Técnico, 3 turmas de 2º ano do Ensino Médio e 4 turmas do 3º ano do Ensino Médio. No período vespertino funcionam 14 turmas, sendo 4 turmas de 6º anos, 4 turmas de 7º anos, 4 turmas de 8º anos e 2 turmas de 9º anos. No período noturno, funcionam duas turmas de Ensino Profissional.

O Novo Ensino Médio é uma proposta nova que vem para substituir o Ensino Médio. A Lei nº 13.415/2017 alterou a Lei de Diretrizes e Bases e estabeleceu uma mudança na estrutura do Ensino Médio, uma das principais mudanças foi a alteração da carga horária do estudante na escola de 800 horas para 1000 horas anuais até 2022, foi uma implantação gradativa no país. Outra mudança significativa foi uma nova organização curricular. De acordo com a Lei nº 13.415/2017 a mudança tem como objetivo garantir a oferta de educação de qualidade para todos os jovens, aproximando a escola com a realidade dos estudantes de hoje, contemplando as novas demandas e complexidades do mundo do trabalho e da vida em sociedade.

A proposta traz várias mudanças e tem causado controvérsias na comunidade educacional, de acordo com Jacomini (2022):

Esse foi o contexto de uma reforma educacional de enormes proporções feito pelo alto, sem a participação das comunidades escolares e acadêmicas e da população de modo geral, mas com importante participação dos representantes do capital por meio de institutos, fundações e associações privadas (JACOMINI, 2022, p. 267).

Jacomini (2022) ainda ressalta que essa reforma implica em um rebaixamento do acesso ao conhecimento aos jovens brasileiros da classe pobre que frequentam as escolas públicas, diferente das escolas das elites e classes médias que não permitirão a simplificação curricular nessas instituições.

Nessa direção, escolhemos desenvolver nossa pesquisa no NEM levando em consideração ser algo novo, desafiador e assim poder trazer reflexões sobre a prática docente ao trabalhar nesse novo cenário, que está sendo implantado.

A partir de 2017, com a publicação da Lei Federal n.º 13.415, são estabelecidas novas premissas para a oferta do Ensino Médio, dentre essas a reorganização curricular. Alinhada a isso, a Base Nacional Curricular Comum (BNCC) é um documento que traz um conjunto de orientações para a re(elaboração) dos currículos de referência das escolas de rede pública e privada de todo Brasil. A BNCC traz os conhecimentos essenciais, as competências, habilidades e aprendizagens pretendidas para crianças e jovens em cada etapa da Educação Básica.

No estado do Paraná, esse processo contou com a elaboração do Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná, homologado pela Resolução n.º 3.416/2021 – GS/SEED. O Referencial Curricular, tem como principal objetivo orientar e subsidiar as redes e instituições escolares na elaboração de suas propostas pedagógicas curriculares. Pressupondo o desenvolvimento de competências e habilidades, esse documento considera a nova organização curricular do Ensino Médio, que visa a formação integral dos estudantes.

Com vistas a orientar e apoiar no desenvolvimento da proposta pedagógica curricular das instituições de ensino, foi elaborado o Currículo para o Ensino Médio da Rede Estadual do Paraná. Nesta perspectiva, o referido documento está organizado por áreas do conhecimento, a saber:

- Linguagens e suas tecnologias;
- Matemática e suas tecnologias;
- Ciências da Natureza e suas tecnologias;
- Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

A organização de cada uma das áreas ocorre por meio dos componentes curriculares que as constituem; seus respectivos objetos de conhecimento; considerando como princípios organizadores a interdisciplinaridade e a contextualização.

A turma que participou da pesquisa era de 1º ano do NEM, estudava no período matutino e era composta, inicialmente, por 25 estudantes, no entanto, foram integrados à turma mais 5 estudantes no decorrer do primeiro trimestre letivo, devido a uma necessidade interna do colégio de trocar alguns estudantes de turma, dessa forma após a chegada de 5 estudantes novos, a turma passou a ser composta por 30 estudantes.

Antes de iniciarmos a coleta de dados ocorreu uma conversa com os estudantes sobre a pesquisa a ser realizada, quando foi feito o convite para eles, se aceitariam ou não participarem da pesquisa. Pois, de acordo com Ferruzzi, Borssoi e Silva (2021), para o ensino ser de cunho investigativo, é necessário que os estudantes aceitem o convite. “Para aceitar o convite, o aluno deve estar pré-disposto a isto e o interesse pelo tema ou pelo problema a ser resolvido pode auxiliar na predisposição e conseqüentemente no aceite ao convite” (FERRUZZI, BORSSOI E SILVA, 2021, p. 3). Assim que os estudantes aceitaram a participar da pesquisa, começamos a desenvolver as tarefas e a coletar os dados.

A coleta de dados da pesquisa ocorreu no 1º semestre letivo de 2022, no período de abril a junho de 2022, no componente curricular de Matemática e suas Tecnologias; objeto de conhecimento Matrizes; e possibilidades de conteúdo Operações com matrizes. O conteúdo de matrizes, a partir da implantação do NEM, passou a fazer parte da matriz curricular do 1º ano, prevista para ser trabalhada no 1º trimestre letivo.

A professora pesquisadora era a professora regente da turma e trabalhava com o Livro Registro de Classe Online⁹ (LRCO) disponibilizado pelo Estado. Dentro desse documento está contido o RCO+Aulas, que é um módulo de planejamento que está disponível no LRCO. Nele, o professor encontra planos de aulas específicos para suas disciplinas e séries para as quais leciona, com sugestões pedagógicas e encaminhamentos metodológicos. A utilização desse material não é obrigatória, mas sim se apresenta como uma opção a mais, assim como o livro didático, para o professor trabalhar com os estudantes. É um material produzido de acordo com o currículo proposto para o NEM.

⁹ Livro de Registro de Classe Online - LRCO - documento eletrônico disponibilizado pelo Estado do Paraná para o registro online de presenças, conteúdos/planejamentos e avaliações dos estudantes matriculados em qualquer escola pública do Paraná, instituído pela resolução Nº 3550/2022 GS/SEED.

Os planos de aula são organizados por tema, conteúdo, conhecimentos prévios e objetivos. Eles também se dividem por trimestre e contemplam, além dos conteúdos essenciais, informações e atividades complementares. Na ferramenta on-line é possível encontrar links para videoaulas, slides e listas de exercícios, que podem ser editadas ou complementadas por materiais da preferência do professor.

Três aulas antes do início da coleta de dados, havia sido começado a trabalhar com estudantes o conteúdo de matrizes onde foi abordado o conceito de matrizes, representação genérica de uma matriz e tipos de matrizes, conforme proposto nas aulas de números 16¹⁰ e 17¹¹ do LRCO.

Para não comprometer o andamento das aulas, seguindo o planejamento proposto no LRCO, a professora desenvolveu algumas tarefas propostas no LRCO fazendo algumas adaptações metodológicas adequadas à perspectiva do Ensino por Investigação.

Foram desenvolvidas seis tarefas que fazem parte da pesquisa, tarefas essas diversificadas, sendo duas tarefas com o conteúdo adição e subtração de matrizes, uma tarefa aberta que ficou a cargo de cada grupo, uma tarefa com a multiplicação de um número real por uma matriz e duas tarefas com multiplicação de matrizes.

Todas as tarefas foram desenvolvidas em grupos. Para as três primeiras tarefas a turma, com 25 estudantes, foi organizada em 5 grupos de 5 estudantes, no entanto, para as outras três tarefas os grupos tiveram acréscimo de um integrante cada, como mostra o Quadro 4.

Para nos referirmos aos grupos utilizaremos a codificação: G1 (grupo 1), G2 (grupo 2), G3 (grupo 3), G4 (grupo 4) e G5 (grupo 5), em relação aos estudantes serão utilizados nomes fictícios, onde cada estudante escolheu seu próprio nome em uma conversa informal na sala de aula. No quadro 4, está a organização dos grupos feitos pelos estudantes com seus respectivos nomes.

Quadro 4: Organização dos grupos

Grupo	Estudantes
G1	Jéssica; Bete; João; Bruna; Laila; Milena.
G2	Elena; Livia; Paulo; Bruno; Gustavo; Enzo
G3	Eloisa; Carla; Maria; Jorge; Sofia; Bela.
G4	Pedro; Ana; Mara; Pietra; Jade; Nicolas.
G5	Carina; Melissa; Julia; Lorena; Sofia; Rosa.

Fonte: As autoras (2022)

¹⁰ Disponível em: https://youtu.be/oP_t_M9Ebmw Acessado em: 03/10/2022

¹¹ Disponível em: <https://youtu.be/l6XSQ1p0cgY> Acessado em: 03/10/2022

De início os grupos foram formados de maneira livre, a professora deixou que os estudantes organizassem os grupos, dessa forma os grupos foram formados de acordo com a afinidade entre os estudantes. Após a chegada de mais cinco estudantes a professora colocou cada novo estudante em um determinado grupo de forma aleatória. O último estudante de cada grupo, indicado no Quadro 4 foi o novo integrante.

Nesse trabalho analisamos as produções escritas e os excertos de dois grupos: o G5 e o G1. Escolhemos primeiramente em analisar as produções do G5 pois foi o único grupo que na primeira Tarefa (floricultura) conseguiu desenvolvê-la diretamente fazendo a relação com matrizes, dessa forma achamos interessante analisá-la primeiro para depois fazer a análise do G1. Escolhemos esses dois grupos pois apresentaram os áudios completos de todas as tarefas, respondendo-as de forma organizada.

As tarefas que foram escolhidas para análise são três: Tarefa 1 (floricultura), Tarefa 3 (redes sociais) e Tarefa 5 (confecção de mochilas).

A Tarefa 1 (floricultura) foi escolhida por ter sido a primeira a ser desenvolvida por meio do Ensino por Investigação e por propiciar chegar ao objeto matemático, adição e subtração de matrizes.

A Tarefa 2 (redes sociais), foi escolhida por ser uma tarefa aberta e que foi formulada com a ajuda dos estudantes, ou seja, a tarefa surgiu a partir do interesse comum entre os estudantes.

A Tarefa 3 (confecção de mochilas) foi escolhida por ser a primeira a introduzir a multiplicação de matrizes. É uma tarefa que juntamente com a adaptação realizada e o Ensino por Investigação propicia ao estudante chegar ao objeto matemático em questão.

Com essas tarefas, gostaríamos de evidenciar a importância de, a partir de uma tarefa, poder fazer adaptações para que a mesma crie potencialidades para que o estudante consiga diferentes registros relacionados ao mesmo objeto matemático, pois, de acordo com Duval (2011), a utilização de diferentes registros relacionados a um mesmo objeto matemático e ocorrida a coordenação entre eles evidencia a aprendizagem do estudante.

Os dados da pesquisa são registros escritos dos estudantes e transcrições dos áudios com as conversas dos estudantes por grupo, no desenvolvimento das tarefas propostas. Os áudios foram gravados por um integrante de cada grupo com o uso do próprio aparelho celular. Assim, cada grupo tinha um estudante responsável por encaminhar os áudios para a professora pesquisadora ao final de cada aula correspondente ao desenvolvimento das tarefas. Assim, os instrumentos de coleta de dados foram: aparelho celular dos estudantes, tanto para gravar os

áudios como para encaminhá-los via aplicativo de *WattsApp*¹², bem como o aparelho celular da professora pesquisadora, que foi usado o gravador e usado também para digitalizar os registros escritos dos estudantes.

As tarefas relativas a operações com matrizes foram planejadas de modo que os estudantes pudessem expressar diferentes registros semióticos para o objeto matemático de cada tarefa proposta, como indica o Quadro 5.

Quadro 5: Objeto matemático referente a cada Tarefa

Tarefa	Objeto Matemático
1	Adição e subtração de matrizes
2	Adição e subtração de matrizes
3	A ser definido por cada grupo
4	Multiplicação de um número real por uma matriz
5	Multiplicação de matrizes
6	Multiplicação de matrizes

Fonte: As autoras (2022)

Santos (2011, p. 15) alega que “A escolha das matrizes como tema é muito oportuna, justamente pela variedade de representações que estão envolvidas” quando se almeja investigar sobre a TRRS.

4.2 PROCEDIMENTOS PARA ANÁLISE DOS DADOS

Nesta seção abordaremos sobre a metodologia de análise da pesquisa. Optamos pela pesquisa qualitativa de cunho interpretativo, explicaremos porque fizemos essa escolha no decorrer desse tópico.

Para orientar nossas análises, focamos o interesse em: *evidenciar os diferentes registros semióticos, a ocorrência do tratamento, conversão e coordenação entre registros quando os estudantes desenvolvem diferentes tipos de tarefas envolvendo operações com matrizes; analisar a ocorrência da aprendizagem, segundo Duval (2003), quando estudantes do 1º ano do NEM desenvolvem diferentes tipos de tarefas na perspectiva do Ensino por Investigação envolvendo operações com matrizes.*

¹² *WattsApp* é um aplicativo multiplataforma de mensagens instantâneas e chamadas de voz para smartphones. Além de mensagens de texto, os usuários podem enviar mensagens, vídeos e documentos em pdf, além de fazer ligações grátis por meio de uma conexão com a internet. Disponível em: https://www.whatsapp.com/?lang=pt_br Acessado em: 03/10/2022.

Ao analisar a aprendizagem dos estudantes baseada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica a partir de tarefas desenvolvidas pelo Ensino por Investigação abordando o conteúdo operação com matrizes, optamos pela pesquisa qualitativa de cunho interpretativo, baseado em Bogdan e Biklen (1994). Segundo os autores, uma investigação qualitativa contempla “uma metodologia de investigação que enfatiza a descrição, a indução, a teoria fundamentada e o estudo das percepções pessoais” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 11). Ainda segundo os autores, esse tipo de pesquisa na área educacional é cada vez maior.

Bogdan e Biklen (1994) apresentam cinco características que consideram importantes para desenvolver uma pesquisa qualitativa, que apresentaremos a seguir e, comentaremos cada uma delas, fazendo uma relação com a nossa pesquisa.

1- Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal: nessa primeira característica em relação à pesquisa em educação, os investigadores despendem bastante tempo nas escolas, famílias, bairros e outros locais tentando elucidar questões educativas. Alguns investigadores utilizam instrumentos de áudios e vídeos, outros apenas utilizam um bloco de apontamento e um lápis. Embora quando se utiliza de equipamentos, os dados são recolhidos em situação e complementados pela informação que se obteve através do contato direto. Além de que os materiais registrados mecanicamente, devem ser revistos na sua totalidade pelo investigador, pois o entendimento que se tem deles é o instrumento chave de análise.

Em nossa pesquisa, o ambiente foi a sala de uma turma do 1º ano do Novo Ensino Médio. A investigadora, era a própria professora regente da turma, os instrumentos utilizados foram áudios, registros dos estudantes e registros da investigadora.

2- A investigação qualitativa é descritiva: Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números. Os resultados escritos das investigações contêm citações feitas com base para substanciar e ilustrar a apresentação. Os dados incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registros oficiais. Os investigadores qualitativos tentam analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando ao máximo, a forma como foram registrados ou transcritos. Ao recolher dados qualitativos, os investigadores abordam o mundo de forma minuciosa, que tudo tem potencial para construir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora no nosso objeto de estudo.

Em nossa pesquisa, os dados recolhidos foram em forma de palavras e imagens, advindos dos registros dos estudantes ou das transcrições que realizamos de todos os áudios,

bem como de fotos. Os dados coletados serão analisados qualitativamente, tomando o devido cuidado para fazê-lo de forma minuciosa e mais próximo da realidade possível.

3- Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos: A ênfase qualitativa tem sido muito útil, particularmente na investigação educacional, ao clarificar a “profecia auto-realizada” a ideia de que o desempenho dos estudantes é afetado pelas expectativas do professor. As técnicas quantitativas conseguiram demonstrar, recorrendo ao pré e pós-teste, que as mudanças se verificaram, no entanto, as estratégias qualitativas mostraram o modo como expectativas se traduzem nas atividades, procedimentos e interações diários.

Em nossa pesquisa, consideramos muito importante analisar os resultados apresentados pelos estudantes no desenvolvimento das tarefas propostas, mas a investigação durante o processo de desenvolvimento das tarefas pelos estudantes é nosso objeto de estudo para visando responder à questão de pesquisa.

4- Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva: Não recolhem dados ou provas com o objetivo de confirmar ou informar hipóteses construídas previamente; ao invés disso, as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos vão se agrupando. O investigador qualitativo planeja utilizar parte do estudo para perceber quais são as questões mais importantes. Não se presume que sabe o suficiente para reconhecer as questões importantes antes de efetuar a investigação.

Em nossa pesquisa, pretendemos analisar os registros de representação semiótica feitos pelos estudantes em tarefas desenvolvidas no Ensino por Investigação.

5- O significado é de importância vital na abordagem qualitativa: Os investigadores qualitativos em educação questionam continuamente os sujeitos de investigação, com o objetivo de perceber aquilo que eles experimentam, o modo como eles interpretam as suas experiências e o modo próprio como eles estruturam o mundo social em que vivem.

Em nossa pesquisa, analisaremos a produção dos estudantes feitas em grupos, com o objetivo de verificar se ocorreu a aprendizagem do conceito em questão, e se os grupos conseguiram entender as relações entre os diferentes registros apresentados com o objeto de estudo.

Em relação à pesquisa de cunho interpretativo, nos apoiamos em Moreira (2011, p. 51), para o qual:

A análise interpretativa dos dados gera asserções de conhecimento, as quais são publicadas pelo pesquisador sob a forma de um relatório ou artigo de pesquisa. [...] Suas asserções dependem de sua interpretação só terão validade para o leitor (que pode ser um colega pesquisador, um professor, um administrador, o próprio sujeito da pesquisa) na medida em que este concorda com essa interpretação.

Nesse sentido, Moreira (2011) define o papel do investigador interpretativo, onde observa cautelosamente de dentro do ambiente pesquisado, anotando com cuidado tudo que acontece nesse ambiente ao coletar os dados, com o objetivo de realizar o relato sem generalização com sutileza em relação a particularidade de cada grupo pesquisado

Escolhemos a partir desses apontamentos esse tipo de pesquisa, pois as características apresentadas vão ao encontro com as nossas intenções.

A implementação ocorreu no período de abril a junho de 2022, conforme especificado no Quadro 6. Para esse trabalho serão apresentadas e feitas análises de três tarefas desenvolvidas, que são a Tarefa 1 (floricultura), a Tarefa 3 (redes sociais) e a Tarefa 5 (confecção de mochilas).

Quadro 6: Cronograma de desenvolvimento das tarefas propostas nessa pesquisa

Data	Ação	Duração	Nome da tarefa
19/04/2022 (2 aulas) 25/04/2022 (1 aula) 26/04/2022 (1 aula)	Desenvolvimento da Tarefa 1 pelos estudantes	4 aulas	Floricultura
03/05/2022 (2 aulas) 09/05/2022 (1 aula)	Desenvolvimento da Tarefa 2 pelos estudantes	3 aulas	Mulheres na política
Atividade extraclasse (entregue dia 16/05)	Desenvolvimento da Tarefa 3 pelos estudantes	3 semanas	Redes sociais
17/05/2022 (2 aulas) 23/05/2022 (1 aulas)	Desenvolvimento da tarefa 4 pelos estudantes	3 aulas	Marcas de leite
14/06/2022 (2 aulas) 20/06/2022 (1 aulas) 21/06/2022 (1 aula)	Desenvolvimento da Tarefa 5 pelos estudantes	4 aulas	Confecção de mochilas
21/06/2022 (2 aulas) 27/06/2022 (1 aula) 28/06/2022 (1 aula)	Desenvolvimento da Tarefa 6 pelos estudantes	4 aulas	Pedágio

Fonte: As autoras (2022)

No próximo capítulo, serão feitas as análises da Tarefa 1 (floricultura), da Tarefa 3 (redes sociais) e da Tarefa 5 (confecção de mochilas), de dois grupos. Os grupos escolhidos foram o G1 e o G5, pois além de mandarem os áudios completos de todas as aulas, os áudios estavam em bom estado para ouvir e realizar a transcrição, pois devido à quantidade de estudantes na sala e o tamanho pequeno da sala, os grupos ficavam muito próximos, dessa maneira nem todos os áudios coletados ficaram com o som bom.

5 ANÁLISE DOS DADOS

Nesse capítulo, trazemos a análise de três tarefas, a partir dos registros de dois grupos, com o intuito de buscar *evidenciar indícios de aprendizagem dos estudantes baseada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica sobre operações com matrizes em tarefas desenvolvidas na perspectiva do Ensino por Investigação*.

O capítulo está organizado com a análise de três tarefas desenvolvidas, a Tarefa 1 (floricultura, Figura 10), a Tarefa 3 (redes sociais, Figura 12), e a Tarefa 5 (confecção de mochilas, Figura 14) para cada Tarefa primeiro está a análise do grupo 5 (G5) e depois a análise do grupo 1 (G1).

O G5, é formado pelos estudantes Carina; Melissa; Julia; Lorena; Sofia e Rosa, nessa tarefa o grupo possuía os cinco primeiros participantes.

O grupo 1 (G1) é formado pelos estudantes Jéssica, Bete, João, Bruna, Laila, Milena, nessa tarefa o grupo possuía os cinco primeiros participantes.

5.1 ANÁLISE DA TAREFA 1 - FLORICULTURA


A Tarefa 1 (floricultura), Figura 15, foi desenvolvida em abril de 2022, teve duração de quatro aulas, com os estudantes organizados em 5 grupos, conforme explicado na seção 3.3.1.

Figura 15: Tarefa 1 (floricultura)

TAREFA 1

A dona de uma rede de floricultura mantém registrado cada ornamento vendido em suas três lojas, para controlar a compra de suprimentos sem precisar manter um estoque elevado. Em duas semanas, ele anotou as seguintes vendas em seu caderno:

- 1ª semana: loja 1 → vendeu 120 arranjos; 49 cestas e 130 buquês; loja 2: vendeu 290 arranjos, 40 cestas e 89 buquês; loja 3: vendeu 230 arranjos, 37 cestas e 77 buquês.
- 2ª semana: loja 1 → vendeu 90 arranjos, 76 cestas e 123 buquês; loja 2: 270 arranjos, 44 cestas e 76 buquês; loja 3: vendeu 98 arranjos, 53 cestas e 90 buquês.



FLOWER SHOP

Calcule o total e a diferença de vendas de cada ornamento, em cada loja, nas duas semanas. O que você concluiu com os resultados encontrados?

