

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

SILVIO DE OLIVEIRA SILVA FILHO

**ESTUDO COMPARATIVO ENTRE MÉTODOS NUMÉRICO E EXPERIMENTAL
DE ANÁLISE MODAL APLICADA AO PROBLEMA DE VIBRAÇÃO
TRANSVERSAL DE UMA VIGA FIXA-LIVRE**

LONDRINA

2025

SILVIO DE OLIVEIRA SILVA FILHO

**ESTUDO COMPARATIVO ENTRE MÉTODOS NUMÉRICO E EXPERIMENTAL
DE ANÁLISE MODAL APLICADA AO PROBLEMA DE VIBRAÇÃO
TRANSVERSAL DE UMA VIGA FIXA-LIVRE**

**Comparative study between numerical and experimental methods of modal
analysis applied to the transverse vibration problem of a fixed-free beam**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador: Prof. Dr. Juliano Gonçalves Iossaqui

LONDRINA

2025



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

SILVIO DE OLIVEIRA SILVA FILHO

**ESTUDO COMPARATIVO ENTRE MÉTODOS NUMÉRICO E EXPERIMENTAL
DE ANÁLISE MODAL APLICADA AO PROBLEMA DE VIBRAÇÃO
TRANSVERSAL DE UMA VIGA FIXA-LIVRE**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação
apresentado como requisito para obtenção do
título de Bacharel em Engenharia Mecânica da
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
(UTFPR).

Data de aprovação: 12/dezembro/2024

Juliano Gonçalves Iossaqui
Doutorado em Engenharia Mecânica
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Amadeu Lombardi Neto
Doutorado em Engenharia Metalúrgica
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Janaína Fracaro de Souza Gonçalves
Doutorado em Engenharia Mecânica Aeronáutica
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

LONDRINA

2025

Dedico este trabalho aos meus pais, pelo amor,
apoio incondicional e por sempre acreditarem
em mim. Obrigado por serem minha base e
inspiração.

RESUMO

A vibração é o movimento que se repete, regular ou irregularmente após um intervalo de tempo, podendo influenciar projetos de engenharia e limitar seu desempenho. Em projetos estruturais, a determinação das frequências naturais é fundamental para evitar o fenômeno da ressonância, o qual pode levar a aumentos significativos na amplitude das vibrações, resultando em danos estruturais graves. As frequências naturais e modos de vibração de estruturas podem ser obtidas por meio de análise modal. Este trabalho visa entender o emprego de métodos experimental e numérico de análise modal. Para isso, propõe-se montar uma bancada de testes para estudar as vibrações transversais de uma viga fixa-livre que possui solução analítica, facilitando assim a validação dos métodos experimental e numérico. No método experimental, utiliza-se de um martelo de impacto para excitar a viga transversalmente, o qual provoca uma aceleração que é medida ao longo do tempo por um acelerômetro axial. As medidas realizadas, com o auxílio do *LabVIEW*, no domínio do tempo da força e aceleração são convertidas para o domínio da frequência aplicando a transformada rápida de Fourier. As respostas em função da frequência são exportadas ao *Matlab*, o qual é utilizado para extrair as funções de transferência e frequências naturais. Por sua vez, o método numérico consiste no uso do *Ansys* para obter as frequências naturais e modos de vibração transversal da viga. Os resultados numéricos são comparados com as soluções analíticas, enquanto os resultados experimentais são comparados com os resultados numéricos. Para validar a calibração do acelerômetro e do martelo de impacto, realiza-se um experimento para determinar as frequências naturais de uma viga livre-livre. Os resultados numéricos, como esperado, aproximaram dos resultados analíticos. No entanto, os resultados experimentais apresentaram erros inesperados, provavelmente causados pelas condições de contorno da montagem viga-pórtico que não garantiram deslocamento nulo do engaste.

Palavras-chave: acelerômetro; labview; ansys; martelo de impacto.

ABSTRACT

Vibration is the motion that repeats itself, either regularly or irregularly, after a time interval, and it can influence engineering projects and limit their performance. In structural projects, determining natural frequencies is crucial to avoiding the phenomenon of resonance, which can lead to significant increases in vibration amplitudes, resulting in severe structural damage. The natural frequencies and vibration modes of structures can be obtained through modal analysis. This study aims to understand the application of experimental and numerical methods in modal analysis. For this purpose, it is proposed to set up a test bench to study the transverse vibrations of a cantilever beam, which has an analytical solution, thus facilitating the validation of both the experimental and numerical methods. In the experimental method, an impact hammer is used to excite the beam transversely, generating acceleration measured over time by an axial accelerometer. The measurements, performed with the aid of *LabVIEW*, of force and acceleration in the time domain are converted to the frequency domain using the Fast Fourier Transform. The responses as a function of frequency are exported to *Matlab*, which is used to extract the transfer functions and natural frequencies. In turn, the numerical method consists of using *Ansys* to obtain the natural frequencies and transverse vibration modes of the beam. The numerical results are compared with the analytical solutions, while the experimental results are compared with the numerical results. To validate the calibration of the accelerometer and the impact hammer, an experiment is conducted to determine the natural frequencies of a free-free beam. As expected, the numerical results closely matched the analytical results. However, the experimental results presented unexpected errors, likely caused by the boundary conditions of the beam-frame assembly, which did not ensure zero displacement at the fixed support.