Fonte: As autoras (2022)

De início, ainda com a sala disposta com os estudantes em fileiras, a professora explicou sobre o desenvolvimento da pesquisa, a importância da pesquisa para a professora e para os estudantes e assim realizou o convite para todos, ressaltando que eles devem estar interessados em resolver as tarefas propostas com afinco e dedicação. Os estudantes aceitaram o convite e a partir disso deu-se início à coleta de dados para a pesquisa.

Em seguida, os estudantes fizeram as separações dos grupos, conforme Figura 16 e a professora distribuiu para cada grupo uma folha com o enunciado da Tarefa 1.

Figura 16: Estudantes divididos em 5 grupos



Fonte: Arquivo da professora (2022)

Assim que foi entregue a folha para cada grupo, todos os grupos perguntaram “o que era pra fazer”, mesmo a professora já tendo explicado toda a pesquisa e eles já terem aceito o convite em participar. Nesse questionamento a professora respondeu para a sala toda:

Professora: Cada grupo vai resolver a tarefa conforme achar melhor, fiquem à vontade, consulte seus amigos de grupo, conversem, troquem ideias, leiam o enunciado e a questão da tarefa com atenção.

Jorge: Mas, professora, o que eu vou usar?

Professora: O conceito, a conta, o que você achar melhor para resolver a tarefa, leiam e conversem entre vocês, discutam, troquem ideias.

Para analisar a Tarefa 1, de início escolhemos o grupo 5 (G5), pois foi o único que começou a desenvolver a tarefa de imediato, utilizando o conceito estudado de matrizes, também levamos em conta que esse grupo mandou os áudios completos das conversas das quatro aulas para a professora, que foi o tempo para desenvolver a tarefa.

Em seguida, escolhemos o grupo 1 (G1), que foi um grupo que também mandou os áudios das quatro aulas completos e que desenvolveu a tarefa de uma maneira diferente do G5, desenvolveu em duas etapas.

5.1.1 Análise da Tarefa 1 (floricultura) do G5

O G5, é formado pelos estudantes Carina; Melissa; Julia; Lorena; Sofia e Rosa, nessa tarefa o grupo possuía os cinco primeiros participantes.

O grupo iniciou a tarefa com a aluna Lorena fazendo a leitura da tarefa. Após a leitura, de acordo com a transcrição, a Melissa levantou o questionamento que eles poderiam montar uma tabela com os valores para ficar mais fácil, conforme excertos:

Lorena: Vai anotando os valores para fazer uma tabela, fazer a tabela fica mais fácil.

Melissa: Isso, fazer a tabela para ficar mais fácil.

Lorena: Dá pra fazer a tabela da semana 1, vai fazendo da semana 1.

Carina: Só tem uma semana, gente?

Lorena: Não, tem duas, organiza lado a lado a semana 1 e 2.

De acordo com o excerto podemos inferir que os estudantes ao lerem a tarefa fizeram a primeira conversão entre os registros, passando do registro de língua natural, ou seja, do enunciado da tarefa para o registro tabular, organizando os números da tarefa em quadros. Indicamos em nossos estudos como conversão 1, de acordo com a Figura 17:

Figura 17: Conversão 1, Tarefa 1 (floricultura), G5

1ª semana			
	L1	L2	L3
arranjos	120	290	230
cestas	49	40	37
buques	130	89	77

2ª semana			
	L1	L2	L3
arranjos	90	270	98
cestas	76	44	53
buques	123	76	90

Fonte: Registro do G5 (2022)

Na conversão 1, o registro de partida, que foi o enunciado do problema, Figura 15, gerou pelo grupo a tabela que foi o registro de chegada, Figura 17, ou seja, o grupo partiu de uma representação discursiva multifuncional e foi para o registro monofuncional de

representação discursiva, o que para Duval (2003) é mais complexo do que converter registros de mesma natureza.

Após a primeira conversão, esse grupo foi o único que fez, nesse momento, a relação da tarefa com o objeto matemático, de acordo com os excertos:

Lorena: A professora falou que a gente pode fazer como quiser.

Melissa: Tá, mas a gente pode fazer como matriz, o que a gente tá aprendendo, olha a tabela.

Lorena: Tá, vamos fazer como matriz.

Melissa: Eu vou colocar como A e B, sendo A a matriz da primeira semana e B a matriz da segunda semana.

Carina: É o negócio 3 por 3? Todos vão ser 3 por 3? É só colocar e fazer?

Melissa: Isso, faz isso.

A professora havia trabalhado com a introdução de matrizes antes de propor a tarefa, e os estudantes fizeram a relação da tabela com a matriz e então continuaram a desenvolver a tarefa utilizando o conceito aprendido anteriormente. Ou seja, fizeram a conversão 2 que foi do registro tabular para o registro matricial.

Nessa conversão, o registro de partida que foi a tabela gerou pelo grupo o registro de chegada que foi o registro matricial, Figura 18. Nesse caso, a natureza dos dois registros de representação é a mesma, registro monofuncional, de representação discursiva, ou seja, possuem a mesma natureza e a mesma forma. Para Duval (2003), esse tipo de conversão é considerada como menos complexa.

Figura 18: Conversão 2, Tarefa 1 (floricultura), G5

$$A = \begin{matrix} 1^\circ \\ \begin{bmatrix} 120 & 290 & 230 \\ 49 & 40 & 37 \\ 130 & 89 & 77 \end{bmatrix} \end{matrix}_{3 \times 3}$$

$$B = \begin{matrix} 2^\circ \\ \begin{bmatrix} 90 & 290 & 98 \\ 76 & 44 & 53 \\ 123 & 76 & 90 \end{bmatrix} \end{matrix}_{3 \times 3}$$

Fonte: Registro do G5 (2022)

Na continuação, a estudante Lorena entendeu que, de acordo com a questão da tarefa, era para fazer a adição e a subtração das matrizes, representadas como A e B. De acordo com a Figura 18, a matriz A é referente à 1ª semana de vendas e a matriz B é referente à 2ª semana de vendas. Essa mesma estudante chegou à conclusão que para realizar as operações de adição e

subtração das matrizes era para adicionar e subtrair cada elemento correspondente em cada matriz, ou seja, adicionar e subtrair arranjos, cestas e buquês de cada loja, conforme excerto:

Melissa: Professora, professora... professora e agora?

Professora: E agora o quê?

Melissa: O que a gente faz?

Professora: Leiam a questão da tarefa, o que ela pede? O que vocês entendem da questão?

Lorena: Agora temos que somar e diminuir esses números.

Melissa: Por quê fazer isso?

Lorena: Para responder à questão, olha aqui, total e diferença, total e diferença de cada coisa.

Professora: Isso, agora continuem, pensem, troquem ideias.

Carina: Mas como?

Lorena: Acho que soma cada valor com cada valor, assim ó: arranjo da loja 1 daqui (daqui representa a primeira semana) mais o arranjo da loja 1 daqui (daqui representa a segunda semana) e assim vai, entendeu?

Carina: Acho que sim. Professora, tá certo?

Professora: Vocês acham que faz sentido fazer a soma dessa forma, responde à questão?

Lorena: Faz sentido sim, pois 120 mais noventa é igual a 210, e esse número é o valor da soma das duas semanas dos arranjos da loja 1.

Professora: Então, podem continuar.

Percebemos com esse excerto que o grupo, por meio da investigação da questão da tarefa, conseguiu realizar a adição das duas matrizes. E para chegar a essa conclusão, utilizaram conjecturas e testaram, indicando como realizar a adição e a subtração de matrizes, característica do ensino de cunho investigativo.

Continuando a análise, de acordo com a Figura 19, o grupo realizou um tratamento, chamaremos de tratamento 1, que foi a organização da adição de cada elemento correspondente nas duas tabelas, ou seja, a adição dos arranjos da loja 1 na primeira e na segunda semana; a adição dos arranjos da loja 2 na primeira e na segunda semana; a adição dos arranjos da loja 3 na primeira e na segunda semana; a adição das cestas da loja 1 na primeira e na segunda semana; a adição das cestas da loja 2, na primeira e na segunda semana; a adição das cestas da loja 3, nas primeira e na segunda semana; e, por fim, a adição dos buques da loja 1 na primeira e na segunda semana; a adição dos buques da loja 2 na primeira e na segunda semana e a adição dos buques da loja 3 na primeira e na segunda semana. Segundo Duval (2003) o tratamento é uma atividade cognitiva baseada na mudança de registro sem que um novo sistema de representação seja criado. O G5 permaneceu no registro matricial.

Figura 19: Tratamento 1, Tarefa 1 (floricultura), G5

$$A+B = \begin{bmatrix} 120+90 & 290+270 & 230+98 \\ 49+76 & 40+44 & 37+53 \\ 130+123 & 89+76 & 77+90 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Fonte: Registro do G5 (2022)

Em seguida, o grupo realizou a adição de cada elemento correspondente entre as duas matrizes, ou seja, adicionaram o primeiro elemento da primeira linha da matriz A com o elemento correspondente da matriz B, depois adicionaram o segundo elemento da primeira linha da matriz A com o elemento correspondente da matriz B e assim por diante, realizando mais um tratamento, que chamaremos de tratamento 2, de acordo com a Figura 20.

Figura 20: Tratamento 2 e Conversão 3, Tarefa 1 (floricultura), G5

$$A+B = \begin{matrix} A \\ 1^\circ \quad 2^\circ \quad c \\ B \\ L_1 \quad L_2 \quad L_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 210 & 560 & 328 \\ 125 & 84 & 90 \\ 253 & 165 & 167 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

↳ Resultado da soma de arranjos da loja 1 nas 2 semanas

Fonte: Registro do G5 (2022)

Percebemos também na Figura 20, que o grupo fez um registro em língua natural, indicando o que significava o primeiro elemento da matriz A + B, nesse momento fizeram a conversão 3, onde passaram do registro matricial para o registro em língua natural.

Figura 21: Tratamento 3, Tarefa 1 (floricultura), G5

$$A-B = \begin{bmatrix} 120-90 & 290-270 & 230-98 \\ 49-76 & 40-44 & 37-53 \\ 130-125 & 89-76 & 77-90 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Fonte: Registro do G5 (2022)

Em seguida, como o grupo havia feito a soma das duas matrizes fizeram da mesma forma a subtração das duas matrizes, conforme Figura 21, fizeram a organização da subtração de cada elemento correspondente nas duas tabelas, ou seja, a subtração dos arranjos da loja 1,

2 e 3 de cada semana; a subtração das cestas das lojas 1, 2 e 3 de cada semana e a subtração dos buques das lojas 1, 2 e 3 de cada semana. Dessa maneira fizeram outro tratamento, o tratamento 3, pois segundo Duval (2003) tratamento são transformações que ocorrem dentro de um mesmo sistema de registro.

Na sequência o grupo realizou então a subtração, ocorreu assim o tratamento 4, Figura 22. Nesse momento ocorreu uma dúvida do grupo e chamaram a professora, de acordo com o excerto abaixo:

Lorena: Professora, tá errado!

Professora: Por quê?

Lorena: Tá dando número negativo, olha aqui!

Professora: Qual o problema?

Lorena: Não pode dar número negativo na matriz.

Professora: Por quê não pode?

Lorena: Não sei (risos dos integrantes do grupo)...

Professora: O que significa na matriz o número negativo que vocês encontraram? (Silêncio). Como vocês fizeram para chegar nesse número?

Melissa: A gente diminui cada coisa de cada loja das duas semanas.

Professora: E o que isso significa? O que representa? O que aconteceu com as vendas?

Melissa: Ah, as vendas? Diminuiu? Aumentou?

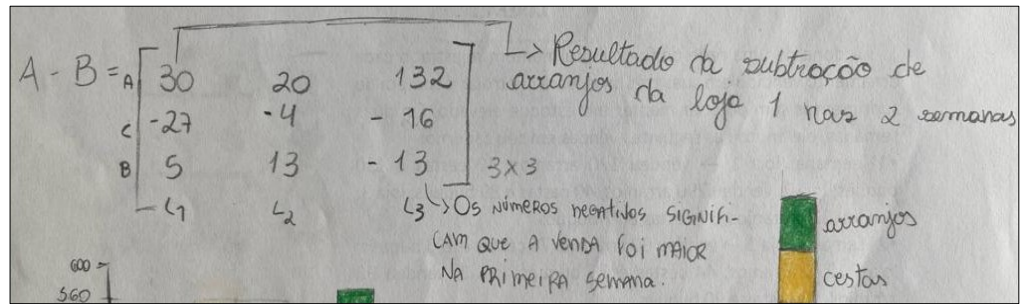
Professora: Compare os valores, observem.

Lorena: Humm... acho que entendi. Quando dá negativo, a venda da loja 2 foi maior que a venda da loja 1, olha aqui, a cesta da segunda semana da loja 2 é maior que a cesta da primeira semana da loja 1, é isso?

Professora: Isso mesmo, podem continuar.

Podemos perceber pelo excerto que o grupo identificou o significado do número negativo na matriz, revendo a ideia que o número negativo não poderia estar em uma matriz. O grupo também, fez uma conversão, a conversão 4, de acordo com a Figura 22. O grupo passou do registro matricial para a língua natural, explicando o significado do primeiro número da matriz $A - B$ e também escreveram o que significava o último número da matriz, que era um número negativo.

Figura 22: Tratamento 4 e Conversão 4, Tarefa 1 (floricultura), G5



Fonte: Registro do G5 (2022)

Após realizarem a adição e a subtração conforme a questão da tarefa, chamaram a professora, conforme excerto:

Melissa: Professora terminamos.

Professora: Terminaram? Entenderam? O que vocês entenderam?

Lorena: Fizemos a soma e a diminuição das duas matrizes, que deu esses valores.

Professora: O que são esses valores? Vocês me explicam?

Lorena: Ué, já falei, a matriz da soma é a soma de cada coisa de cada loja nas duas semanas.

Professora: Tá, mas a tarefa, a questão da tarefa era o quê?

Lorena: Ué, era pra fazer o que fizemos, ou tem mais coisa?

Professora: Os valores que vocês encontraram podem ser representados de outra forma? Como?

Carina: Como assim?

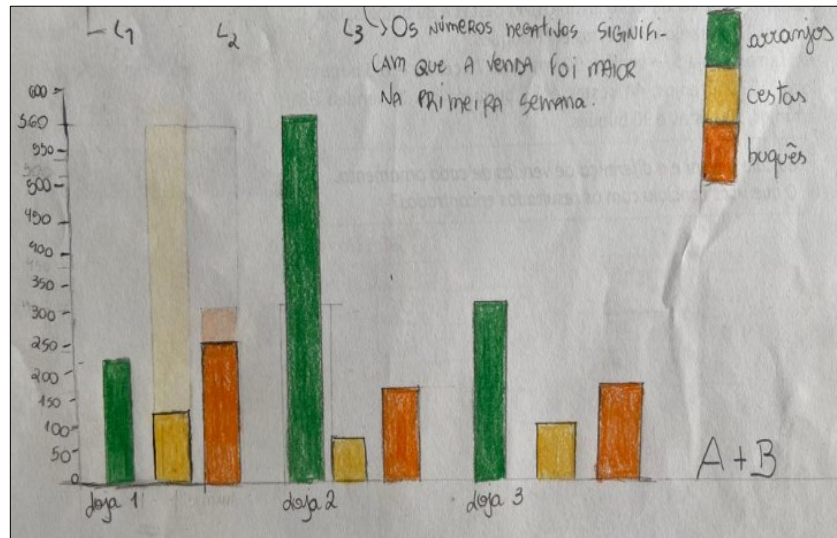
Professora: Em matemática, podemos representar a mesma coisa de várias formas, vocês, a partir do enunciado da tarefa, fizeram a tabela, da tabela fizeram a matriz, da matriz fizeram a soma e subtração das matrizes e agora, como vocês podem representar esses valores?

Melissa: Acho que entendi, uma coisa puxa a outra... já sei, um gráfico, os valores ficam legais em um gráfico.

Professora: Isso, mãos à obra!

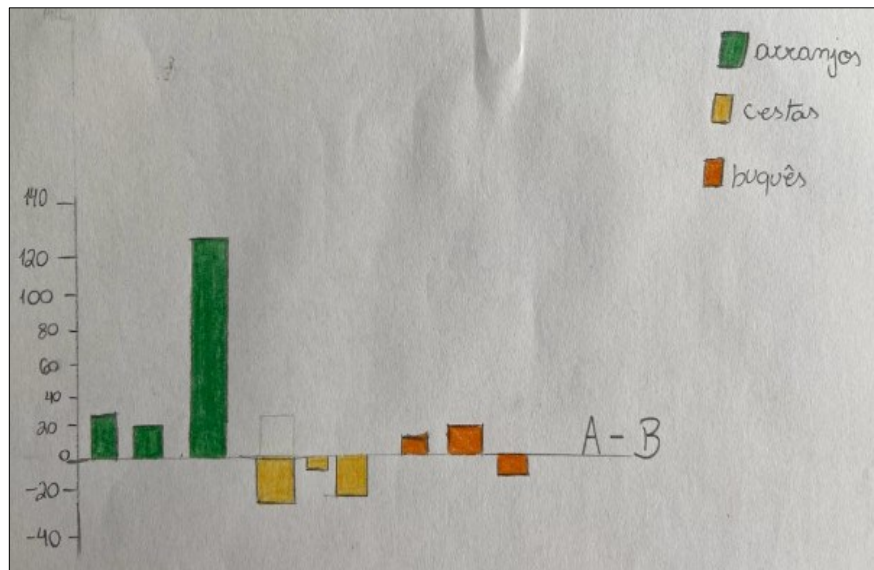
Nesse momento, o grupo começou a organizar as ideias para montarem os gráficos com os valores encontrados. Dessa forma, fez a conversão 5 e a conversão 6, que foi do registro matricial para o registro gráfico, Figura 23 e Figura 24, respectivamente. A Figura 23 é a representação dos valores encontrados na soma das matrizes e a Figura 24 é a representação dos valores encontrados na subtração das matrizes. Nessa conversão o registro de partida foi a matriz de adição e subtração e o registro de chegada foi cada gráfico correspondente.

Figura 23: Conversão 5, Tarefa 1 (floricultura), G5



Fonte: Registro do G5 (2022)

Figura 24: Conversão 6, Tarefa 1 (floricultura), G5



Fonte: Registro do G5 (2022)

Neste contexto, Flores e Moretti (2008), baseados na TRRS de Duval afirmam que a congruência nas conversões conduz a passagem de uma à outra representação de forma mais evidente.

Podemos perceber na Figura 23 e na Figura 24 que, apesar de uma representar a soma e a outra a subtração, respectivamente, foram utilizadas maneiras diferentes de organizar os dados nos gráficos. No gráfico da soma, a legenda está representada por arranjos, cestas e buquês e os dados estão organizados por lojas no gráfico. Na subtração, a legenda está representada como arranjos, cestas e buquês e os dados estão organizados por ornamento no gráfico. Isso ocorreu, por conta que um integrante do grupo fez um gráfico e outro integrante

fez o outro gráfico, dessa forma cada um representou o gráfico como achou melhor. Houveram conversas nas transcrições, perguntando para a professora se poderiam representar o gráfico cada um de uma forma, a professora respondeu que não tinha problema.

Após terminarem o gráfico, o grupo chamou a professora para entregar os registros. A professora então perguntou se eles responderam à questão da tarefa.

Carina: Claro professora, olha isso, já fizemos tudo.

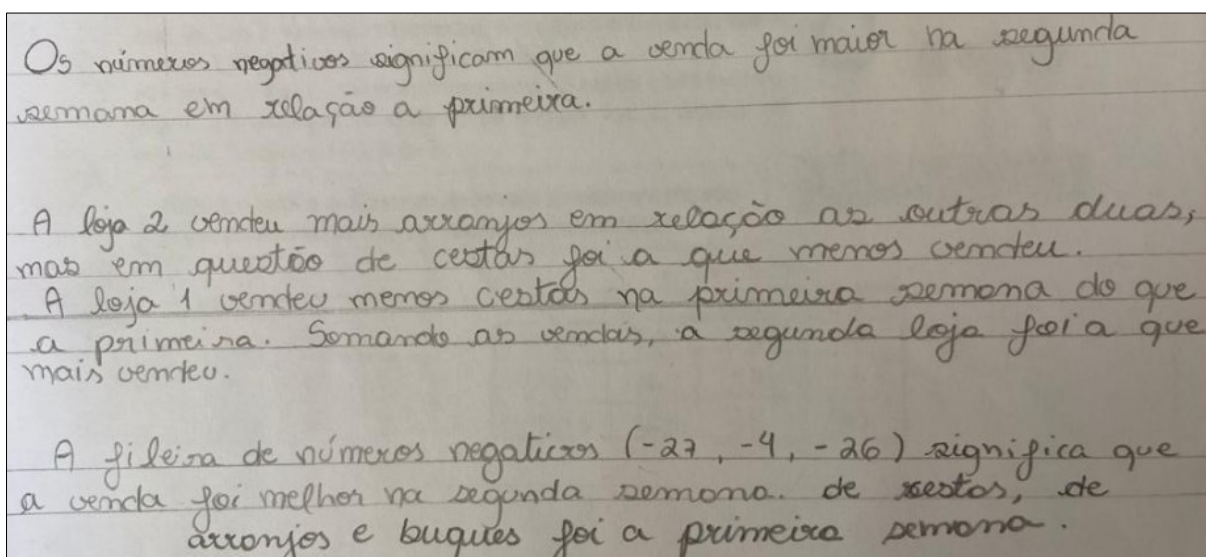
Professora: Mas agora quero que vocês escrevam o que concluíram com os resultados encontrados.

Carina: Escrever? A resposta que a gente chegou?

Professora: Isso, podem escrever o que acharam relevante, o que vocês entenderam, quais conclusões chegaram.

A partir dessa colocação da professora, o grupo fez a conversão 7, que foi a partir do registro de partida, o gráfico, passaram para a língua natural, a escrita, Figura 25.

Figura 25: Conversão 7, Tarefa 1 (floricultura), G5



Os números negativos significam que a venda foi maior na segunda semana em relação a primeira.

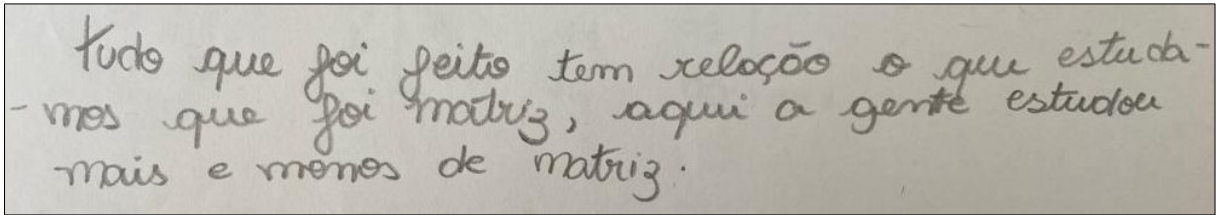
A loja 2 vendeu mais arranjos em relação as outras duas, mas em questão de cestas foi a que menos vendeu.

A loja 1 vendeu menos cestas na primeira semana do que a primeira. Somando as vendas, a segunda loja foi a que mais vendeu.

A fileira de números negativos (-27, -4, -26) significa que a venda foi melhor na segunda semana. de cestas, de arranjos e buques foi a primeira semana.

Fonte: Registro do G5 (2022)

Ao final, a professora fez o último questionamento, perguntando ao grupo o que eles haviam conseguido aprender no desenvolvimento dessa tarefa, qual conceito, qual conteúdo, o que de novo elas aprenderam. Os estudantes então escreveram, conforme a Figura 26.

Figura 26: Registro sobre a apreensão do objeto matemático

Fonte: registro do G5 (2022)

A partir desse último registro feito pelos estudantes, e analisando parte por parte todo o desenvolvimento da tarefa, podemos concluir que o grupo conseguiu compreender qual era o objeto matemático da tarefa, que nesse caso, foi a adição e subtração de matrizes. Podemos perceber também, que durante todo o desenvolvimento da tarefa o grupo representou corretamente as matrizes, representando de forma correta e colocando sua ordem. De acordo com Almeida e Vertuan (2011, p. 112) “[...] a compreensão em Matemática acontece na medida em que o sujeito que aprende, consegue coordenar vários registros de representações associados a um mesmo objeto matemático”.

Em síntese, encontramos na realização da Tarefa 1 (floricultura) pelo G5, que considerada como uma tarefa investigativa e abordada no Ensino por Investigação, 7 conversões, de acordo com o Quadro 7:

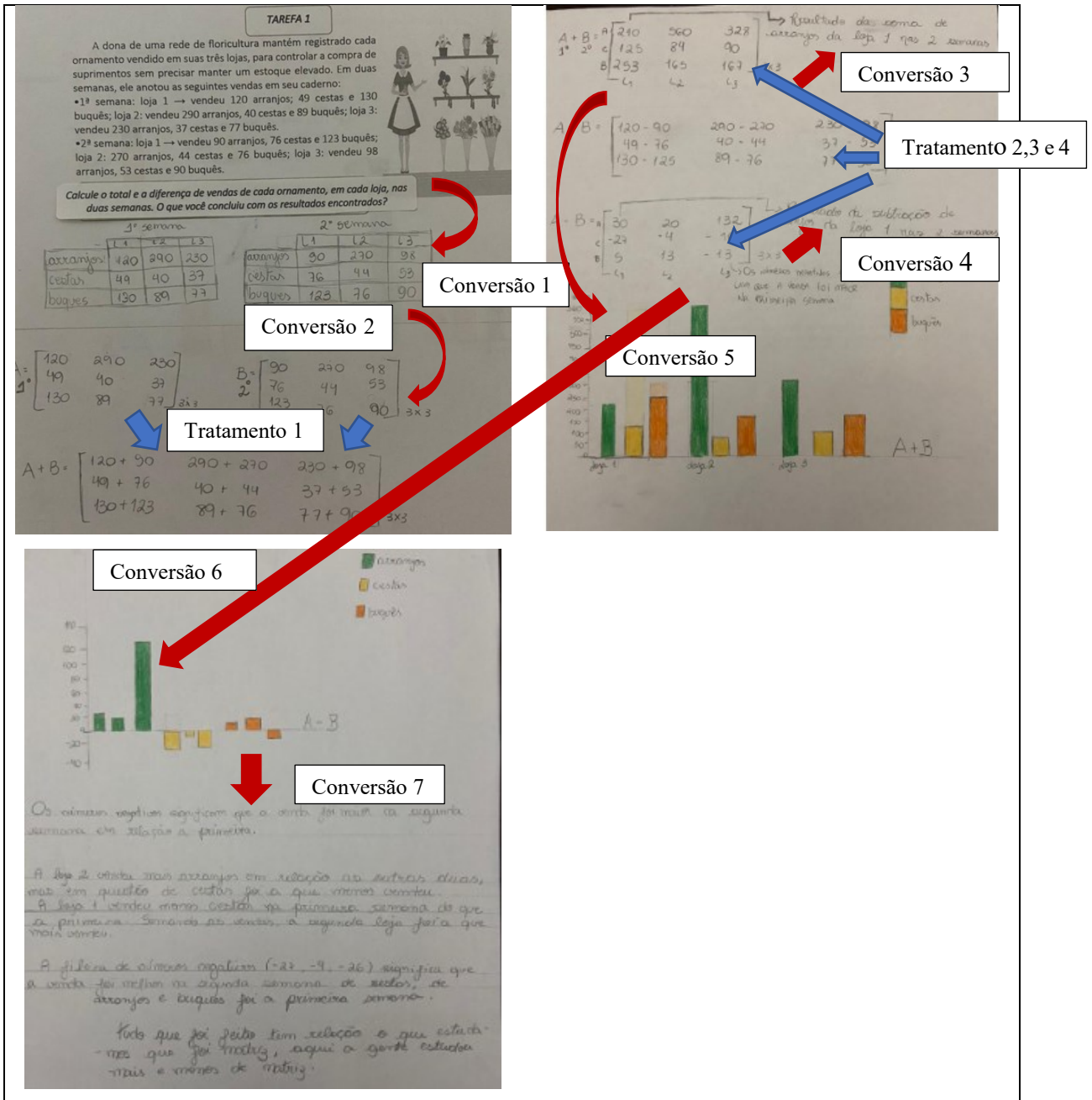
Quadro 7: Conversões realizadas na Tarefa 1 (floricultura) pelo G5

Conversões	Registro de partida	Registro de chegada
Conversão 1	Língua natural	Registro tabular
Conversão 2	Registro tabular	Registro matricial
Conversão 3	Registro matricial	Língua natural
Conversão 4	Registro matricial	Língua natural
Conversão 5	Registro matricial	Registro gráfico
Conversão 6	Registro matricial	Registro gráfico
Conversão 7	Registro gráfico	Língua natural

Fonte: As autoras (2022)

Na Figura 27, está a imagem completa da Tarefa da floricultura que foi apresentada para a análise do G5, como também um esquema das transformações ocorridas. As setas azuis representam os tratamentos ocorridos e as setas vermelhas as conversões.

Figura 27: Esquema de tratamento e conversão desenvolvida por G5 na Tarefa 1 (floricultura)



Fonte: As autoras (2022)

Compreendemos, de acordo com Duval (2003), que uma condição essencial para a aprendizagem é quando o estudante utiliza diferentes registros para representar o mesmo objeto matemático, conseguindo realizar tratamentos e conversões, com a possibilidade de trocar de registro de representação a todo momento, ou seja, realizando a coordenação entre registros. E que ainda, segundo Duval (2003), a compreensão em matemática está associada à atividade de conversão de ao menos dois registros de representação semiótica. Nesse sentido, o grupo analisado apresentou indícios de aprendizagem do conceito matemático estudado.

5.1.2 Análise da Tarefa 1(floricultura) do G1

O grupo 1 (G1) é formado pelos estudantes Jéssica, Bete, João, Bruna, Laila, Milena.

No momento do desenvolvimento dessa tarefa, o grupo ainda estava sem a participante Milena. Esse grupo desenvolveu dois momentos nessa tarefa, estará intitulado como 1º momento e 2º momento. O 1º momento refere-se à quando a professora entregou a Tarefa 1 (Figura 10) e falou para os estudantes resolvê-la conforme achassem melhor, utilizando o conceito, a operação que eles consideravam pertinente para a resolução da tarefa, apenas foi ressaltado para que eles trabalhassem em grupo, consultando seus colegas e trocando ideias. O 2º momento refere-se à quando a professora falou para o grupo fazer uma relação com o conteúdo que eles estavam aprendendo em sala de aula com a tarefa proposta e a partir dessa colocação a professora foi orientando os estudantes a desenvolverem diferentes registros relacionados com o objeto matemático da tarefa.

1º momento da Tarefa 1 (floricultura) do G1

O grupo iniciou o desenvolvimento da tarefa pela leitura da mesma por uma estudante. Após a leitura de acordo com os excertos e de acordo com a Figura 29, podemos perceber que o grupo achou pertinente adicionar os valores de cada loja em cada semana.

Jéssica: A gente tem que calcular o total de vendas.

Laila: Da loja?

Jéssica: De cada loja. Você vai fazer $120 + 290 + 230$ da primeira loja e assim por diante, com as outras.

Laila: E depois faz da semana 1 e 2?

Jéssica: Isso.

Após resolverem os cálculos de adição fizeram uma comparação entre os valores, para certificar que estavam certos. Em seguida, continuaram a conversa:

Jéssica: Agora a gente vai pegar os arranjos da primeira semana e diminuir da segunda semana, de todos na verdade.

Bete: A gente vai pegar e diminuir esse por esse? É isso?

Jéssica: Sim.

Podemos perceber pela Figura 28, que a soma foi realizada adicionando cada ornamento das três lojas primeiro da primeira semana e depois da segunda semana, de forma

organizada. Na diferença foi realizada a subtração do total das vendas de cada ornamento, não foi feita a subtração de cada ornamento, de cada loja nas duas semanas.

Figura 28: Conversão 1, Tarefa 1 (floricultura), 1º momento, G1

The image shows handwritten mathematical work on a grid background. It consists of several columns of calculations. The first column shows the addition of 120, 290, and 230 to get 640. The second column shows the addition of 40, 49, and 37 to get 126. The third column shows the addition of 130, 89, and 77 to get 296. The fourth column shows the addition of 90, 270, and 98 to get 458. The fifth column shows the addition of 76, 44, and 53 to get 173. The sixth column shows the addition of 123, 76, and 90 to get 289. Below these, there are subtraction problems: 640 minus 458 equals 182, 126 minus 173 equals 097, and 296 minus 289 equals 007. At the bottom, there is a table with two columns: 'TOTAL' and 'DIFERENÇA'. The rows are 'arranjo' (1098, 182), 'buque' (585, 7), and 'certas' (299, 47).

	arranjo	partas	buque	arranjo	certas	brinquês
	120	40	130	90	76	123
	290	49	89	270	44	76
	230	37	77	98	+ 53	+ 90
	<u>640</u>	<u>126</u>	<u>296</u>	<u>458</u>	<u>173</u>	<u>289</u>
	640	173	296	640	126	296
	- 458	- 126	- 289	+ 458	+ 173	+ 289
	<u>182</u>	<u>097</u>	<u>007</u>	<u>1098</u>	<u>299</u>	<u>585</u>
	TOTAL	DIFERENÇA				
arranjo	1098	182				
buque	585	7				
certas	299	47				

Fonte: Registro do G1 (2022)

De acordo com os registros do 1º momento, o grupo realizou apenas uma conversão, conversão 1, que foi a partir do registro de partida do enunciado do problema para o registro de chegada que foram os registros numéricos, sendo assim, para Duval (2003, p. 15) “a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas”. Nesse sentido, o grupo não apresentou indícios de aprendizagem e não fez a relação da tarefa com o objeto matemático em questão: adição e subtração de matrizes.

Aproveitando esses registros e ao chamarem a professora para entregar a tarefa pois já haviam terminado, a professora indagou, de acordo com os excertos:

Professora: Vocês responderam à questão da tarefa?

Laila: Sim.

Professora: Leiam a questão novamente e pensem, interpretem, o que a questão está pedindo?

Jéssica: Calcule o total e a diferença de cada ornamento, em cada loja nas duas semanas. O que você concluiu?

Professora: O que vocês calcularam?

Jéssica: Hummm... deixa eu ver... calculamos a soma dos arranjos em cada loja na primeira semana e depois na segunda semana e depois juntamos tudo. Na diferença fizemos menos de cada loja nas duas semanas.

Professora: Vocês responderam à questão proposta na tarefa?

Jéssica: Tentamos, mas acho que não professora.

Professora: E por que não responderam, faltou alguma coisa?

Laila: Acho que misturamos as informações e acabamos sem saber o que fazer direito.

Professora: Tudo bem, não tem problema. Vamos lá... agora tentem fazer uma relação com o conteúdo que estudamos com essa tarefa, vocês possuem bastante informações, como podem organizá-las?

Bete: Uma tabela?

Professora: Isso, isso mesmo.

2º momento da Tarefa 1 (floricultura) do G1

De acordo com os excertos, o G1 começou a desenvolver novamente a tarefa, mas agora de outra maneira:

Laila: Tem que fazer duas tabelas, porque são duas semanas diferentes.

Jéssica: Outra tabela?

Bete: Você vai ter que fazer duas tabelas, uma pra cada semana, cada uma com as lojas 1,2 e 3, entendeu?

A partir dessa conversa, o grupo fez a conversão 1, Figura 29, que foi do registro de língua natural para o registro tabular, organizando assim os dados em tabelas, a primeira tabela referente a primeira semana e a segunda tabela referente a segunda semana. Para Duval (2009), a conversão do ponto de vista cognitivo é a que aparece como uma atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz à compreensão.

Figura 29: Conversão 1, Tarefa 1 (floricultura), G1, 2º momento

1ª semana	loja 1	loja 2	loja 3
arranjos	120	290	290
cestas	49	90	77
buques	790	89	37

2ª semana	loja 1	loja 2	loja 3
arranjos	90	270	98
cestas	70	49	53
buques	120	76	90

Fonte: Registro do G1 (2022)

A partir da construção das tabelas, de acordo com os excertos, o grupo fez a relação com o uso de matriz:

Jéssica: A gente pode continuar fazendo matriz.

Laila: Como assim?

Jéssica: Lembra que a professora falou que era para fazer uma relação com o que a gente estudou, então! A matriz vem da tabela, agora a gente pode colocar os números na matriz.

Laila: Verdade, mas matriz tem linhas e colunas, e agora?

Jéssica: É só organizar os números da tabela em linhas e colunas.

Dessa forma o grupo realizou a conversão 2, Figura 30, que foi a conversão do registro tabular para o registro matricial. Para Duval (2009), é a conversão entre as representações de um mesmo objeto que possibilita a construção do conhecimento matemático.

Figura 30: Conversão 2, Tarefa 1 (floricultura), G1, 2º momento

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & l_1 & l_2 & l_3 \\
 a & \left[\begin{array}{ccc} 120 & 290 & 230 \\ 99 & 90 & 77 \\ 730 & 89 & 37 \end{array} \right] \\
 c & & & \\
 B & & & \\
 & & & 3 \times 3
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 & l_1 & l_2 & l_3 \\
 a & \left[\begin{array}{ccc} 90 & 270 & 98 \\ 76 & 44 & 83 \\ 123 & 76 & 90 \end{array} \right] \\
 c & & & \\
 b & & & \\
 & & & 3 \times 3
 \end{array}
 \end{array}$$

Fonte: Registro do G1 (2022)

Continuando o desenvolvimento, o grupo de acordo com os excertos, chegou à seguinte conclusão:

Jéssica: Agora tem que fazer a matriz de adição.

Laila: Como faz isso?

Jéssica: Não sei... não sei não...

Laila: Acho que soma tudo e pronto, tudo que tá aqui dentro.

Jéssica: Não sei não... professora, vem cá!

Professora: Oi...

Jéssica: Professora, como faz agora?

Professora: Fazer o quê?

Jéssica: A soma e a subtração? Soma tudo?

Professora: Se você somar tudo vai conseguir responder à questão da tarefa?

Nesse momento a estudante E 7, lê baixinho a questão da tarefa e responde:

Laila: Hummm... se somar tudo, vai ter um número como resposta e não é isso. Tá falando cada ornamento, em cada loja nas duas semanas.

Jéssica: Entendi, entendi... professora, soma cada coisa correspondente? É isso? Vai continuar em forma de matriz?

Professora: Isso, podem fazer.

Dessa forma, o grupo realizou um tratamento, que foi o tratamento 1, Figura 31, onde fizeram a operação de adição de matrizes, continuando no mesmo registro que no caso é o registro matricial. Segundo Duval (2003), o tratamento é uma transformação de uma representação dentro de um mesmo registro, como exemplo tem a efetuação de cálculos ficando no mesmo sistema de escrita ou de representação de números.

Figura 31: Tratamento 1, Tarefa 1 (floricultura), G 1, 2º momento

arranjo	$120+90$	$290+270$	$230+98$
cesto	$49+76$	$44+40$	$53+37$
buque	$123+130$	$76+89$	$77+90$

3x3

Fonte: Registro do G1 (2022)

Em seguida, realizaram o tratamento 2, Figura 32, Duval (2003) considera o tratamento como uma atividade cognitiva menos complexa. O tratamento 2 foi o resultado da adição realizada pelo grupo, encontrando dessa forma a soma pedida na questão, de acordo com os excertos:

Jéssica: Agora sim, acho que a resposta tá feita, da adição. Olha aqui, a gente tem a soma de cada ornamento, de cada loja nas duas semanas.

Laila: Isso, isso... você é inteligente demais... risos...

Figura 32: Tratamento 2, Tarefa 1 (floricultura), G 1, 2º momento

	loja 1	loja 2	loja 3
arranjo	1270	560	328
cesto	725	84	90
buque	253	765	767
Soma			33

Fonte: Registro do G1 (2022)

Na sequência, após realizarem a adição verificaram que deveriam fazer a subtração também, de acordo com os excertos:

Bete: É pra fazer a tabela da diferença também? Professora, professora...

Professora: O quê?

Bete: É pra fazer a tabela de menos também?

Professora: Tabela? Que tabela? Vocês estão trabalhando com?

Jéssica: Matriz professora... matriz...

Professora: Sim, isso, podem fazer.

Na sequência, realizaram o tratamento 3, Figura 33, que foi a subtração das duas matrizes, e o tratamento 4, Figura 34, que foi o resultado dessa diferença.

Figura 33: Tratamento 3, Tarefa 1 (floricultura), G 1, 2º momento

arranjo	120-90	290-270	230-98
cesto	99-76	40-44	37-53
buque	130-1203	89-76	77-90
			33

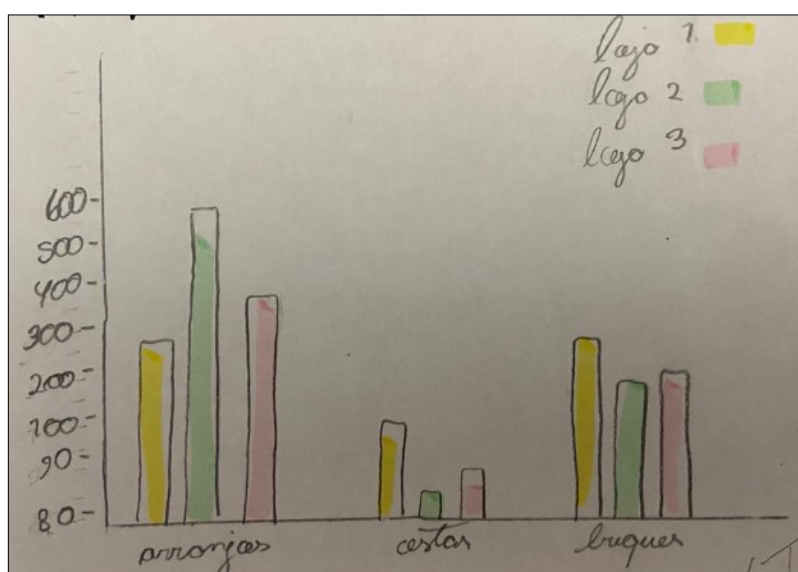
Fonte: Registro do G1 (2022)

Professora: Vocês conseguem fazer?

Jéssica: Acho que sim.

A partir dessa conversa, realizaram a conversão 3, que foi do registro matricial para o registro gráfico, conforme Figura 35. Para Duval (2003, p. 16) “as conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados”.

Figura 35: Conversão 3, Tarefa 1 (floricultura), G 1, 2º momento



Fonte: Registro do G1 (2022)

G1 fez o registro gráfico apenas da matriz de adição, podemos perceber que a escala do gráfico não começou do zero e sim do 80 e não seguiu uma escala, pois no início foi de 10 em 10 e a partir do 100 foi de 100 em 100. Esse erro foi discutido em outro momento, em outra aula, após a correção feita pela professora. A professora então, devolveu a folha e questionou os estudantes quanto à escala que utilizaram para fazer o gráfico, os estudantes então responderam que no momento não prestaram atenção quanto à escala, que estavam preocupados em representar os valores que haviam encontrado, mesmo que para isso a escala não começaria do zero e não teria a mesma distância entre os números. Em seguida, a professora fez uma breve explicação sobre a importância de construir qualquer gráfico de maneira correta, obedecendo corretamente a escala atribuída.

Após a construção do gráfico, o grupo chamou a professora:

Laila: Professora, terminamos.

Professora: Vocês responderam à questão da tarefa? O que vocês concluíram?

Jéssica: Já fizemos tudo, essa matriz é a resposta e depois ainda tem o gráfico com os resultados, tá certo?

Professora: Sim, mas agora quero que vocês escrevam o que concluíram no desenvolvimento da tarefa.

Laila: Escrever? Como?

Professora: Escrever o que concluíram com o desenvolvimento da tarefa.

Jéssica: Entendi, entendi... vou fazer...

A partir dessa conversa, o grupo realizou a conversão 4, que a partir do registro gráfico fizeram o registro em língua natural, Figuras 36, 37 e 38.

Figura 36: Conversão 4, Tarefa 1 (floricultura), G 1, 2º momento

Perguntas:

1. O que você concluiu com a tabela?

Que a loja 2 vendeu mais arronjas do que as outras lojas, a loja 1 vendeu mais cestas, já a loja 2 foi a que vendeu menos cestas.

2. Em relação a tabela:

560 é o ramo de arronjas na loja 2 referente as duas semanas.

Fonte: Registro do G1 (2022)

Figura 37: Conversão 4, Tarefa 1 (floricultura), G 1, 2º momento

→ 2 - Os números negativos da tabela é a quantidade de itens que foram vendidos a mais no 2º semana em relação a 1º semana.

Fonte: Registro do G1 (2022)

Figura 38: Conversão 4, Tarefa 1 (floricultura), G 1, 2º momento

O número -13 da tabela significa que na segunda semana loja 3 vendeu mais buquês do que no 1º semana.

A loja 1 vendeu mais cestas do que as demais lojas na segunda semana.

Fonte: Registro do G1 (2022)

Em relação ao objeto matemático, podemos identificar que o grupo fez a relação da adição e subtração de matrizes de acordo com os excertos:

Professora: Qual conceito vocês trabalharam nessa tarefa?