Keywords: accelerometer; labview; ansys; impact hammer.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sistema massa-mola com um grau de liberdade.	18
Figura 2 – Momento interno positivo (a) e negativo (b) de uma viga livre-livre . . .	23
Figura 3 – Momento-curvatura antes (a) e após (b) a deformação	24
Figura 4 – Vibração Transversal	28
Figura 5 – Viga fixa-livre com o sensor apoiado em sua superfície	35
Figura 6 – Viga livre-livre apoiada em uma espuma com o sensor ao lado do mar- telo de impacto	36
Figura 7 – Acelerômetro PCB Piezotronics modelo 352C03 utilizado no estudo . .	36
Figura 8 – Módulo de aquisição de sinais NI9234 da National Instruments	37
Figura 9 – Martelo de impacto PCB Piezotronics modelo 086C03 utilizado no estudo	38
Figura 10 – Diagrama de blocos utilizado para a coleta dos dados	42
Figura 11 – Informações fornecidas sobre o acelerômetro	43
Figura 12 – Informações fornecidas sobre o martelo de impacto	43
Figura 13 – Sétima frequência natural numérica da viga de alumínio para o caso livre-livre	46
Figura 14 – Nona frequência natural numérica da viga de alumínio para o caso livre- livre	46
Figura 15 – Décima segunda frequência natural numérica da viga de alumínio para o caso livre-livre	47
Figura 16 – Comparação entre as frequências naturais transversais pelo método numérico e analítico de maneira gráfica para o alumínio no caso livre- livre	48
Figura 17 – Sétima frequência natural numérica da viga de aço para o caso livre-livre	49
Figura 18 – Nona frequência natural numérica da viga de aço para o caso livre-livre	49
Figura 19 – Décima segunda frequência natural numérica da viga de aço para o caso livre-livre	50
Figura 20 – Comparação entre as frequências naturais transversais pelo método numérico e analítico de maneira gráfica para o aço no caso livre-livre .	51
Figura 21 – Primeira frequência natural da viga de alumínio para o caso fixo-livre .	52
Figura 22 – Quarta frequência natural da viga de alumínio para o caso fixo-livre . .	52

Figura 23 – Quinta frequência natural da viga de alumínio para o caso fixo-livre . . .	53
Figura 24 – Comparação entre as 3 frequências naturais transversais obtidas pelo método numérico e analítico para o alumínio no caso fixo-livre	54
Figura 25 – Primeira frequência natural numérica da viga de aço para o caso fixo-livre	55
Figura 26 – Quarta frequência natural numérica da viga de aço para o caso fixo-livre	55
Figura 27 – Quinta frequência natural numérica da viga de aço para o caso fixo-livre	56
Figura 28 – Comparação entre as 3 frequências naturais transversais obtidas pelo método numérico e analítico para o aço no caso fixo-livre	57
Figura 29 – Força em função do tempo para uma viga de alumínio para o caso livre-livre	58
Figura 30 – Aceleração em função do tempo para uma viga de alumínio para o caso livre-livre	59
Figura 31 – Força em função da frequência para uma viga de alumínio para o caso livre-livre	59
Figura 32 – Aceleração em função da frequência para uma viga de alumínio para o caso livre-livre	60
Figura 33 – Função de Transferência em função da frequência da viga de alumínio para o caso livre-livre	60
Figura 34 – Comparação entre as 3 frequências naturais transversais obtidas pelo método experimental e numérico para o alumínio no caso livre-livre . . .	61
Figura 35 – Força em função do tempo para uma viga de aço para o caso livre-livre	62
Figura 36 – Aceleração em função do tempo para uma viga de aço para o caso livre-livre	63
Figura 37 – Força em função da frequência para uma viga de aço para o caso livre-livre	63
Figura 38 – Aceleração em função da frequência para uma viga de aço para o caso livre-livre	64
Figura 39 – Função de transferência em função da frequência para uma viga de aço para o caso livre-livre	64
Figura 40 – Comparação entre as 3 frequências naturais transversais obtidas pelo método experimental e numérico de maneira gráfica para o aço no caso livre-livre	65