Laila: Na primeira vez ou na segunda?

Professora: Nas duas vezes.

Laila: Na primeira fizemos contas e contas, risos... Na segunda vez fizemos com matriz e fizemos mais coisas.

Professora: O que vocês utilizaram de matriz?

Laila: A gente fez a matriz, era duas, depois somou as duas matrizes e depois diminuiu, para chegar na questão para responder.

Professora: O que mais fizeram?

Laila: Não sei... foi isso...

Jéssica: Foi feito também o gráfico, o gráfico com os números da matriz da soma.

Professora: Perfeito! Qual conceito vocês trabalharam enquanto resolveram a tarefa?

Jéssica: Matriz, soma e menos de matriz, acho que foi isso.

Professora: Isso mesmo.

No Quadro 8, está especificado os registros de partida e chegada que geraram as conversões dos registros realizados pelos estudantes na Tarefa 1 do G1.

Quadro 8: Conversões realizadas na Tarefa 1 (floricultura) pelo G1

Conversões	Registro de partida	Registro de chegada
Conversão 1	Língua natural	Registro tabular
Conversão 2	Registro tabular	Registro matricial
Conversão 3	Registro matricial	Registro gráfico
Conversão 4	Registro gráfico	Língua natural

Fonte: As autoras (2022)

Analisando os registros desse 2º momento, podemos concluir que, de acordo com Duval (2003), a pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto matemático, e a coordenação entre esses diferentes registros é uma condição necessária para a compreensão em matemática. Ainda, segundo Duval (2003) a diversidade dos registros de representações semióticas tem um papel central na compreensão e as condições pertinentes de aquisição dos conhecimentos matemáticos devem estar centrados nas condições cognitivas de compreensão, ou seja, nas condições de acesso aos objetos matemáticos. E que ainda, segundo Duval (2003), a compreensão em matemática está associada à atividade de conversão de ao menos dois registros de representação semiótica. Em relação a coordenação entre os registros, percebemos que os registros mobilizados dizem respeito ao mesmo objeto matemático, ou seja, a

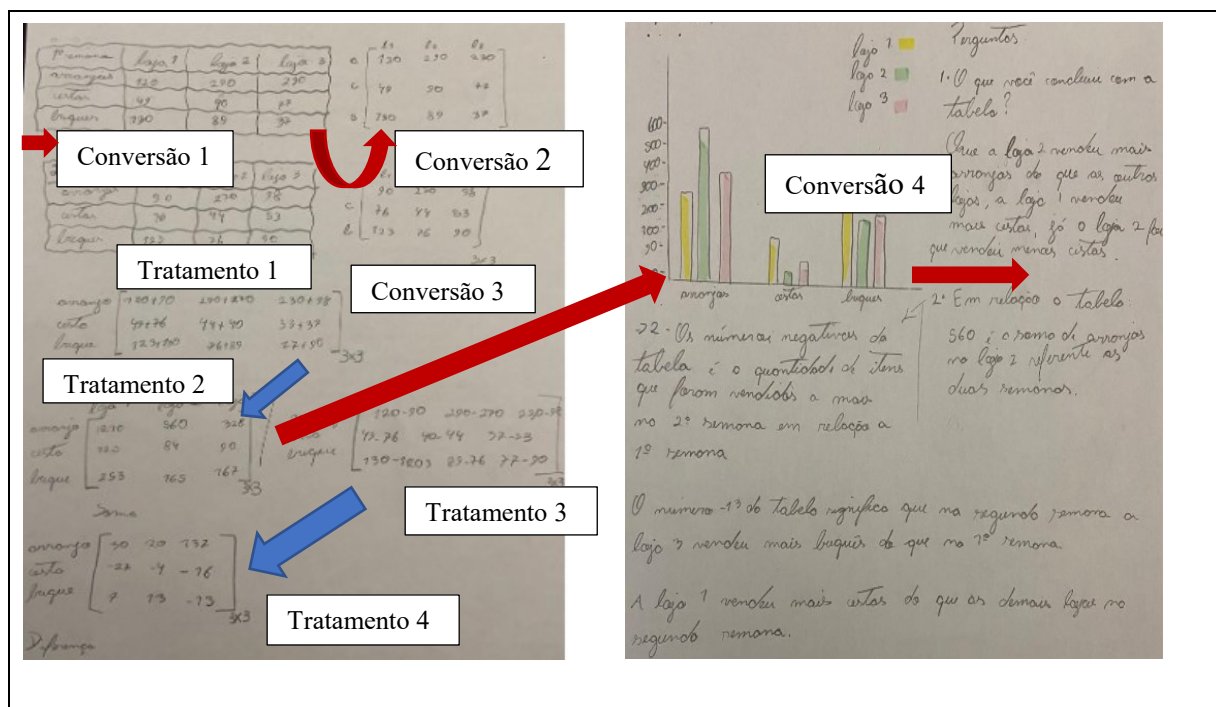
coordenação consiste em trabalhar com diferentes representações de um mesmo objeto matemático. Nesse sentido, concluímos que o grupo analisado apresentou indícios de aprendizagem do conceito matemático estudado.

Na Figura 39 está a imagem completa da Tarefa da floricultura cujos registros foram analisados, como também um esquema das transformações ocorridas. As setas azuis representam os tratamentos ocorridos e as setas vermelhas as conversões.

Em específico, nesse esquema, a primeira conversão (conversão 1) ocorreu da transformação da língua natural para o registro tabular, o enunciado da tarefa (língua natural) não está no esquema, porque o grupo resolveu o 2º momento em outra folha de papel.

Não estão no esquema todas as setas dos tratamentos, pois não cabiam de forma conveniente devido à resolução estar com os registros muito próximos.

Figura 39: Esquema de tratamento e conversão desenvolvida por G1 na Tarefa 1 (floricultura)



Fonte: As autoras (2022)

5.2 ANÁLISE DA TAREFA 3 - REDES SOCIAIS

Como já foi antecipado na seção 3.3.1, para a Tarefa 3, Figura 40, foi proposta uma situação e cada grupo deveria elaborar um problema e sua resolução. Foi uma tarefa proposta para ser desenvolvida extraclasse e os estudantes tiveram três semanas, a partir do dia 16 de maio para desenvolvê-la e entregá-la à professora. Dessa forma, a análise dessa tarefa será feita

exclusivamente a partir dos registros escritos dos grupos, pois não temos excertos de transcrições de diálogos.

Figura 40: Tarefa 3 (redes sociais)



TAREFA 3

De acordo com a pesquisa feita em sala de aula pela professora com a ajuda dos alunos, foram levantados quais redes sociais são mais utilizadas pelos mesmos: Instagram, Whats App, Youtube, Tik Tok e Twitter. A partir disso, e, levando em consideração que todos os alunos possuem celular e possuem acesso a quantidade diária e semanal de uso dessas redes sociais, **elaborem um problema** (um por grupo) utilizando o conteúdo que estamos estudando juntamente com os dados descritos acima.

Fonte: As autoras (2022)

Em seguida trazemos a análise do desenvolvimento dos grupos G5 e G1.

5.2.1 Análise da Tarefa 3 (redes sociais) do G5

O G5, é formado pelos estudantes Carina, Melissa, Julia, Lorena, Sofia, Rosa.

Apesar da situação proposta estar contendo cinco tipos de redes sociais, levantados pelos próprios estudantes, esse grupo utilizou quatro redes sociais para a resolução da investigação proposta.

O problema proposto pelo G5 está na Figura 41, escrito por um dos integrantes. No enunciado do problema percebe-se que não foi citado se a média pesquisada era diária, semanal, quinzenal, mas no decorrer da resolução da tarefa é possível fazer essa identificação, Figura 42.

Figura 41: Tratamento 1, Tarefa 3 (redes sociais), G5

De acordo com a pesquisa, feita pelo celular de uma Maria, encontramos os meios de uso das redes sociais. De acordo com essa pesquisa qual o medio quinzenal de uso de Maria?

Fonte: Registro do G5 (2022)

Figura 42: Tratamento 2 e 3, Tarefa 3 (redes sociais), G5

media de 23-30 de maio
 instagram: 19h 20min = 1160 min
 whatsapp: 16h 12min = 972 min
 youtube: 1h 25 min = 85 min
 TikTok: 29 min

30-05 de maio/junho
 instagram: 22h 42min = 1362 min
 whatsapp: 13h 49 min = 829 min
 youtube: 44 min
 Tik Tok: 4h 23min = 263 min

Fonte: Registro do G5 (2022)

A partir da situação proposta na Tarefa 3, o grupo elaborou uma situação-problema, ocorrendo assim um tratamento, o tratamento 1, indicado na Figura 41, seguindo na resolução fizeram uma pesquisa no celular de um dos integrantes do grupo que eles denominaram como Maria, e anotaram os valores encontrados, Figura 42, ocorrendo assim o tratamento 2. Ou seja, o grupo ficou em um mesmo registro que foi da linguagem natural, referente à situação proposta para o problema e do problema para a anotação que fizeram da coleta de dados. Ainda no tratamento 2, pode-se observar que na coleta do tempo anotado em horas, que é a forma apresentada pelo celular, grupo transformou esses valores em minutos, fazendo assim mais um tratamento, o tratamento 3.

De acordo com esse início da tarefa percebemos que os estudantes realizaram vários tratamentos a partir da situação proposta, ficando no mesmo registro multifuncional de representação discursiva. Para Duval (2003), tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo sistema de registro.

Seguindo na resolução apresentada pelo grupo, a partir do tratamento 3, fizeram a conversão 1, Figura 43, que foi do registro em língua natural para o registro tabular. Para Duval (2003, p. 16) “As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados [...]”. Observando a Figura 43, percebe-se que o grupo organizou os dados na tabela em horas e não em minutos, e percebemos também pelas datas anotadas no início da tabela que tratam de dados semanais: primeira semana de 23 a 30 de maio e a segunda semana de 30 a 07 de junho.

Figura 43: Conversão 1, Tarefa 3 (redes sociais), G5

Média de 23-30 de maio		Média de 30-05 de maio/junho	
Instagram	19 horas e 20 min	Instagram	22 horas e 42 min
WhatsApp	16 horas e 14 min	WhatsApp	13 horas e 49 min
Facebook	1 hora e 23 min	Facebook	44 minutos
Clk Col	29 minutos	Clk Col	4 horas e 23 min

Fonte: Registro do G5 (2022)

Na sequência, fizeram a conversão 2, Figura 44, que foi a passagem do registro tabular para o registro matricial. Para cada registro de partida apresentado, no caso as tabelas apresentaram o registro de chegada, no caso a representação matricial. Nessa conversão, utilizaram os valores coletados em minutos, inclusive o grupo especificou no registro que os valores estavam em minutos. Nesse caso, a natureza dos dois registros de representação é a mesma, registro monofuncional de representação discursiva, ou seja, possuem a mesma natureza e a mesma forma. Para Duval (2003), esse tipo de conversão é considerado como menos complexo.

Figura 44: Conversão 2, Tarefa 3 (redes sociais), G5

I	1160	I	1362
W	972	W	829
Y	85	Y	44
T	29	T	263

4x1 (Em minutos)

Fonte: Registro do G5 (2022)

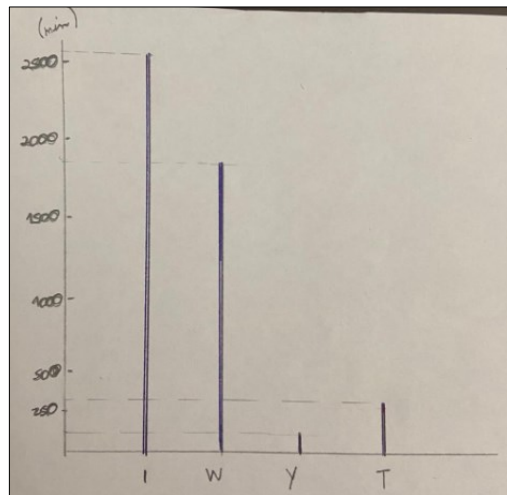
Em seguida, o grupo realizou a soma dos valores coletados das duas matrizes em minutos. Ocorre assim o tratamento 4, Figura 45. Para Duval (2003), o tratamento é uma atividade cognitiva menos complexa, onde é realizado o procedimento sobre o registro conservando o sistema de registro original.

Figura 45: Tratamento 4, Tarefa 3 (redes sociais), G5

$$\begin{bmatrix} 1160 + 1362 = 2522 \\ 972 + 829 = 1801 \\ 85 + 44 = 129 \\ 29 + 263 = 292 \end{bmatrix}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} 2522 \\ 1801 \\ 129 \\ 292 \end{bmatrix}_{4 \times 1} \begin{matrix} I \\ W \\ Y \\ T \end{matrix} \quad (\text{Soma quinzenal})$$

Fonte: Registro do G5 (2022)

Na sequência, observamos a passagem do registro matricial para o registro gráfico, realizando assim a conversão 3, figura 46.

Figura 46: Conversão 3, Tarefa 3 (redes sociais), G5

Fonte: Registro do G5 (2022)

Por fim, o G5 fez o registro em língua natural para responder o problema que eles elaboraram. Fizeram assim, a conversão 4, Figura 47, que foi do registro gráfico para o registro em língua natural.

Figura 47: Conversão 4, Tarefa 3 (redes sociais), G5

Baseado na pesquisa, descobrimos a média quinzenal do uso das redes sociais de Maria. Obtemos o resultado através da soma de duas semanas de uso.

Vendo os dados, a dona Maria, passa a maior parte do tempo no Instagram (2522 minutos) e a menor parte do tempo no YouTube (129 minutos).

Fonte: Registro do G5 (2022)

Nessa tarefa, o objeto matemático não foi direcionado pela professora, o grupo de acordo com o problema proposto por eles, desenvolveram a adição de matrizes. Analisando os registros, observamos que, durante o desenvolvimento da tarefa, o grupo representou os dados coletados em tabelas, representou e operou corretamente as matrizes, construiu o gráfico, e escreveu a resposta representando a relação dos registros com o objeto matemático. Nesse sentido, G5 mostrou coordenação entre registros, o que vai além de realizar conversões e indica compreensão. Segundo Duval (2003), a compreensão requer a identificação de características do objeto em diferentes registros de representação.

No Quadro 9, estão especificados os registros de partida e chegada que geraram as conversões, dos registros realizados pelos estudantes na Tarefa 3 do G5.

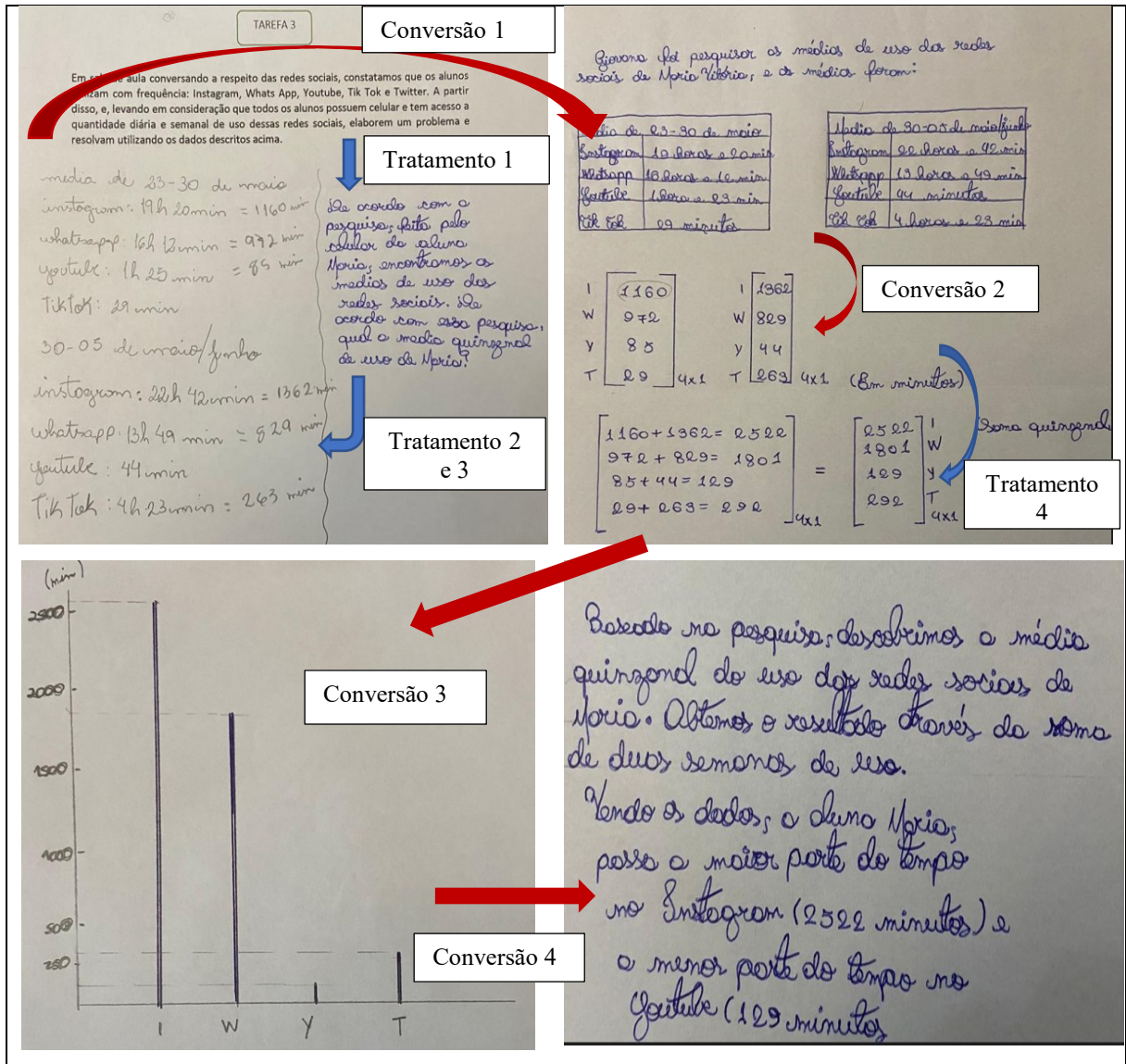
Quadro 9: Conversões realizadas na Tarefa 3 (redes sociais) pelo G5

Conversões	Registro de partida	Registro de chegada
Conversão 1	Língua natural	Registro tabular
Conversão 2	Registro tabular	Registro matricial
Conversão 3	Registro matricial	Registro gráfico
Conversão 4	Registro gráfico	Língua natural

Fonte: As autoras (2022)

Na Figura 48, está a imagem completa da Tarefa das redes sociais que foi apresentada para a análise, como também um esquema das transformações ocorridas. As setas azuis representam os tratamentos ocorridos e as setas vermelhas as conversões.

Figura 48: Esquema das transformações ocorridas na Tarefa das redes sociais pelo G5



Fonte: As autoras (2022)

Para Duval (2003, p. 14), “A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação”. Ainda segundo Duval (2003) a criatividade e o conhecimento do estudante se aprimoram quando utilizados diferentes registros do que na formação de um registro e no tratamento deste. Assim, percebemos indícios de aprendizagem quando o grupo desenvolve diferentes registros, realizando não apenas tratamentos, mas também conversões e ocorridas a coordenação entre eles.

5.2.2 Análise da Tarefa 3 (redes sociais) do G1

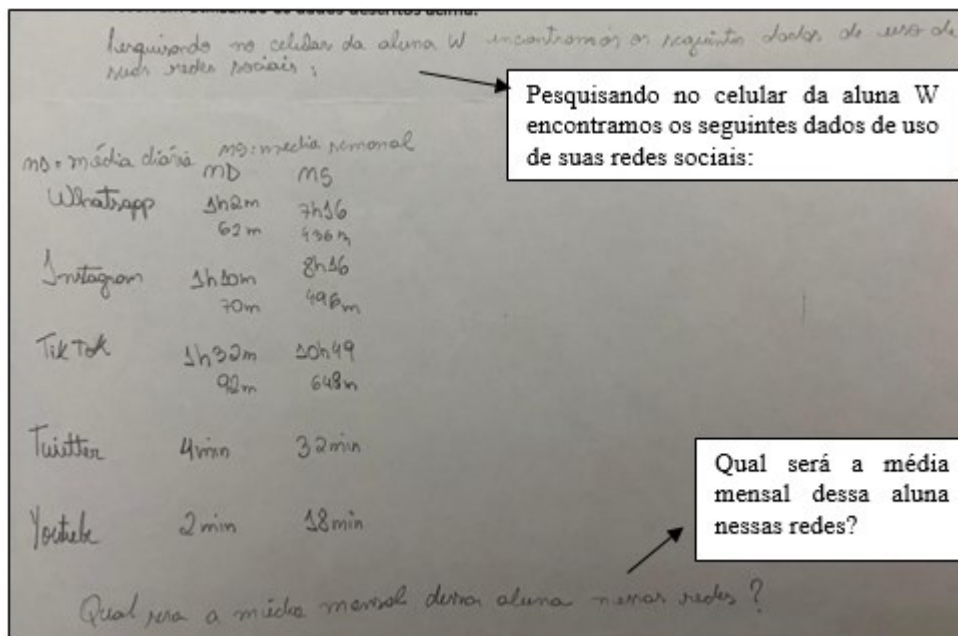
O G1 é formado pelos estudantes Jéssica, Bete, João, Bruna, Laila e Milena.

No momento do desenvolvimento da tarefa o grupo era composto pelos cinco primeiros estudantes.

Esse grupo, em sua coleta de dados e durante o desenvolvimento da tarefa, utilizou as cinco redes sociais propostas na situação: *Whatsapp*, *Instagram*, *Tik Tok*, *Twitter* e *Youtube*.

O G1, de acordo com a Figura 49, a partir da situação proposta fez a coleta de dados da média diária e da média semanal, e após formularam uma questão em cima dos dados coletados: Qual será a média mensal dessa aluna nessas redes?

Figura 49: Tratamento 1, Tarefa 3 (redes sociais), G1



Fonte: Registro do G1 (2022)

A partir dos registros apresentados na Figura 49, percebemos que o grupo partiu da situação proposta como um registro de língua natural para outros registros em língua natural que foram: a explicação sobre o que significa a coleta de dados, a coleta de dados com o tempo em horas e a questão elaborada por eles. Nesse caso, ocorreram vários tratamentos, que nomeamos por tratamento 1.

Na sequência da resolução, de acordo com as Figuras 50 e 51, o grupo realizou a primeira conversão, conversão 1, que foi referente à média diária e à média semanal,

respectivamente, partindo de um registro de língua natural para o registro matricial. Observamos que nesse registro matricial os valores coletados estão em minutos, e não em horas, conforme o registro apresentado anteriormente, Figura 49. Como foi uma tarefa extraclasse, e essa análise é feita apenas pelo registro do grupo, não conseguimos saber qual transformação o grupo realizou para passar de minutos para horas, levando em conta que na coleta de dados estava em horas e no próximo registro estava em minutos.

A conversão 1, Figuras 51 e 52, foi realizada de acordo com os dados coletados. Como coletaram dois grupos de dados, a média diária e a média semanal, também fizeram a conversão do registro natural para o matricial diário e semanal. Para Duval (2009, p. 59) “A conversão é então uma transformação externa em relação ao registro da representação de partida”.

Figura 50: Conversão 1, Tarefa 3, G1

	média diária (min)
W	62
I	70
F	98
T	4
Y	2

5x1

Fonte: Registro do G1 (2022)

Figura 51: Conversão 1, Tarefa 3, (redes sociais) G1

	média semanal (min)
W	436
I	496
F	648
T	32
Y	18

5x1

Fonte: Registro do G1 (2022)

Em seguida, o grupo realizou dois tratamentos, um para cada conversão realizada, tratamento 2 e tratamento 3, respectivamente, que foi organizar os dados das matrizes para realizarem a multiplicação de cada valor. Nesses tratamentos podemos observar pelos registros que os valores da matriz com os dados diários estão multiplicados por 30, para assim obter o resultado mensal das redes sociais utilizadas pelo usuário pesquisado, Figura 52. Na Figura 53, observamos também um tratamento, o tratamento 3, mas dessa vez o valor dos dados coletados em relação à média semanal está multiplicado por quatro, para assim obter o resultado também mensal. Esses cálculos, Figuras 53 e 54, são configurados como tratamentos realizados dentro do próprio registro, no caso o numérico, assim como aborda Duval (2003) quando define a transformação de tratamento.

Figura 52: Tratamento 2, Tarefa 3 (redes sociais), G1

$$\begin{matrix} W \\ I \\ F \\ T \\ Y \end{matrix} \begin{bmatrix} 62 \times 30 \\ 70 \times 30 \\ 92 \times 30 \\ 4 \times 30 \\ 2 \times 30 \end{bmatrix} 5 \times 1$$

Fonte: Registro do G1 (2022)

Figura 53: Tratamento 3, Tarefa 3 (redes sociais), G1

$$\begin{matrix} W \\ I \\ F \\ T \\ Y \end{matrix} \begin{bmatrix} 436 \times 4 \\ 496 \times 4 \\ 648 \times 4 \\ 32 \times 4 \\ 18 \times 4 \end{bmatrix} 5 \times 1$$

Fonte: Registro do G1 (2022)

Continuando, o grupo realizou mais dois tratamentos, o tratamento 4 e 5, respectivamente, Figuras 54 e 55 que são os resultados obtidos pelas multiplicações realizadas, e assim obtiveram os resultados da utilização mensal das redes sociais.

Figura 54: Tratamento 4, Tarefa 3 (redes sociais), G1

média mensal

$$\begin{matrix} What \\ Insta \\ Tiktok \\ Twitter \\ Youtube \end{matrix} \begin{bmatrix} 1860 \\ 2100 \\ 2760 \\ 120 \\ 60 \end{bmatrix} 5 \times 1$$

Fonte: Registro do G1 (2022)

Figura 55: Tratamento 5, Tarefa 3 (redes sociais), G1

média mensal

$$\begin{matrix} W \\ I \\ T \\ T \\ Y \end{matrix} \begin{bmatrix} 1744 \\ 1984 \\ 2592 \\ 128 \\ 72 \end{bmatrix} 5 \times 1$$

Fonte: Registro do G1 (2022)

Por último, o grupo escreveu a resposta em língua natural a questão que eles propuseram para a tarefa, Figura 56, ocorrendo assim a conversão 2.

Figura 56: Conversão 2, Tarefa 3 (redes sociais), G1

O grupo concluiu que através das médias diárias e mensal. Temos a média mensal, o valor das matrizes são meramente diferentes por conta de ser uma média mas o valor é próximo. Os valores estão em minutos. De acordo com os dados uma semana passa mais tempo no tiktok e menos tempo no youtube.

Fonte: Registro do G1 (2022)

Analisando a resposta escrita pelo grupo, percebemos em seus registros que eles fazem uma importante observação quando escrevem que “os valores das matrizes são meramente diferentes por conta de ser uma média mas o valor é próximo”. Embora não tenhamos registros das conversas entre eles, apenas os registros escritos, podemos perceber que o grupo fez uma comparação entre os valores encontrados, levando em consideração que os valores diários multiplicados por 30 (referentes a um mês) e os valores semanais multiplicados por 4 (referentes a um mês) resultaram em uma diferença entre eles, e nesse sentido, o grupo achou essa diferença algo relevante para ser escrito na resposta e para fazer uma justificativa para essa diferença.

Também percebemos que esse grupo, não construiu o gráfico referente aos valores encontrados e diferente da Tarefa 1, proposta pela professora na sala de aula e conduzidos pela professora na abordagem do Ensino por Investigação, apresentaram na resolução dessa tarefa uma menor quantidade de registros. Ainda assim, podemos dizer que houve compreensão, pois, segundo Duval (2003), a compreensão em matemática está associada à atividade de conversão de ao menos dois registros de representação semiótica.

No Quadro 10 está especificado os registros de partida e chegada que geraram as conversões dos registros realizados pelos estudantes na Tarefa 3 do G1.

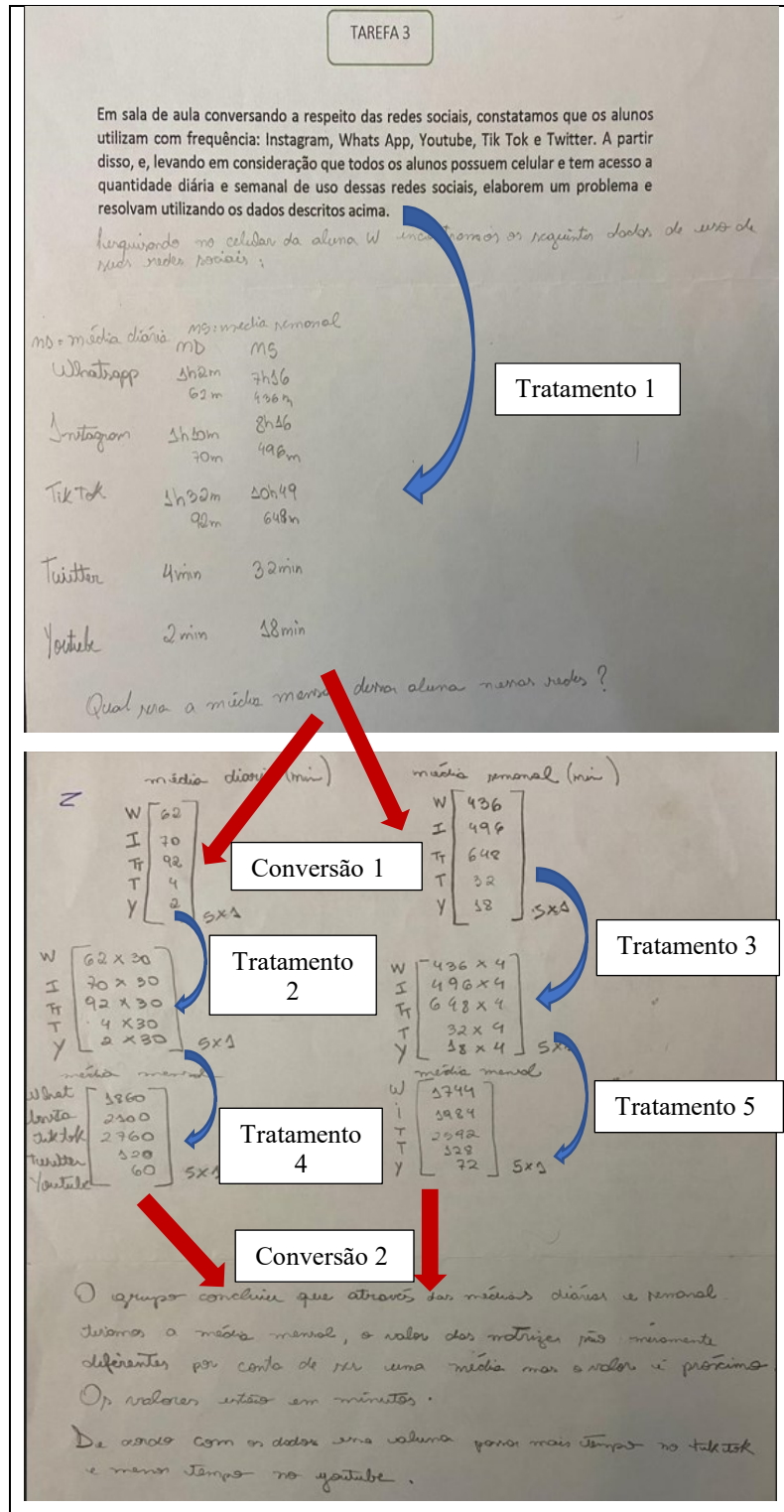
Quadro 10: Conversões realizadas na Tarefa 3 (redes sociais) pelo G1

Conversões	Registro de chegada	Registro de partida
Conversão 1	Língua natural	Registro matricial
Conversão 2	Registro matricial	Língua natural

Fonte: As autoras (2022)

Na Figura 57, está a imagem completa da Tarefa das redes sociais que foi apresentada para a análise, como também um esquema das transformações ocorridas. As setas azuis representam os tratamentos ocorridos e as setas vermelhas as conversões.

Figura 57: Esquema das transformações ocorridas na Tarefa 3 (redes sociais), G1



Fonte: As autoras (2022)

Segundo Duval (2003, p. 21), “A compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro”. Ainda, para Duval (2004) a utilização de diferentes representações semióticas tem influência na atividade cognitiva do aluno, nesse sentido, as representações semióticas são essenciais para a compreensão dos conceitos matemáticos. Em relação a coordenação o grupo apresentou a língua natural para expressar um problema e depois coletar os dados, representou os dados em matrizes e realizou a operação conforme acharam conveniente para responder ao problema criado, por fim, responderam o problema também em língua natural. Sendo assim, o grupo mostrou a ocorrência da coordenação entre os registros.


Analisando o desenvolvimento da Tarefa 3 pelo G1, e levando em conta as considerações abordadas por Duval podemos dizer que o grupo compreendeu e operou coordenadamente as transformações referentes ao objeto matemático, apresentando assim, indícios de aprendizagem referentes ao objeto matemático em estudo.

5.3 ANÁLISE DA TAREFA 5 - CONFECÇÃO DE MOCHILAS

A Tarefa 5 (confecção de mochilas), Figura 58, foi desenvolvida em junho de 2022, teve duração de quatro aulas, com os estudantes organizados em 5 grupos, conforme explicado na seção 3.3.1.

Figura 58: Tarefa 5 – Confecção de mochilas

TAREFA 5



Uma fábrica de mochilas utiliza três tamanhos de zíperes: pequeno, médio e grande; na confecção de dois modelos de mochilas: modelo X e modelo Y. Na fabricação do modelo X são utilizados 4 zíperes pequenos, 2 médios e 1 grande; na fabricação do modelo Y são utilizados 2 zíperes pequenos, 3 médios e 2 grandes. Essa fábrica recebeu a seguinte encomenda de mochilas para o último trimestre do ano: modelo X, 50 para outubro, 100 para novembro e 200 para dezembro; modelo Y, 50 para outubro, 150 para novembro e 100 para dezembro. Com base nessas informações, qual a quantidade de cada tamanho de zíperes necessários para a confecção das mochilas em cada mês?

Fonte: As autoras (2022)

5.3.1 Análise da Tarefa 5 do G5

O G5 é formado pelos estudantes Carina, Melissa, Julia, Lorena, Sofia, Rosa, nessa tarefa estavam no grupo todos os participantes.

O grupo encontrou dificuldades em compreender como operar com as informações da tarefa, como haviam feito na Tarefa 1 (floricultura) em relação a operação de adição e subtração de matrizes. Mesmo com algumas intervenções da professora, não conseguiam operar corretamente com a multiplicação, por esse motivo a tarefa foi desenvolvida em três momentos. O 1º momento refere-se à quando o grupo resolveu a tarefa por meio da adição de matrizes, conseqüentemente, não conseguiram resolver corretamente a tarefa, mesmo a professora utilizando o Ensino por Investigação, não compreenderam. O 2º momento refere-se à quando a professora, por meio do Ensino por Investigação, direcionou o grupo a entender que a tarefa estava relacionada com a multiplicação entre duas matrizes, mesmo assim, o grupo não realizou corretamente a operação. O 3º momento refere-se à quando a professora, por meio do Ensino por Investigação, direcionou o grupo a operar corretamente a multiplicação entre matrizes.

1º momento da Tarefa 5 (confecção de mochilas) do G5

Assim que foi entregue a tarefa para o grupo a estudante Carina fez o seguinte questionamento, de acordo com o excerto:

Carina: Professora, é mais e menos de matriz, de novo?

Professora: Você leu a tarefa? Analisou as informações contidas nela?

Carina: Não, mas deve ser.

Professora: Então, leia a tarefa e em grupo analisem as informações e a questão da tarefa para daí verificar se é mesmo adição e subtração de matrizes.

Melissa: Mas deve ser sim, porque a gente só sabe isso mesmo.

Professora: Hum... mas será que pode ter outra operação com matrizes além de adição e subtração?

Melissa: Lá vem a professora querendo complicar nossa vida.

Professora: Vamos trabalhar, leiam a tarefa com atenção, analisem as informações e vejam o que a tarefa pede, qualquer coisa me chamem.

A partir da leitura da tarefa feita pela estudante Carina, o grupo fez a relação entre os dados contidos e a formação de matrizes, de acordo com os excertos:

Melissa: Acho melhor organizar esse monte de coisas em uma tabela, para depois montar a matriz, se não, vai confundir tudo.

Lorena: Tem que ser duas, não uma só.

Rosa: Como assim?

Lorena: Primeiro a gente faz uma tabela com os números dos tamanhos e depois outra com os meses, vai ficar duas tabelas e cada tabela vai formar uma matriz. Entendeu?

Rosa: Acho que sim.

Melissa: Do jeito que fizemos nas outras tarefas, é a mesma coisa.

Carina: Eu tinha falado que é a mesma coisa, mas a professora gosta de complicar.

Continuando a desenvolver a tarefa, o grupo organizou as duas tabelas e as duas matrizes, conforme Figura 59. Realizando assim a conversão 1 que foi da passagem do enunciado da tarefa em língua natural para o registro tabular e em seguida a conversão 2 que foi da passagem do registro tabular para o registro matricial. De acordo com Duval (2012), a conversão desempenha um papel essencial na conceitualização e, para melhor percebê-la, examina-se o quanto a diversidade de registros de representação engloba.

Figura 59: Conversão 1 e 2, Tarefa 5 (confeção de mochilas), G5, 1º momento

	x	y
P	4	2
M	2	3
G	1	2

	X	Y
OUT	50	50
NOV	100	150
DEZ	200	100

P	4	2
M	2	3
G	1	2

3×2

OUT	50	50
NOV	100	150
DEZ	200	100

3×2

Fonte: Registro do G5 (2022)

Podemos perceber que o grupo fez as tabelas e as matrizes conforme eles haviam trabalhado até o momento, ou seja, adição e subtração de matrizes, as tabelas com o mesmo número de linhas e colunas e as duas matrizes de mesma ordem não levando em consideração que se tratavam de elementos diferentes, uma era relativa ao tamanho e a outra aos meses. Na sequência, realizaram a adição de matrizes, assim como haviam falado anteriormente, e como haviam trabalhado nas tarefas anteriores, realizando assim o tratamento 1 e 2, Figura 60. Nesse caso e de acordo com Duval (2009), tratamentos são transformações de representações internas a um mesmo registro, os tratamentos continuaram no registro matricial.

Figura 60: Tratamento 1 e 2, Tarefa 5 (confeção de mochilas), G5, 1º momento

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 54 + 52 \\ 102 + 153 \\ 207 + 402 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11 \\ 106 \\ 205 \\ 303 \end{bmatrix}$$

Fonte: Registro do G5 (2022)

A professora ao passar por esse grupo, percebeu que realizaram a adição de matrizes conforme Figura 60 e inclusive adicionaram os elementos de cada linha com o intuito de acharem a quantidade de zíperes, nesse caso, pequenos, de cada mês, de acordo com os excertos:

Professora: Por que vocês montaram as tabelas assim?

Melissa: Ah, por que sim (risos). Olha, tá elemento com elemento, para fazer a soma.

Professora: Teriam outra forma de organizar esses dados? Vocês entenderam a questão da tarefa? É a soma que vocês estão procurando?

Melissa: Teria? Como? Não entendi!

Professora: (leu a questão da tarefa): Com base nessas informações, qual a quantidade de cada tamanho de zíperes necessários para a confecção das mochilas em cada mês? Se vocês fizerem a soma, o que obterão?

Carina: Se somar vai ficar assim: $4 + 50 = 54$, 54 é a quantidade de zíperes pequenos de outubro da mochila X, é isso? E tem o $2 + 50 = 52$, quantidade de zíperes pequenos da mochila Y. Juntos serão $54 + 52 = 106$ zíperes pequenos para fazer as mochilas em outubro. Pronto, respondi.

2º momento da Tarefa 5 (confeção de mochilas) do G5

A partir desse momento e percebendo a dificuldades dos estudantes a professora começou a levantar alguns questionamentos mais direcionados para a multiplicação de matrizes, de acordo com os excertos:

Professora: Pensem comigo... faz sentido o que a Carina acabou de falar? As duas matrizes representam as mesmas coisas?

Melissa: A primeira representa o tamanho e a segunda os meses, não representam não. Mas, peraí, as duas tem o X e o Y.

Professora: E o que é o X e o Y?

Melissa: São os dois modelos de mochilas que tem.

Professora: Isso. Vocês acham que o 106 responde à questão da pergunta, em partes, é claro. Vamos pegar outubro como exemplo: será que no mês de outubro para fabricar dois tipos de mochilas com zíperes pequenos, seriam necessários 106 zíperes?

Silêncio.

Professora: E daí pessoal?

Rosa: Não sei mais nada.

Professora: Tá, vamos lá. Bom... 4 zíperes pequenos da mochila X para fazer 50 mochilas, darão quantos zíperes?

Melissa: $4 \times 50 = 200$ zíperes.

Professora: Isso, continuem...

Melissa: Então, $2 \times 50 = 100$ zíperes da mochila Y no mês de outubro.

Professora: Isso... uhullll... e agora, a questão pede a quantia em cada mês. Como será a quantia no mês de outubro?

Melissa: Ora, $200 + 100 = 300$ zíperes pequenos.

Professora: Isso, parabéns! O que vocês observaram até aqui? A operação ainda continua sendo adição?

Melissa: Não, não... dá bem mais, é multiplicação, multiplicação dos valores correspondentes dos tamanhos dos zíperes de cada mês para cada tipo de mochila.

Professora: E depois? Depois disso, da multiplicação?

Melissa: Daí soma os valores, pois são duas mochilas X e Y.

Professora: Ótimo, vocês são demais! Mãos à obra.

Carina: Então o que fizemos está errado? Tem que fazer outro?

Professora: O que vocês acham?

Melissa: Tá errado, temos que fazer outro sim.

Após entenderem que nessa tarefa a operação a ser utilizada é a multiplicação de matrizes, o grupo tentou, mas não soube sistematizar para operar corretamente, realizando assim os tratamentos 1, 2 e 3 conforme mostra a Figura 61:

Figura 61: Tratamento 1, 2 e 3, Tarefa 5 (confeção de mochilas), G5, 2º momento

$$\begin{bmatrix} 4 \times 50 + 2 \times 50 \\ 2 \times 100 + 3 \times 150 \\ 1 \times 200 + 2 \times 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 + 100 \\ 200 + 450 \\ 200 + 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 650 \\ 400 \end{bmatrix} \quad 3 \times 1$$

Fonte: Registro do G5 (2022)

3º momento da Tarefa 5 (confeção de mochilas) do G5

De acordo com os excertos, pode-se perceber que o grupo não ficou satisfeito com o resultado encontrado:

Carina: Professora, vem aqui.

Professora: Oi.

Carina: Se a gente entendeu, se é que entendeu, tem que ter nove resultados que são 3 meses por 3 tamanhos, $3 \times 3 = 9$, mas do jeito que a gente tá fazendo deu 3 resultados. Olha aqui (mostraram a figura 62).

Professora: O que significam esses resultados? Me expliquem?

Rosa: O 300 é... é... peraí... me ajuda gente... (risos)... o 300 é a quantidade de zíperes pequenos produzidos em outubro.

Professora: E a quantidade de zíperes pequenos produzidos em novembro e dezembro? E a quantidade de zíperes médios produzidos em outubro, novembro e dezembro? E a quantidade de zíperes grandes produzidos em outubro, novembro e dezembro?

Carina: Então, tá faltando valores, tá errado, são nove valores.

Professora: O que vocês podem fazer, tentar fazer? Para acharem esses nove valores? Observem a ordem das matrizes, quais ordens vocês fizeram?

Melissa: Hum... as duas fizemos 3 linhas e 2 colunas, pois pensamos que era adição e adição tem que ter a mesma ordem.

Professora: Tá, pera lá... vamos pensar... se essa matriz não deu certo vocês devem montar outra certo?

Melissa: Com os mesmos valores? Certo?

Professora: Isso, isso mesmo. Mas agora, como estão trabalhando com multiplicação de matrizes o sistema de resolução é diferente da adição e subtração e as ordens das matrizes podem ser diferentes. Entenderam?

Carina: Tá, mas e daí? Como faz? Como monta?

Professora: Conservem a primeira matriz como vocês fizeram e invertam a ordem de linhas por colunas, da segunda.

Carina: Tá, entendi, vou fazer.

De acordo com os questionamentos feitos pela professora e das colocações e entendimentos levantados pelos estudantes, perceberam que quando trabalhado com matrizes podemos fazer operações diferentes da adição e subtração, e que, enquanto na adição e subtração a ordem das matrizes devem ser as mesmas, na multiplicação entre duas matrizes isso não se aplica em todos os casos.

Na Figura 62, o grupo fez novamente outras tabelas e outras matrizes, conforme sugeriu a professora e de acordo com o que entenderam, realizando assim as conversões 1 e 2.

Para Duval (2009), a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva mais difícil de ser adquirida.

Figura 62: Conversão 1 e 2, Tarefa 5 (confeção de mochilas), G5, 3º momento

	X	Y
P	4	2
M	2	3
G	1	2

	Out	Nov	Dez
X	50	100	200
Y	50	150	100

Fonte: Registro do G5 (2022)

De acordo com os excertos, o grupo questionou porque essa troca foi necessária:

Melissa: *Você falou para trocar, trocamos. E agora? Por que?*

Professora: *Observem as ordens das duas matrizes, o que elas têm em comum?*

Melissa: *Uma é o contrário da outra, isso?*

Professora: *O que mais? O que é igual o que é diferente?*

Carina: *Acho que entendi... olha aqui... a linha da primeira é igual ao número da coluna da segunda e a coluna da primeira é igual a linha da segunda.*

Professora: *Bingo... uhulll... para ocorrer a multiplicação entre duas matrizes existe uma condição: o número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda matriz, se isso não ocorrer não conseguimos fazer a multiplicação entre duas matrizes.*

Carina: *Repete... acho que entendi... mas explica de novo.*

Em seguida a professora explicou na folha que eles desenvolveram a tarefa circulando o número de colunas da primeira matriz e o número de linhas da segunda matriz, Figura 62, explicando que esses valores devem ser os mesmos para conseguir realizar a multiplicação entre duas matrizes. De acordo com os excertos, podemos perceber que houve mais dúvidas quando a essa condição:

Melissa: *Professora, então o número de colunas da primeira tem que ser igual ao número de linhas da segunda, entendi... mas e a linha da primeira e a coluna da segunda tem que ser a mesma também, isso?*

Professora: Não necessariamente, podem ser iguais como podem ser diferentes, não importa, o que importa é o número de colunas da primeira ser o mesmo do número de linhas da segunda.

Melissa: Tá, mas aqui é igual.

Professora: Sim, nessa tarefa é igual, mas não precisa serem iguais sempre, podem ser diferentes também. Aproveitando essa pergunta: o que tem em comum o número de linhas da primeira matriz com o número de colunas da segunda matriz e com a quantidade de resultados que vocês devem encontrar?

Carina: Hummm... acho que sei... nove? Nove resultados? $3 \times 3 = 9$? Isso? 3 tamanhos de zíperes e 3 meses.

Professora: Parabéns!!! Isso mesmo. O número de linhas da primeira matriz com o número de colunas da segunda matriz, vai formar a ordem da matriz resultante, ou seja, se a matriz for 3×3 , vocês terão 9 elementos na matriz.

Carina: Que legal, muito legal! Faz sentido.

Professora: Eu sempre falo para vocês que na matemática tudo tem sentido. Agora podem continuar.

Nesse momento a professora saiu desse grupo e foi para outro grupo, mas rapidamente foi chamada novamente, de acordo com os excertos:

Rosa: Professora, não sabemos o que fazer com essas duas matrizes, a multiplicação entre elas, como faz?

Professora: Bom, vamos lá... presta atenção aqui... é simples mas envolve bastante conta... observem que o número de linhas da primeira matriz é igual ao número de colunas da segunda, certo?

Rosa: Isso.

Professora: Sendo assim, vocês devem multiplicar o primeiro elemento da linha da primeira matriz pelo primeiro elemento da coluna da segunda matriz (a professora mostrou no papel com um quadrado envolvendo os números). Agora, vocês devem fazer a mesma coisa com o segundo elemento, ou seja, o segundo elemento da primeira linha da primeira matriz multiplica o segundo elemento da primeira coluna da segunda matriz. Entenderam? Depois que multiplicaram esses números, vocês terão dois valores, daí vocês somam esses valores, obtendo assim a quantidade de zíperes pequenos necessários para confeccionar as mochilas no mês de outubro.

Rosa: Tudo isso para achar um valor?

Professora: Sim. Agora vocês devem achar os outros valores, fazendo a mesma coisa, mas agora vocês irão fazer as multiplicações da primeira linha da primeira matriz com a segunda coluna da segunda matriz. Entenderam?

Rosa: Mais ou menos... explica de novo...

Professora: Bom, tentem fazer o que acabei de explicar, daí continuo a explicação.

Rosa: Tá. É para fazer tudo dentro de matriz?

Professora: Sim, estamos trabalhando com a multiplicação de...

Rosa: Matrizes.

Professora: Isso.

O grupo então foi tentar resolver essa primeira multiplicação e a professora foi atender outro grupo. Assim que fizeram o que foi pedido chamaram a professora:

Carina: Olha aqui, é isso?

Professora: Vocês recordam que já fizemos qual seria o valor do primeiro elemento, fizemos juntos, oralmente? Lembram?

Melissa: Lembro sim, era 300, se não tá errado era 300 zíperes pequenos no mês de outubro.

Professora: Qual resultado vocês encontraram agora?

Melissa: 300.

Professora: E daí, o que vocês me falam sobre isso?

Melissa: Que tá certo.

Professora: Podem continuar... isso mesmo...

Melissa: Mas, continua como? Onde vamos agora?

Professora: Pensem comigo, se para achar o primeiro valor da resposta, vocês utilizaram os valores da primeira linha e da primeira coluna, para achar o segundo valor da resposta, que será o segundo elemento da resposta vocês devem multiplicar o quê? O que faz sentido?

Carina: Hummm... o segundo elemento da resposta... deve ser a primeira linha pela segunda coluna, é isso? Ou não? Tá certo?

Professora: Certíssimo... você entendeu o espírito da coisa! E para achar o terceiro elemento da resposta? Que fica na primeira linha, pois já sabemos que será uma matriz 3×3 .

Carina: Vai ser então... primeira linha da primeira matriz vezes a terceira coluna da segunda matriz.

Professora: Pronto, que beleza! Você entendeu... agora você explica para o grupo, com calma, porque é bastante conta mesmo.

Carina: E depois, faz o quê? Tem mais linhas da primeira matriz que não foi feito nada.

Professora: Ai está o ponto... você vai fazer a mesma coisa só que agora utilizando a segunda linha da primeira matriz! Entendeu?

Carina: Pego a segunda linha e faço vezes para as três colunas?

Professora: Eita menina esperta... isso mesmo... achando assim todos os elementos que respondem à questão da tarefa que são nove valores, matriz 3×3 .

A partir desse momento podemos perceber que a estudante compreendeu como operar corretamente a multiplicação de matrizes, pois a condição para ocorrer a multiplicação entre duas matrizes já havia entendido.

Como a sala tinha 30 estudantes e a turma era grande, a professora tinha que atender outros grupos, não seria prudente naquele momento a professora ficar apenas naquele grupo para explicar para os outros integrantes como fazer corretamente a operação de multiplicação entre matrizes. Por esse motivo foi pedido que a estudante que entendeu o processo, ensinasse para o grupo como resolver, levando em consideração que estavam trabalhando em grupo.

Dando sequência, o grupo resolveu então a multiplicação entre as matrizes, obtendo o resultado corretamente, Figura 63, e fizeram agora tratamentos 1, 2 e 3:

Figura 63: Tratamento 1, 2 e 3, Tarefa 5 (confecção de mochilas), G5, 3º momento

$$\begin{bmatrix} (4 \times 50) + (2 \times 50) & (4 \times 100) + (2 \times 150) & (4 \times 200) + (2 \times 100) \\ (2 \times 50) + (3 \times 50) & (2 \times 100) + (3 \times 150) & (2 \times 200) + (3 \times 100) \\ (1 \times 50) + (2 \times 50) & (1 \times 100) + (2 \times 150) & (1 \times 200) + (2 \times 100) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 200 + 100 & 400 + 300 & 500 + 200 \\ 100 + 150 & 200 + 450 & 400 + 300 \\ 50 + 100 & 100 + 300 & 200 + 200 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} P & N & D \\ 300 & 700 & 1000 \\ 250 & 650 & 700 \\ 150 & 400 & 400 \end{matrix}$$

Fonte: Registro do G5 (2022)

O grupo após desenvolver corretamente e detalhadamente a multiplicação entre as matrizes, chamou a professora:

Rosa: Olha aqui terminamos, está certo?

Professora: Vocês acham que está certo? E por que?

Rosa: Acho que sim... acho... o resultado está 3×3 e achamos nove elementos, achamos que os valores estão legais para responder a questão.

Professora: Como assim? Resultados legais?

Rosa: Os nove resultados fazem sentido, é isso.

Professora: Vocês conseguem fazer outro registro, além do que fizeram até agora?

Carina: O gráfico?

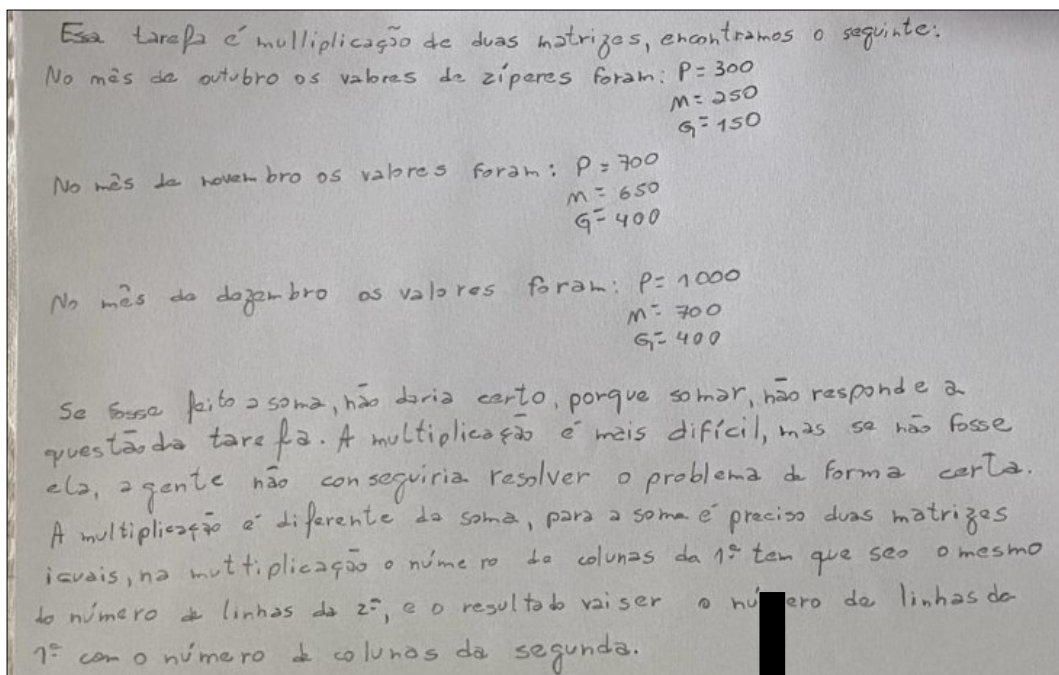
Professora: Sim.

Carina: Ah professora, isso deu muito trabalho, tem que fazer mesmo?

Professora: Vamos fazer assim então, escrevam... quero que escrevam o que entenderam do desenvolvimento dessa tarefa.

Por fim, escreveram a conclusão da tarefa ocorrendo assim a conversão 3, Figura 64:

Figura 64: Conversão 4, Tarefa 5 (confeção de mochilas), G5, 3º momento



Fonte: Registro do G 5 (2022)

Essa tarefa é multiplicação de duas matrizes, encontramos o seguinte:

No mês de outubro os valores dos zíperes foram: $P = 300$
 $M = 250$
 $G = 150$

No mês de novembro os valores foram: $P = 700$
 $M = 650$
 $G = 400$

No mês de dezembro os valores foram: $P = 1000$
 $M = 700$
 $G = 400$

Se fosse feito a soma, não daria certo, por que somar, não responde à questão da tarefa. A multiplicação é mais difícil, mas se não fosse ela, a gente não conseguiria resolver o problema de forma certa. A multiplicação é diferente da soma, para a soma é preciso das matrizes iguais, na multiplicação o número de colunas da 1ª tem que ser o mesmo do número de linhas da 2ª, e o resultado vai ser o número de linhas da 1ª com o número de colunas da segunda.

Percebemos, no desenvolvimento dessa tarefa, a importância da utilização da abordagem utilizada do Ensino por Investigação, pois de acordo com Sasseron (s/d) o professor deve proporcionar momentos onde ocorra a troca de ideias distintas e discordantes, para tanto o professor deve estar apto para fazer perguntas e a ouvir as respostas dos estudantes. Corroborando com esse entendimento, ao desenvolver essa tarefa, ocorreu a necessidade da divisão dos 3 momentos, pois a professora percebeu a dificuldade existente nos dois primeiros momentos, mas mesmo assim, no 3º momento, utilizando do Ensino por Investigação conseguiu que o grupo compreendesse corretamente operar a multiplicação entre matrizes.

No Quadro 11, está especificado os registros de partida e chegada que geraram as conversões realizadas pelos estudantes no 3º momento na Tarefa da confecção de mochilas do G5.

Quadro 11: Conversões realizadas na Tarefa 5 (confecção de mochilas), pelo G5, 3º momento

Conversões	Registro de partida	Registro de chegada
Conversão 1	Língua natural	Registro tabular
Conversão 2	Registro tabular	Registro matricial
Conversão 3	Registro matricial	Língua natural

Fonte: As autoras (2022)

Em relação aos indícios de aprendizagem, analisando os registros realizados no 3º momento, podemos concluir que de acordo com Duval (2011, p. 119) “Mudar de registro uma representação dada ou obtida após um tratamento muito elementar é o primeiro gesto do pensamento em matemática. Sem esse gesto [...], nenhuma atividade ou encaminhamento matemático é possível”. Ainda, segundo Duval (2009) a conversão das representações é uma atividade fundamental para a aprendizagem, assim como as atividades de formação e de tratamento. Ainda segundo Duval (2003) para que ocorra a compreensão em matemática é necessário a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica, como também a mobilização desses registros que sinaliza a criatividade do aluno. Nesse sentido, concluímos que o grupo analisado apresentou indícios do conceito matemático estudado nessa tarefa, levando em consideração a importância de se desenvolver essa tarefa na abordagem didática do Ensino por Investigação.

Na Figura 65, está a imagem completa da Tarefa da confecção de mochilas ocorrida nos 3 momentos, que foi apresentada para a análise. Nela encontra-se um esquema das transformações ocorridas apenas no 3º momento, que foi o momento que o grupo por meio do

Ensino por Investigação resolveu corretamente a tarefa. As setas azuis representam os tratamentos ocorridos e as setas vermelhas as conversões.

Figura 65: Esquema das transformações ocorridas na Tarefa 5 (confeções de mochilas), 3º momento, G5

TAREFA 5

Uma fábrica de mochilas utiliza três tamanhos de zíperes: pequeno, médio e grande; na confecção de dois modelos de mochilas: modelo X e modelo Y. Na fabricação do modelo X são utilizados 4 zíperes pequenos, 2 médios e 1 grande; na fabricação do modelo Y são utilizados 2 zíperes pequenos, 3 médios e 2 grandes. Essa fábrica recebeu a seguinte encomenda de mochilas para o último trimestre do ano: modelo X, 50 para outubro, 100 para novembro e 200 para dezembro; modelo Y, 50 para outubro, 150 para novembro e 100 para dezembro. Com base nessas informações, qual a quantidade de cada tamanho de zíperes necessários para a confecção de mochilas em cada mês?

Conversão 1

Conversão 2

Tratamento 1

Tratamento 2

Tratamento 3

Conversão 3

Essa tarefa é multiplicação de duas matrizes, encontramos o seguinte:

No mês de outubro os valores de zíperes foram: P=300
M=250
G=150

No mês de novembro os valores foram: P=700
M=650
G=400

No mês de dezembro os valores foram: P=1000
M=700
G=400

Se fosse feita a soma, não daria certo, porque somar, não responde a questão da tarefa. A multiplicação é mais difícil, mas se não fosse ela, a gente não conseguiria resolver o problema de forma certa. A multiplicação é diferente da soma, para a soma é preciso das matrizes iguais, na multiplicação o número de colunas da 1ª tem que ser o mesmo do número de linhas da 2ª, e o resultado vai ser o número de linhas da 1ª com o número de colunas da segunda.

Fonte: As autoras (2022)

5.3.1 Análise da Tarefa 5 do G1

O G1 é formado pelos estudantes Jéssica, Bete, João, Bruna, Laila e Milena, nessa tarefa estavam no grupo todos os participantes.

O grupo encontrou dificuldades em compreender a tarefa, de início compreenderam que o objeto matemático da tarefa era a adição de matrizes. Por esse motivo, a tarefa foi desenvolvida em três momentos. O 1º momento refere-se à quando o grupo resolveu a tarefa por meio da operação de adição de matrizes, sendo assim, não chegaram ao resultado correto referente a questão da tarefa. O 2º momento refere-se à quando a professora observou a dificuldade apresentada pelo grupo e entrevistou por meio do Ensino por Investigação, direcionando, orientando o grupo a desenvolverem a tarefa de maneira correta. O 3º momento refere-se à quando a professora percebendo a dificuldade encontrada pelo grupo, e pela falta de tempo hábil para atender os outros grupos e pelas inúmeras dúvidas que surgiam, utilizou de uma outra estratégia para abordar a tarefa, mas sempre na abordagem didática do Ensino por Investigação.

1º momento da Tarefa 5 (confecção de mochilas) do G1

Após a leitura da tarefa feita pela estudante Bete, o grupo considerou que a tarefa era referente a adição de matrizes, conforme excertos:

Bete: Acho que é soma, soma de matrizes, dá pra fazer soma.

Laila: É, tá pedindo a quantidade de cada mês, é soma mesmo.

Bete: Isso, vamos fazer as matrizes que são duas e depois fazemos a soma.

Laila: A gente começa fazendo a tabela e depois a matriz, isso?

Bete: Não precisa, a gente já sabe que é matriz, a gente já monta e pronto.

De acordo com a Figura 66, o grupo então realizou a montagem das duas matrizes, ocorrendo a primeira conversão, e, em seguida fizeram a adição de matrizes, ocorrendo o primeiro tratamento.

Figura 66: Conversão 1 e tratamento 1, Tarefa 5 (confeção de mochilas), G1, 1º momento

Handwritten mathematical work showing the conversion of a word problem into matrix form. It includes two 3×2 matrices for 'modelo x' and 'modelo y', and two 3×2 matrices for 'mochila x' and 'mochila y'. The matrices contain numerical values and algebraic expressions like '50 + 4', '50 + 2', '100 + 2', '150 + 3', '200 + 3', '50 + 2', '50', '100', '150', '200', '54', '52', '102', '153', '201', '102'.

Fonte: Registro do G1 (2022)

Em seguida, de acordo com os excertos, o grupo finalizou a tarefa:

Bete: Pronto, é isso?

Laila: Sim, tá certo. Professora?

Professora: Oi.

Laila: Terminamos, tá aqui.

Professora: Agora me expliquem o que vocês desenvolveram.

Bete: A gente somou as duas matrizes e pronto.

Professora: Vocês responderam à questão da pergunta?

Jéssica: Sim.

Professora: Me explica.

Jéssica: A gente respondeu, ué, tá aqui.

Professora: Vou ler a questão para vocês analisarem, prestem atenção: Com base nessas informações, qual a quantidade de cada tamanho de zíperes necessários para a confecção de mochilas em cada mês? Vocês responderam isso?

Jéssica: Sim, respondemos.

Professora: Me explique.

Jéssica: São duas matrizes com valores, a gente somou cada valor com cada valor, igual aqui, ó!

Professora: Mas isso que vocês fizeram, tem sentido para responder a tarefa? Pensem...

Jéssica: A gente fez o que a gente sabe professora, somou o que a gente tinha.

Professora: Eu sei que vocês fizeram como aprenderam, mas será que nessa tarefa também é soma? Será que dá pra fazer outra operação? Será que só a soma responde à questão da tarefa?

Jéssica: Ah professora... agora você me deixou na dívida... não sei não... alguém sabe?

Silêncio.

2º momento da Tarefa 5 (confecção de mochilas) do G1

Nesse 2º momento, ao perceber que o grupo não compreendeu que poderiam utilizar outra operação além da adição de matrizes e também por não perceberem que a resposta estava incorreta, pois deveria ter mais valores encontrados para responder à questão, entre outras coisas importantes, a professora começou a fazer perguntas, incentivando o grupo a olhar para a tarefa de outra maneira:

Professora: Quantos valores vocês encontraram?

Bete: Mas você falou que tá errado...

Professora: Eu não falei que está errado, eu falei para vocês me explicarem o que tinha sido feito e se fazia sentido o que fizeram.

Laila: 6 valores. Primeiro 54, depois 52, depois 102, 153, 201 e 102.

Professora: Esses seis valores, respondem à questão ou estão faltando valores?

Laila: Não sei, não sei mesmo.

Professora: São quantos tamanhos de zíperes e quantos meses?

Laila: Pequeno, médio e grande e outubro, novembro e dezembro.

Professora: Para os tamanhos temos duas opções de mochilas, certo? Então só para outubro serão confeccionados determinada quantidade de zíperes pequenos, médios e grandes, certo?

Laila: Sim.

Professora: Conseguem continuar o raciocínio?

Laila: Para novembro e dezembro mesma coisa?

Professora: Isso, serão então quantos resultados?

Laila: 3 para outubro, 3 para novembro e 3 para dezembro. $3 + 3 + 3 = 9$.

Professora: Agora me respondam, a resposta de vocês está correta? Responde à questão?

Bete: Não, fizemos algo errado, achamos 6 valores e não 9, como deve ter.

Professora: Agora vocês estão entendendo... ufa... Bom, vocês fizeram adição, com a adição encontraram 6 valores, qual operação conseguem fazer para achar os 9 valores?

Bete: $3 + 3 + 3 = 9$, que é a mesma coisa que $3 \times 3 = 9$. Multiplicação?

Professora: Isso, temos outra operação além de apenas adição, subtração e multiplicação de um número real por uma matriz, temos a multiplicação entre duas matrizes.

Bete: Ah, não sabia não... não ia saber nunca...

Professora: Se é preciso de 9 valores, pensem no que esse número 9 apresenta de relação com a ordem da matriz que vocês fizeram.

Bete: As duas matrizes têm ordem 3 por 2, tá certo, olha aqui.

Professora: Por que elas têm essa ordem?

Laila: Porque a primeira pequeno, médio e grande com dois formatos e a segunda outubro, novembro e dezembro, dois formatos também, daí fica 3 por 2, cada uma.

Professora: Tá. Mas seu eu falar pra vocês inverter a ordem da segunda matriz, vocês conseguem fazer?

Jéssica: Pra que isso professora?

Professora: Para podermos dar início a multiplicação entre duas matrizes, já explico o resto.

Conforme a professora solicitou, fizeram então a mudança de ordem da segunda matriz, ocorrendo assim para esse 2º momento a conversão 1, que foi da passagem de língua natural para o registro matricial, conforme Figura 67:

Figura 67: Conversão 1, Tarefa 5 (confeção de mochilas), G1, 2º momento

	MODELO X	MODELO Y
P	4	2
M	2	3
G	1	2
		3x2

	out.	NOV.	DEZ.
M.X	50	100	200
M.Y	30	150	100
			2x3

Fonte: Registro do G1 (2022)

Em seguida, chamaram a professora e perguntaram?

Jéssica: É isso que era para fazer?

Professora: Sim, o que vocês conseguem perceber na ordem agora das duas matrizes?

Jéssica: Estão trocadas.

Professora: Explique.

Jéssica: Enquanto a primeira a ordem é 3 por 2, na segunda a ordem é 2 por 3.

Professora: Essa é a condição para ocorrer a multiplicação entre duas matrizes, ou seja, o número de colunas da primeira matriz deve ter o mesmo número de linhas da segunda matriz, se isso não ocorrer, a multiplicação entre duas matrizes, não é possível.

Bete: Nossa, que bagunça heim...

Professora: Não é bagunça não, é só prestar atenção na ordem, olhem aqui. (Nesse momento a professora sublinhou o que ela havia falado, na folha do desenvolvimento da questão dos estudantes, figura 68).

Jéssica: Então, por isso que a adição tava errada?

Professora: A adição estava errada por que gente?

Bete: A tarefa não é respondida com adição, mas sim com multiplicação, se usasse a adição não dava a resposta correta.

Professora: Isso, a tarefa não era respondida com a adição das duas matrizes, mas com a multiplicação entre elas. Podem continuar a fazer.

Bete: Tá!

Em seguida, a professora foi atender outro grupo que estava com dificuldades também em entender a questão do problema corretamente, mas logo, a grupo 1 solicitou a professora:

Bete: Como faz?

Professora: Tentaram?

Bete: Não dá pra multiplicar número por número, a ordem são diferentes, vai ficar faltando ou sobrando, não sei, tá confuso isso aqui.

Professora: Você não vai multiplicar número por número não, isso era na adição e com as ordens iguais, agora mudou a ordem e provavelmente mudará a maneira de resolver. Alguém tem alguma ideia de como fazer?

Nesse momento, a professora percebeu que os quatro grupos G1, G2, G3 e G4 estavam com dificuldades em fazer a multiplicação entre as duas matrizes, pois as perguntas que eles faziam eram praticamente as mesmas e a professora não estava dando conta de atender os grupos, pois para cada atendimento o tempo para os questionamentos feitos pela professora e as respostas vindas dos estudantes estavam sendo demorados. A professora então, sentiu a necessidade de mudar o atendimento de grupo por grupo, pois o tempo para os grupos que ficaram esperando o atendimento estava ficando grande e os grupos estavam se dispersando com essa espera. Dessa maneira, a professora fez uma pergunta direcionada para a sala:

Professora: Quem entendeu como realizar a multiplicação entre duas matrizes?

3º momento da Tarefa 5 (confecção de mochilas) do G1

A estudante Carina, do G5 que havia aprendido como fazer a multiplicação, prontamente levantou a mão e a professora, aproveitando esse momento, pediu para a estudante ir ao quadro explicar aos colegas como realizar o processo de multiplicação.

A professora então propôs, que fosse criado uma outra situação com a ajuda dos estudantes, para desenvolver todo o processo da multiplicação entre duas matrizes. A partir desse momento, a professora não utilizou mais os áudios de cada grupo, pois como a conversa

estava sendo com a sala toda, os áudios de cada grupo sofreram interferência dos demais, por esse motivo a professora depois dessa aula, fez um relato sobre o acontecido.

A sala sugeriu uma situação em que ocorresse duas matrizes: uma sendo mercados e outra sendo o preço de vários produtos em cada mercado. A estudante Carina foi ao quadro e com a ajuda de toda a turma, foi fazendo as duas matrizes: matriz A (quantidade de alimentos por (kg) e matriz B (preço por mercado por kg).

De acordo com a Figura 68, e de acordo com as anotações feitas pela professora, a turma elencou 5 tipos de alimentos (arroz, feijão, café, farinha e carne) para a matriz A, sendo uma matriz de ordem 1×5 e para a matriz B, elencaram 5 tipos de mercado (mercado 1,2,3,4 e 5) e colocaram de acordo com a vivência da turma os preços que acharam convenientes para cada produto elencado na matriz A, sendo assim montaram uma matriz de ordem 5×5 .

O primeiro objetivo com essas duas matrizes, era mostrar aos estudantes que a condição para ocorrer a multiplicação entre duas matrizes era que a coluna da primeira matriz seja a mesma quantidade que a linha da segunda matriz, tendo em vista que isso eles já haviam compreendido, e ao colocarem no quadro, a professora percebeu esse êxito.

Figura 68: Estudante organizando no quadro de giz a multiplicação entre duas matrizes



Fonte: Registro da professora (2022)

Para o 3º momento, a estudante Carina detalhou para a turma como realizar de forma correta a multiplicação entre duas matrizes, primeiro ela multiplicou cada elemento da primeira matriz por cada valor referente para o mercado 1, depois de multiplicado cada valor ela somou os valores, obtendo assim o preço dessa compra no mercado 1. Em seguida, fez o mesmo procedimento para o mercado 2, 3, 4 e 5, obtendo assim o valor da compra para cada mercado. A matriz resultante foi uma matriz de ordem 1×5 , pois continha apenas 1 linha com 5 colunas, onde trazia o preço da compra de cada mercado.

Foi um momento rico de aprendizado entre os estudantes, pois a estudante Carina foi realizando a multiplicação conforme os estudantes foram falando, tentando. Em todo momento a professora acompanhava e também orientava quando sentia necessidade. Não houve fotos desse momento, pois a professora esqueceu de tirar, tendo em vista a discussão calorosa que aconteceu em sala de aula e das inúmeras perguntas surgidas.

Após realizada a multiplicação das duas matrizes, pela ajuda da estudante Carina com a participação da turma, a professora foi ao quadro e apenas reforçou novamente o que os estudantes já haviam feito, tirando algumas dúvidas e levantando alguns apontamentos que surgiram como:

- 1- *A matriz resposta foi 1×5 , que é a linha da primeira e a coluna da segunda? A ordem?*
- 2- *Então primeiro multiplica cada valor por cada valor, e depois soma?*
- 3- *Não dá para somar essa matriz, né? Só multiplicar.*
- 4- *É mais complicado, a soma é mais fácil. Tem muita conta para fazer.*
- 5- *Quando é apenas um número que multiplica uma matriz é bem mais fácil, do que duas matrizes.*
- 6- *Dá para confundir as contas, tem que prestar atenção.*
- 7- *E se as matrizes forem de mesma ordem, as duas? Dá para fazer?*
- 8- *Dá para fazer entre três matrizes, a multiplicação?*
- 9- *Sem ser a coluna da primeira igual a linha da segunda, não dá para resolver?*

Esses questionamentos e apontamentos, foram respondidos no quadro pela professora, para toda a sala, foi um momento muito produtivo, pois o que até o momento os estudantes não haviam compreendido, nesse momento aproveitaram para sanar essas dúvidas.

Continuação do 2º momento da Tarefa 5 (confecção de mochilas) do G1

Após o desenvolvimento do 3º momento, o G1 retornou de onde pararam que era realizar a multiplicação entre as duas matrizes, de acordo com os excertos percebemos que compreenderam corretamente todo esse processo:

Bete: Entenderam como faz?

Jéssica: Acho que sim! Pode deixar que eu faço. Mas me ajudem porque é meio confuso. Professora: Por onde começamos?

Professora: Olha, aqui ó... comecem pela primeira linha da primeira matriz multiplicando a primeira coluna da segunda matriz, façam um círculo em volta para não se perderem. Agora tentem fazer.

Bete: Vamos fazer as continhas aqui do lado, para não confundir, depois passamos para a matriz.

Figura 69: Tratamento 1, Tarefa 5 (confeção de mochilas), G1, continuação do 2º momento

$50 \times 4 = 200$	$50 \times 2 = 100$	$50 \times 2 = 100$
$50 \times 1 = 50$	$50 \times 2 = 100$	$50 \times 3 = 150$
$100 \times 4 = 400$	$100 \times 2 = 200$	$100 \times 3 = 300$
$150 \times 2 = 300$	$150 \times 2 = 300$	$150 \times 3 = 450$
$200 \times 4 = 800$	$200 \times 2 = 400$	$200 \times 1 = 200$
$300 \times 1 = 100$	$100 \times 2 = 200$	$100 \times 2 = 200$

Fonte: Registro do G1 (2022)

Figura 70: Tratamento 2, Tarefa 5 (confeção de mochilas), G1, continuação do 2º momento

$200 + 100$	$400 + 300$	$800 + 200$
$100 + 150$	$200 + 450$	$400 + 300$
$50 + 100$	$100 + 300$	$200 + 300$

Fonte: Registro do G1 (2022)

Percebemos que na Figura 69, o grupo não realizou as multiplicações dentro da matriz, fizeram primeiro cada multiplicação para depois realizar a adição dos valores, conforme Figura 70. Para se organizarem melhor, podemos verificar pelos registros escritos, Figura 69, o grupo realizou a multiplicação por cores, cor amarela referente aos zíperes de tamanho P, cor rosa referente aos zíperes de tamanho M e cor azul referente aos zíperes de tamanho G. Ocorrendo assim, nas Figuras 69 e 70, os tratamentos 1 e 2, respectivamente.

Em seguida, realizaram o tratamento 3, Figura 71, e de acordo com os excertos, chegaram à conclusão que os valores encontrados faziam sentido para responder à questão da tarefa:

Jéssica: Olha, deu isso, agora terminamos.

Bete: Será que tá certo?

Jéssica: Tá sim, olha aqui, agora a gente respondeu à questão da tarefa, tem nove valores e cada valor faz parte do tamanho de zíper de cada mês. Olha aqui, mês de outubro zíper grande são 150; mês de novembro zíper pequeno são 700; mês de dezembro zíper médio 700.

Bete: Verdade, faz sentido sim.

Jéssica: Professora, vem aqui. Tá certo?

Professora: O que vocês acham? O que fizeram faz sentido com à questão da tarefa?

Jéssica: Faz sim, acabei de explicar aqui.

Professora: Vocês conseguem registrar, ou podem, de outra maneira esses resultados que vocês encontraram?

Laila: É o gráfico que ela quer.

Professora: Eu não quero nada...rsrsrsrsrs... só estou dando uma sugestão.

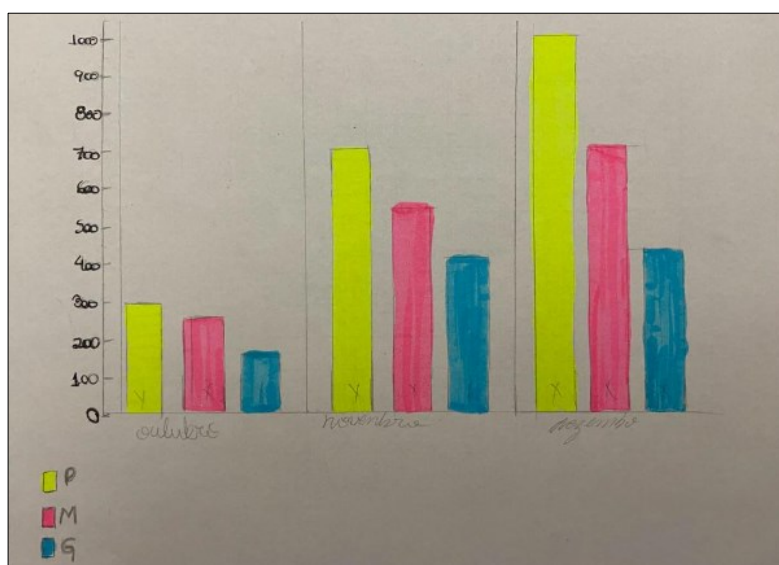
Figura 71: Tratamento 3, Tarefa 5 (confecção de mochilas), G1, continuação do 2º momento

	O	N	D
p	300	700	1000
m	250	650	700
G	150	400	400

3x3

Fonte: Registro do G1 (2022)

Seguindo a sugestão da professora, o grupo construiu o gráfico que representa os valores encontrados, ocorrendo a conversão 3, Figura 72:

Figura 72: Conversão 2, Tarefa 5 (confeção de mochilas), G1, continuação do 2º momento

Fonte: Registro do G1 (2022)

E, após a construção do gráfico, finalizaram a tarefa, de acordo com os excertos:

Bete: *Agora é só entregar para a professora. Professora. Terminamos.*

Professora: *Ok. Tem alguma outra maneira que vocês podem representar esses valores?*

Jéssica: *Ah, já deu professora, tá bom. Terminamos.*

Professora: *Tem certeza?*

Jéssica: *A gente pode escrever, mas eu já expliquei aqui pro grupo cada valor, então a gente não precisa não, todo mundo entendeu.*

Professora: *Ok.*

No Quadro 12, está especificado os registros de partida e chegada que geraram as conversões realizadas pelos estudantes no 2º momento na Tarefa da confecção de mochilas do G1.

Quadro 12: Conversões realizadas na Tarefa 5 (confeção de mochilas), pelo G1, 2º momento e continuação do 2º momento

Conversões	Registro de partida	Registro de chegada
Conversão 1	Língua natural	Registro matricial
Conversão 2	Registro matricial	Registro gráfico

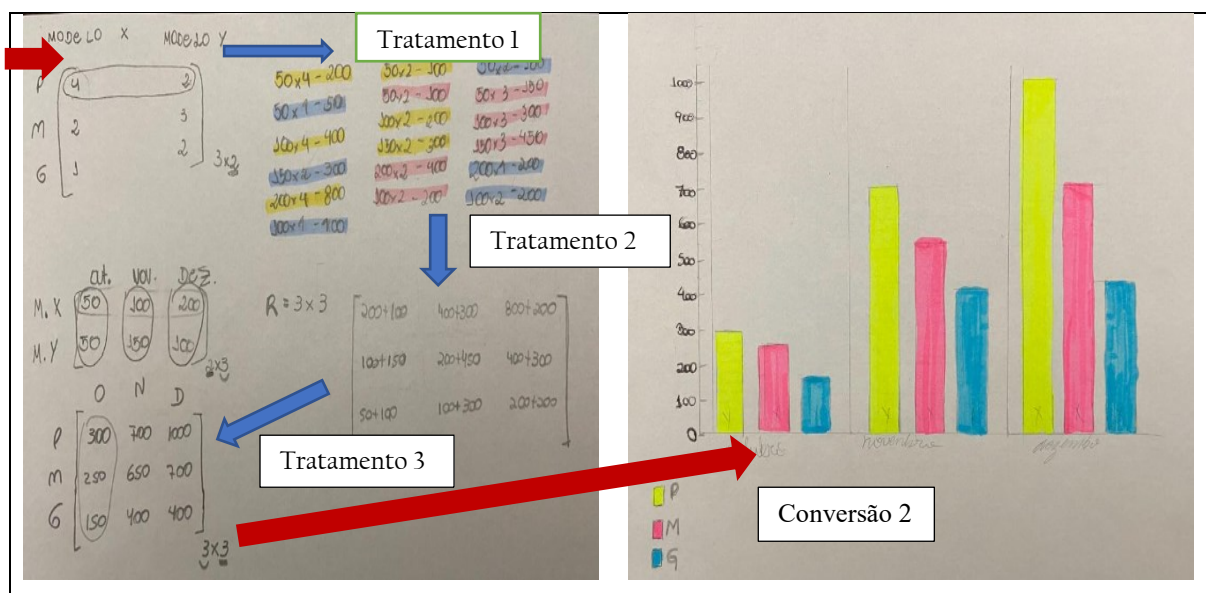
Fonte: As autoras (2022)

Percebemos que esse grupo, realizou duas conversões no desenvolvimento da tarefa. Segundo Duval (2003), a compreensão em matemática está associada à atividade de conversão de ao menos dois registros de representação semiótica. Observamos também a ocorrência da coordenação entre os registros, onde foram trabalhadas diferentes representações relacionadas

ao mesmo objeto matemático, transitando entre elas de forma coordenada. Nesse sentido, o grupo apresentou indícios de compreensão da tarefa. É importante ressaltar, que nessa tarefa, em especial, o diálogo ocorrido entre os estudantes e entre estudantes e professora foi muito importante para chegarem à compreensão da tarefa como um todo. Para além dos registros escritos, conseguimos analisar indícios de aprendizagem nas falas dos estudantes, pois são ricas em relação tanto ao entendimento da tarefa quanto a resolução da mesma.

Na Figura 74, está a imagem completa da Tarefa da confecção de mochilas do G1, do 2º momento e continuação do 2º momento, que foi o momento em que resolveram corretamente a tarefa proposta, que foi apresentada para a análise, como também um esquema das transformações ocorridas. As setas azuis representam os tratamentos ocorridos e as setas vermelhas as conversões.

Figura 73: Esquema das transformações ocorridas na Tarefa 5 (confecção de mochilas), G1, 2º momento e continuação do 2º momento



Fonte: As autoras (2022)

Na Figura 73, não está indicado a conversão 1 (escrita), está apenas a seta, que foi a passagem do registro em língua natural para o registro matricial, pois o grupo realizou a tarefa em uma folha de papel em branco, não começando assim, a resolução da tarefa na mesma folha que estava o enunciado.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Levando em consideração nosso objetivo com esse trabalho: *evidenciar indícios de aprendizagem dos estudantes baseada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica sobre operações com matrizes em tarefas desenvolvidas na perspectiva do Ensino por Investigação*, delineamos dois objetivos específicos:

1. Evidenciar os diferentes registros, a ocorrência do tratamento, conversão e coordenação entre registros quando os estudantes desenvolvem diferentes tipos de tarefas envolvendo operações com matrizes;
2. Analisar a ocorrência da aprendizagem, segundo Duval (2003), quando estudantes do 1º ano do NEM desenvolvem diferentes tipos de tarefas na perspectiva do Ensino por Investigação envolvendo operações de matrizes.

Para o desenvolvimento do trabalho e, conseqüentemente, responder esses objetivos, foram aplicadas, em sala de aula, seis tarefas, classificadas como problemas e tarefas de investigação. As Tarefas 1 (floricultura) e 2 (mulheres na política) abordaram a adição e subtração de matrizes; a tarefa 3 (redes sociais), era uma tarefa aberta, com potencial para desenvolver tanto a adição de matrizes quanto a multiplicação de um número real por uma matriz; a tarefa 4 (marcas de leite) abordava a multiplicação de um número real por uma matriz; e as tarefas 5 (confecção de mochilas) e 6 (pedágio) abordavam a multiplicação de matrizes. De acordo com o objetivo geral e os dois objetivos específicos, analisamos três tarefas desenvolvidas por dois grupos cada tarefa. A Tarefa 1 (floricultura), Tarefa 3 (redes sociais) e a Tarefa 5 (confecção de mochilas) foram as escolhidas para a análise, pois eram as tarefas que introduziam cada operação abordada. Foram analisados dois grupos para cada tarefa, G5 (grupo 5) e G1 (grupo 1).

Os sujeitos participantes da pesquisa são estudantes no 1º ano do Novo Ensino Médio, de um colégio estadual localizado no interior do estado do Paraná. A análise qualitativa de cunho interpretativo levou em consideração registros escritos e áudios produzidos durante o desenvolvimento das tarefas dos dois grupos.

Com a análise das três tarefas, para os grupos G5 e G1, evidenciamos indícios de aprendizagem dos estudantes baseadas na TRRS por meio dos diferentes registros semióticos desenvolvidos, e das transformações desses registros: tratamentos, conversões e coordenação, que indicam a compreensão do objeto matemático sob o ponto de vista cognitivo. De acordo com Duval (2011), a compreensão do ponto de vista cognitivo é baseada em duas condições: o reconhecimento do objeto estudado por meio de suas múltiplas representações e a iniciativa de

explorar os objetos estudados e controlar sua pertinência. Podemos perceber também que a diversidade dos registros apresentados ocorreu por meio da abordagem didática do Ensino por Investigação, e das tarefas propostas que foram tarefas de investigação e exploração, pois foi de extrema importância a condução das questões feitas pela professora para os estudantes desenvolverem os registros.

No decorrer da resolução das tarefas propostas, podemos evidenciar indícios de aprendizagem ocorridos por meio também, das transcrições, que são ricas em relação às conversas ocorridas, pois muitas vezes o estudante pensa, fala, mas não escreve aquilo que acabou de falar. Nesse sentido, as transcrições complementaram o processo de análise de indícios de aprendizagem.

Todas as tarefas analisadas foram adaptadas e/ou elaboradas para que fossem caracterizadas como tarefas de investigação ou exploração e desenvolvidas na abordagem didática Ensino por Investigação, pois de acordo com Sasseron (s/d) a investigação tem início bem antes da tarefa ser proposta, ela começa no planejamento das tarefas feito pelo professor e pela definição dos objetivos de ensino.

A Tarefa 1 (floricultura) classificada como problema, continha em sua questão um potencial para propiciar ao estudante chegar ao objeto matemático em estudo: adição e subtração de matrizes. A Tarefa 3 (redes sociais) foi elaborada juntamente com os estudantes, e é considerada aberta, sendo assim, cada grupo resolveu como achou melhor, mais pertinente com os conhecimentos que possuíam. A Tarefa 5 (confecção de mochilas) foi adaptada para que sua questão juntamente com a abordagem didática Ensino por Investigação, propiciassem aos estudantes chegarem ao objeto matemático em estudo: multiplicação de matrizes.

Com essas tarefas, gostaríamos de salientar a importância de, a partir de uma tarefa apresentada no livro didático, ou em outro material didático, o professor realizar adaptações para que a tarefa tenha potencial para que o estudante mobilize diferentes registros relacionados ao mesmo objeto matemático e também tarefas com potencial de investigação.

A Tarefa 1 (floricultura) demandou um certo tempo, mesmo sendo menos complexa, e levando em conta que a adição e subtração de matrizes é algo simples, intuitivo, porque foi a partir dela que tanto a professora como os estudantes estiveram em contato com o primeiro problema desenvolvido na abordagem didática do Ensino por Investigação. Ou seja, foi uma novidade mútua, mas como havia sido planejada com atenção, não houve intercorrências e ocorreu naturalmente.

A Tarefa 3 (redes sociais) foi extraclasse, em que os grupos tiveram um prazo para resolverem e entregarem, e todos respeitaram o prazo estipulado.

Dentre as tarefas analisadas, a Tarefa 5 (confeção de mochilas) foi a de maior exigência cognitiva em relação às outras, pois a multiplicação entre matrizes não é uma operação tão intuitiva quanto a de adição, por exemplo, e muito menos simples, principalmente para o estudante que está aprendendo pela primeira vez e não conhece a condição existente para ocorrer essa multiplicação. Dessa forma, além dos registros escritos, os áudios transcritos foram muito importantes para evidenciar indícios de aprendizagem, os estudantes não possuem o hábito de registrarem tudo, na maioria das vezes, apenas falam, conversam, trocam ideias. Por esse motivo, a professora sempre estimulava os estudantes com as perguntas: Vocês conseguem fazer outro tipo de registro? Qual outra maneira vocês conseguem representar esse resultado? Como você representaria esse resultado para ficar mais visível?

Em relação aos registros produzidos, observamos diferentes registros semióticos nas tarefas, percebendo que na última tarefa, os registros escritos foram em menor quantidade, mas, por meio das transcrições foi possível perceber que os estudantes sabiam que poderiam realizar outros registros. Os registros produzidos foram: registro tabular, registro matricial, registro gráfico e registro em língua natural. De acordo com Duval (2011), a utilização de diferentes registros relacionados a um mesmo objeto matemático e ocorrida a coordenação entre eles evidencia a aprendizagem do estudante.

Podemos observar também as transformações ocorridas: tratamentos, conversões e a coordenação entre os registros. De acordo com Duval (2009) o tratamento é uma transformação interna a um registro e está ligada à forma e não ao conteúdo do objeto matemático; a conversão consiste na transformação de representação de um objeto matemático em uma representação em outro registro. Tratamento e conversão são atividades cognitivas diferentes. Mesmo Duval (2003) reconhecendo a importância do tratamento em atividades de matemática, enfatiza que é a conversão entre registros que constitui uma condição especial para a compreensão do objeto matemático. E que a compreensão em matemática está associada à atividade de conversão de ao menos dois registros de representação semiótica. Envolvendo o tratamento e a conversão, é de suma importância a ocorrência da coordenação entre esses diferentes registros. Para Duval (2011), a coordenação consiste em trabalhar com diferentes representações de um mesmo objeto matemático, salientando a importância de transitar entre os diferentes registros e entender que estes estão ligados a um mesmo objeto matemático.

Analisando a Tarefa 1 (floricultura) em relação as conversões e tratamentos, o G5 realizou 7 e 4, respectivamente; e o G1 realizou 4 e 4, respectivamente. De acordo com Duval (2003) a compreensão em matemática está associada à atividade de conversão de ao menos dois registros de representação semiótica. Em relação a coordenação entre registros, os dois grupos

realizarem tratamentos e conversões, com a possibilidade de trocar de registro a todo momento, ou seja, realizando a coordenação entre eles. Nesse sentido, concluímos que, em tais grupos, há indícios de aprendizagem do objeto matemático estudado pelos estudantes.

Na Tarefa 3 (redes sociais) por ser uma tarefa aberta e extraclasse, os grupos ficaram à vontade para resolverem, conseqüentemente, a professora não ficou questionando sobre os diferentes registros que eles poderiam realizar, mas mesmo assim, o G5 realizou 4 conversões e 4 tratamentos, e o G1 realizou 2 conversões e 5 tratamentos. Para Duval (2003), a diversidade de registros semióticos tem um papel central na compreensão do objeto matemático em estudo. “A compreensão requer a coordenação dos diferentes registros” (DUVAL, 2003, p. 29). Nesse sentido, baseados em Duval podemos dizer que o grupo compreendeu e operou coordenadamente as transformações referentes ao objeto matemático.

A Tarefa 5 (confeção de mochilas) foi a que causou maiores discussões, mais dúvidas e maiores desafios, mas, já era algo esperado, pois, o objeto matemático em estudo, multiplicação de matrizes, não é de operacionalização imediata como foi o caso da adição e subtração de matrizes. Os dois grupos tiveram dificuldades no início de entender que para realizar a multiplicação de matrizes era necessária uma condição, sem essa condição, a multiplicação não seria possível. Em especial nessa tarefa, o Ensino por Investigação foi muito importante para chegar ao resultado final e ao objeto matemático em estudo, pois foi por meio dele que a professora questionou, levantou discussões, provocou dúvidas, direcionou quando ocorreu posicionamentos diferentes, enfim, incentivou os estudantes a todo momento até chegarem no processo formal para resolver a multiplicação de matrizes. Em especial, ocorreu nessa tarefa uma maneira diferente de conduzir a aula pela professora, levando em conta que apenas o G5 havia compreendido como operar corretamente a multiplicação de matrizes. Sendo assim, os outros grupos estavam com dificuldades e começaram a dispersar pois a professora não conseguia dar a atenção necessária aos quatro grupos, como solução a professora resolveu pedir para algum integrante do G5 ir até o quadro para explicar o que acabaram de aprender, como realizar a multiplicação de matrizes. Uma estudante do G5 prontamente foi ao quadro para explicar, e entre perguntas, questionamentos, dúvidas, testes entre os estudantes da sala inteira e entre a professora, os grupos conseguiram compreender o processo. Em relação aos indícios de aprendizagem, podemos perceber que ocorreu, pois, o grupo G5 no 3º momento do desenvolvimento realizou 3 conversões e 3 tratamentos, e o G1 no 2º momento, realizou 2 conversões e 3 tratamentos. Com esses registros mobilizados e de acordo com Duval (2011, p. 116), “A análise do funcionamento cognitivo do pensamento exigida pela matemática mostra, [...] a necessidade de uma mobilização simultânea e coordenada de diversos registros para poder

compreender”. Nesse sentido, os grupos apresentaram indícios de aprendizagem na realização da tarefa.

O Produto Educacional que acompanha a dissertação é um caderno com as seis tarefas que foram aplicadas em sala de aula. Contém orientações breves de como desenvolver uma aula na abordagem didática do Ensino por Investigação, possui uma linguagem voltada aos professores sobre a TRRS, e para cada tarefa proposta apresenta uma sugestão de como desenvolver a aula, explorando diferentes registros semióticos, e, ao final apresenta uma possível resolução para cada tarefa.

Tendo em vista os resultados da pesquisa aqui compartilhados, temos expectativa de que seja considerada relevante pela comunidade da Educação Matemática, pois: é voltada para o professor que trabalha com o NEM; abrange a importância da Educação Matemática quando trabalhamos com o Ensino por Investigação; traz um Produto Educacional didático e simples, permitindo ao professor que tiver contato pela primeira vez com a TRRS e o Ensino por Investigação compreensão para que possa colocá-lo em prática; e por fim, temos expectativa de que essa dissertação seja um exemplo de como podemos trabalhar de forma diferente da tradicional, explorando em nossos estudantes o que eles mais possuem: capacidade, vontade e disposição para aprender, basta o professor conduzir da maneira adequada.

É importante ressaltar que, durante o desenvolvimento da pesquisa, ocorreram algumas limitações. A principal delas, mas também a realidade das escolas públicas, é o número de estudantes por sala de aula, por serem muitos estudantes, no caso 30, a professora teve que formar 5 grupos com 6 estudantes cada grupo, dessa forma os áudios de alguns grupos não ficaram bons o suficiente para serem transcritos, pois é inevitável a conversa entre os integrantes de cada grupo e entre os integrantes de grupos diferentes. Outro fator relevante, por serem cinco grupos e a professora apenas uma, várias vezes era complicado atender todos os grupos com a mesma intensidade em apenas uma, ou duas aulas, que foi o caso da tarefa 5. Nesse caso, é inevitável o planejamento das aulas, pois, se não houvesse planejamento, a tarefa não poderia ser concluída.

Por fim, como expectativa futura, deixamos indicações de continuidade desse trabalho: realizar análises das conversões, realizadas pelos dois grupos analisados, analisando as congruências ou não-congruências ocorridas em cada uma dessas conversões. Segundo Duval (2003) uma condição necessária para a aprendizagem em matemática é a ocorrência da coordenação entre registros, para acontecer essa coordenação é necessário que os estudantes realizem conversões.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensinando Matemática na Sala de Aula através da Resolução de Problemas. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 55, p. 1- 19, 2009.

ALMEIDA, L.W.; SILVA, K. A. P.; VERONEZ, R. D. **Elementos Semióticos em atividades de Modelagem Matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2021.

AZEVEDO, M. C. P. S. **Ensino por investigação: problematizando as atividades em sala de aula**. In AZEVEDO, M. P. C. S. (org.) Ensino de ciências: unindo a pesquisa e a prática. São Paulo: Thomson. 2006.

BAPTISTA, M.L.M. **Concepções e implementação de actividades de investigação: um estudo com professores de física e química do ensino básico**. Tese de Doutorado Universidade de Lisboa, 2010.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação**. Portugal: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/> Acesso em 18 de agosto de 2022.

CARVALHO, A. M. P. Fundamentos Teóricos e Metodológicos do Ensino por Investigação. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação e Ciências** 18(3), 765-794. Dezembro, 2018.

COSTA, L. M. **A compreensão em atividades de modelagem matemática: uma análise à luz dos registros de representação semiótica**. Dissertação (Mestrado) – Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, 2016.

D'AMORE, B.; PINILLA, M. I. F.; IORI, M. **Primeiros elementos da Semiótica – Sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática**. 1ª edição. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

DAMM, Regina F. Registros de Representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Educação Matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 2000, p. 135-153.

DENARDI, V. B. **Contribuições das representações semióticas para compreensão de conceitos fundamentais para o cálculo diferencial e integral por alunos de um curso de licenciatura em Matemática**. 2019. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Franciscana, Santa Maria, 2019.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Sp. Editora Papyrus, 2003.

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. (fascículo I). Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. **Ver e ensinar matemática de outra forma**: Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Organização: Tânia M. M. Campos. Tradução: Marlene Alves Dias. 1ª ed. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R. Registro de Representação Semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Mérciles Tadeu Moretti. **Revemat**: R. Eletr. de Edu. Matem. E ISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012.

FERRUZZI, E. C.; BORSSOI, A. H; SILVA, K. A. P. Investigação Matemática em foco: Evidenciando possibilidade para sala de aula. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, v. 11, 2021.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução Matemática. **Acta Scientiae**, Canoas, v.10, n.2, jul/dez 2008.

GODINO, J.D. & BATANERO,C. Significado institucional e personal dos objetos matemáticos. In: **Recherches en Didactique des Mathématiques**.Vol 14. nº 3, p.325 -355, 1994. Disponível em:
file:///C:/Users/User/Downloads/03_SignificadosIP_RDM94.pdf Acesso em: 10 jan de 2023.

JACOMINI, M. A. Novo Ensino Médio na prática: a implementação da reforma na maior rede de ensino básica do país. **Revista Retratos da escola**, Brasília, v. 16, n. 35, p. 267-283, mai./ago. 2022.

JUNIOR, J. E. L. A teoria das representações semióticas de Raymond Duval relacionada ao conceito de ângulos através da lousa digital interativa. **Revista Latino-Americana de Estudos Científicos**. Disponível em: <http://www.periodicos.ufes.br/ipa> Acesso em: 23 dez de 2022.

MOREIRA, M. A. **Metodologias de Pesquisa em Ensino**. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

PARANÁ. Secretária de Estado da Educação. **Caderno de Expectativas de Aprendizagem** (Departamento de Educação Básica). Curitiba: SEED-PR, 2012. Disponível em:
http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/caderno_expectativas.pdf
Acesso em 18 agosto de 2022.

PONTE, J.P. **Gestão Curricular em Matemática**. In GTI (Ed). O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa: APM, 2005.

PONTE, J.P. **Tarefas no ensino e na aprendizagem de matemática**. Práticas Profissionais dos professores de matemática. Lisboa, 2014.

PONTE, J.P.; BRANCO, N.; QUARESMA, M.; AZEVEDO, A. Investigações e explorações como parte do trabalho quotidiano na sala de aula. **Revista de Educação de Ciências e Matemática**, v. 9, p. 05-22, jan-jun 2013.

PONTE, J.P.; QUARESMA, M.; BRANCO, N. **Tarefas de exploração e investigação na aula de matemática**. 2012.

ROSA, C. C. da. **Um estudo do fenômeno de congruência em conversões que emergem em atividades de Modelagem Matemática no Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado) – Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

SANTOS, R. N. **Semiótica e Educação Matemática: registros de representação aplicados à teoria das matrizes.** Dissertação de Mestrado: Universidade de São Paulo-Faculdade de Educação. São Paulo, 2011.

SASSERON, L.H. Alfabetização científica, ensino por investigação e argumentação: relações entre ciências da natureza e escola. **Revista Ensaio**, v.17, p.49-67, novembro de 2015.

SASSERON, L. H. **O Ensino Por Investigação: pressupostos e práticas.** S/d. Disponível em https://midia.atp.usp.br/plc/plc0704/impressos/plc0704_12.pdf Acesso em 31/08/2022

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Bolema**, v.13, n.14, 2000.

VERTUAN, R. E. **Um olhar sobre a modelagem Matemática à luz da teoria dos registros de representação semiótica.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Londrina, Ensino de Ciências e Educação Matemática, Londrina, 2007.

XAVIER, R.A. **O ensino por investigação, favorecendo o desenvolvimento de atitudes e procedimentos: uma proposta didática aplicada em sala de aula.** Dissertação - Mestrado Profissional em Ensino de Ciências, Brasília, 2016.

APÊNDICES

APÊNDICE A – TERMO DE CESSÃO DE USO DE IMAGEM

TERMO DE CESSÃO

Nos termos disponíveis do artigo 49 da Lei nº 9.610, por este instrumento o Sr(a)

_____,
 RG: _____, CPF: _____ Responsável pelo aluno(a):
 _____ da(o) série/ano/semestre: _____ turma:
 _____ Ensino _____.

Na qualidade de titular dos direitos autorais, doravante denominados CEDENTES, cede gratuitamente, pelo período em que estiver cursando anos/séries/semestres e de modo absoluto, para utilização exclusiva vinculada ao Ensino, Pesquisa e Extensão da Secretaria de Estado da Educação do Paraná e da UEL, o direito de uso das imagens e som realizados nas dependências do Colégio de Aplicação Pedagógica da Universidade Estadual de Londrina Professor José Aloísio Aragão: Educação Infantil, Ensino Fundamental, Médio e Profissional do(s) aluno(s) que estiverem sob sua responsabilidade legal. O direito de uso das imagens limita-se às atividades desenvolvidas nesta Unidade de Ensino da Rede Estadual de Educação do Paraná, nesta ocasião denominada CESSIONÁRIO(a).

O CEDENTE fica ciente de que o material cedido pode ser publicado nas mídias impressas e/ou WEB.

Esta cessão afasta o CEDENTE e seus herdeiros de receberem qualquer espécie de indenização ou compensação em virtude do uso e administração do material.

Para efeitos, este termo vai assinado pelas partes.

Londrina, _____ de _____ de _____.

 CEDENTE

 CESSIONÁRIO

APÊNDICE B – TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA REALIZAÇÃO DA PESQUISA

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA REALIZAÇÃO DA PESQUISA

Senhor diretor(a),

Eu, Josiane Aparecida Busquim Mota, R.G. nº 6.326.364-8, estudante do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática – UTFPR – Câmpus Londrina/Cornélio Procópio e professora de Matemática do Novo Ensino Médio no Colégio Estadual José Aloísio Aragão – Aplicação da UEL, venho por meio deste solicitar autorização para a realização da pesquisa que abordará: Uma análise sobre a aprendizagem dos estudantes baseada na Teoria dos registros de Representação Semiótica a partir de tarefas desenvolvidas pelo Ensino por Investigação abordando o conteúdo operações com matrizes. A pesquisa será conduzida em uma turma do 1º ano do Novo Ensino Médio e terá a participação dos estudantes no desenvolvimento dos diferentes tipos de tarefas. A coleta de que subsidiará a pesquisa será realizada por meio de gravações de áudios e registros escritos dos estudantes, sendo assegurado o sigilo da identidade dos participantes. A pesquisa está sendo desenvolvida sob a orientação da professora Dra. Adriana Helena Borssoi.

Em caso de dúvida a equipe do colégio poderá entrar em contato com a orientadora pelo e-mail adraianaborssoi@professores.utfpr.edu.br

Londrina, março de 2022.

Nome completo e assinatura do diretor(a)

ANEXOS

ANEXO A – Ficha de Avaliação de Produto/Processo Educacional

Ficha de Avaliação de Produto/Processo Educacional

Adaptado de: Rizzatti, I. M. *et al.* Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. *ACTIO*, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai./ago. 2020. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12657>. Acesso em 14 de dezembro de 2020.

Instituição de Ensino Superior	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Programa de Pós-Graduação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT)
Título da Dissertação	Ensino por Investigação para a Aprendizagem de Operações com Matrizes à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.
Título do Produto/Processo Educacional	O ensino por investigação para a aprendizagem de operações com matrizes por meio de registros semióticos: orientações para o professor.
Autores do Produto/Processo Educacional	Discente: Josiane Aparecida Busquim Mota
	Orientadora: Adriana Helena Borssoi
	Outros (se houver):
Data da Defesa	17 de março de 2023

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE)	
Esta ficha de avaliação deve ser preenchida pelos membros da banca do exame de defesa da dissertação e do produto/processo educacional. Deve ser preenchida uma única ficha por todos os membros da banca, que decidirão conjuntamente sobre os itens nela presentes.	
<p>Aderência: avalia-se se o PE apresenta ligação com os temas relativos às linhas de pesquisas do Programa de Pós-Graduação.</p> <p><u>*Apenas um item pode ser marcado.</u></p> <p>Linhas de Pesquisa do PPGMAT:</p> <p><i>L1: Formação de Professores e Construção do Conhecimento Matemático</i> (abrange discussões e reflexões acerca da formação inicial e em serviço dos professores que ensinam Matemática, bem como o estudo de tendências em Ensino de Matemática, promovendo reflexões críticas e analíticas a respeito das potencialidades de cada uma no processo de construção do conhecimento matemático nos diferentes níveis de escolaridade);</p>	<p>() Sem clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.</p> <p>(#) Com clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.</p>

<p>L2: <i>Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática</i> (trata da análise e do desenvolvimento de recursos educacionais para os processos de ensino e de aprendizagem matemática, atrelados aos aportes tecnológicos existentes).</p>	
<p>Aplicação, aplicabilidade e replicabilidade: refere-se ao fato de o PE já ter sido aplicado (mesmo que em uma situação que simule o funcionamento do PE) ou ao seu potencial de utilização e de facilidade de acesso e compartilhamento para que seja acessado e utilizado de forma integral e/ou parcial em diferentes sistemas.</p> <p><u>*Apenas um item pode ser marcado.</u></p> <p>A propriedade de aplicação refere-se ao processo e/ou artefato (real ou virtual) e divide-se em três níveis:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) aplicável – quando o PE tem potencial de utilização direta, mas não foi aplicado; 2) aplicado – quando o PE foi aplicado uma vez, podendo ser na forma de um piloto/protótipo; 3) replicável – o PE está acessível e sua descrição permite a utilização por outras pessoas considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação. <p>Para o curso de Mestrado Profissional, o PE deve ser aplicável e é recomendado que seja aplicado.</p>	<p><input type="checkbox"/> PE tem características de aplicabilidade, mas não foi aplicado durante a pesquisa.</p> <p><input type="checkbox"/> PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e não tem potencial de replicabilidade.</p> <p><input type="checkbox"/> PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).</p> <p><input type="checkbox"/> PE foi aplicado em diferentes ambientes/momentos e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).</p>
<p>Abrangência territorial: refere-se a uma definição da abrangência de aplicabilidade ou replicabilidade do PE (local, regional, nacional ou internacional). Não se refere à aplicação do PE durante a pesquisa, mas à potencialidade de aplicação ou replicação futuramente.</p> <p><u>*Apenas um item pode ser marcado e a justificativa é obrigatória.</u></p>	<p><input type="checkbox"/> Local</p> <p><input type="checkbox"/> Regional</p> <p><input type="checkbox"/> Nacional</p> <p><input type="checkbox"/> Internacional</p> <p>Justificativa (<i>obrigatória</i>): O Produto Educacional foi elaborado a partir dos documentos nacional e estadual que tratam da Educação Básica Brasileira, portanto, pode atender aos professores de todo o país.</p>
<p>Impacto: considera-se a forma como o PE foi utilizado e/ou aplicado no sistema relacionado à prática profissional do discente (não precisa ser, necessariamente, em seu local de trabalho).</p>	<p><input type="checkbox"/> PE não utilizado no sistema relacionado à prática profissional do discente (esta opção inclui a situação em que o PE foi utilizado e/ou aplicado em um contexto simulado, na forma de protótipo/piloto).</p>

* <u>Apenas um item pode ser marcado.</u>	(#) PE com aplicação no sistema relacionado à prática profissional do discente.
Área impactada * <u>Apenas um item pode ser marcado.</u>	() Econômica; () Saúde; (#) Ensino; () Cultural; () Ambiental; () Científica; () Aprendizagem.
Complexidade: compreende-se como uma propriedade do PE relacionada às etapas de elaboração, desenvolvimento e/ou validação do PE. <u>*Podem ser marcados nenhum, um ou vários itens.</u>	(#) O PE foi concebido a partir de experiências, observações e/ou práticas do discente, de modo atrelado à questão de pesquisa da dissertação. (#) A metodologia apresenta clara e objetivamente, no texto da dissertação, a forma de elaboração, aplicação (se for o caso) e análise do PE. (#) Há, no texto da dissertação, uma reflexão sobre o PE com base nos referenciais teóricos e metodológicos empregados na dissertação. () Há, no texto da dissertação, apontamentos sobre os limites de utilização do PE.
Inovação: considera-se que o PE é inovador, se foi criado a partir de algo novo ou da reflexão e modificação de algo já existente revisitado de forma inovadora e original. A inovação não deriva apenas do PE em si, mas da sua metodologia de desenvolvimento, do emprego de técnicas e recursos para torná-lo mais acessível, do contexto social em que foi utilizado ou de outros fatores. Entende-se que a inovação (tecnológica, educacional e/ou social) no ensino está atrelada a uma mudança de mentalidade e/ou do modo de fazer de educadores.	() PE de alto teor inovador (desenvolvimento com base em conhecimento inédito). (#) PE com médio teor inovador (combinação e/ou compilação de conhecimentos preestabelecidos). () PE com baixo teor inovador (adaptação de conhecimentos existentes).

Membros da banca examinadora de defesa

Nome	Instituição
Profa. Dra. Adriana Helena Borssoi - Presidente	UTFPR
Profa. Dra. Karina Alessandra Pessoa Da Silva	UTFPR
Prof. Dr. Paulo Henrique Rodrigues	UEL