Figura 41 – Força em função do tempo para uma viga de alumínio para o caso fixo-livre	66
Figura 42 – Aceleração em função do tempo para uma viga de alumínio para o caso fixo-livre	67
Figura 43 – Força em função da frequência para uma viga de alumínio para o caso fixo-livre	67
Figura 44 – Aceleração em função da frequência para uma viga de alumínio para o caso fixo-livre	68
Figura 45 – Função de transferência em função da frequência para uma viga de alumínio para o caso fixo-livre	69
Figura 46 – Comparação entre as 3 frequências naturais pelo método experimental e numérico para o alumínio no caso fixo-livre	70
Figura 47 – Força em função do tempo para uma viga de aço para o caso fixo-livre	71
Figura 48 – Aceleração em função do tempo para uma viga de aço para o caso fixo-livre	71
Figura 49 – Força em função da frequência para uma viga de aço para o caso fixo-livre	72
Figura 50 – Aceleração em função da frequência para uma viga de aço para o caso fixo-livre	73
Figura 51 – Função de transferência em função da frequência para uma viga de aço para o caso fixo-livre	73
Figura 52 – Comparação entre as 3 frequências naturais pelo método experimental e numérico para o aço no caso fixo-livre	74
Figura 53 – Força em função do tempo para o pórtico sem a presença da viga . . .	75
Figura 54 – Aceleração em função do tempo para o pórtico sem a presença da viga	76
Figura 55 – Força em função da frequência para o pórtico sem a presença da viga .	76
Figura 56 – Aceleração em função da frequência para o pórtico sem a presença da viga	77
Figura 57 – Função de transferência do pórtico sem a presença da viga	77

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Propriedades dos materiais utilizados	39
Tabela 2 – Comparação entre as frequências naturais obtidas por método numérico e analítico para o alumínio no caso livre-livre	47
Tabela 3 – Comparação entre as frequências naturais obtidas por método numérico e analítico para o aço no caso livre-livre	50
Tabela 4 – Comparação entre as frequências naturais obtidas por método numérico e analítico para o alumínio no caso fixo-livre	53
Tabela 5 – Comparação entre as frequências naturais obtidas por método numérico e analítico para o aço no caso fixo-livre	56
Tabela 6 – Comparação entre as frequências naturais transversais obtidas por método experimental e numérico para o alumínio para o caso livre-livre	61
Tabela 7 – Comparação entre as frequências naturais transversais obtidas por método experimental e numérico para o aço para o caso livre-livre	65
Tabela 8 – Comparação entre frequências naturais obtidas por método experimental e numérico para o alumínio para o caso fixo-livre	69
Tabela 9 – Comparação entre frequências naturais obtidas por método experimental e numérico para o aço para o caso fixo-livre	74
Tabela 10 – Comparação entre frequências naturais obtidas por método experimental para o pórtico e o caso fixo-livre para o alumínio e aço	78

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Latinas

A	Área	$[m^2]$
L	Comprimento	$[m]$
r	Raio	$[m]$
k	Constante elástica	$[N/m]$
m	Massa	$[kg]$
u	Deslocamento	$[m]$
t	Tempo	$[s]$
M_o	Momento fletor	$[N \cdot m]$
E	Módulo de elasticidade	$[Pa]$
y	Eixo vertical	$[m]$
x	Eixo horizontal	$[m]$
M	Matriz massa	$[kg]$
K	Matriz constante elástica	$[N/m]$
I	Inércia	$[m^4]$
i	Imaginário	
T	Função do tempo	$[s]$
F	Força	$[N]$
S	Tensão de cisalhamento	$[Pa]$

Letras Gregas

ν	Deformação	$[m]$
σ	Tensão	$[MPa]$
θ	Ângulo entre as seções transversais	$[rad]$
ω	Frequência	$[rad/s]$
α	Ângulo de Fase	$[rad]$
\sum	Somatória	

ρ	Densidade
Δ	Variação
λ	Autovalor

Sobrescritos

.	Primeira derivada no tempo
..	Segunda derivada no tempo
\rightarrow	Vetor
'	Derivada

Subscritos

c	Curvatura
en	Eixo neutro
n	Natural
0	Inicial
G	Centro de massa

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Objetivos	15
1.2	Justificativa	16
1.3	Estrutura do trabalho	16
2	REFERENCIAL TEÓRICO	18
2.1	Vibração livre	18
2.1.1	Vibração de sistemas não amortecidos com um grau de liberdade	18
2.1.2	Vibração de sistemas não amortecidos com múltiplos graus de liberdade	20
2.2	Deflexão em viga	22
2.2.1	Linha elástica	22
2.2.2	Equações da curva de deflexão	25
2.3	Vibração transversal de uma viga livre-livre	27
2.4	Vibração transversal de uma viga fixa-livre	32
3	MATERIAIS E MÉTODOS	34
3.1	Materiais	34
3.2	Métodos	38
3.2.1	Cálculo analítico de frequência natural das vigas livre-livre e fixa-livre usando formulação apresentada na seção 2.3 e 2.4	39
3.2.2	Modelagem da viga livre-livre e fixa-livre usando o <i>SolidWorks</i>	39
3.2.3	Determinação dos modos e frequências naturais usando o <i>Ansys</i>	39
3.2.4	Determinação experimental das frequências naturais das vigas usando mar- telo e acelerômetro descritos	40
3.2.5	Processamento e análise das medições usando o <i>LabVIEW</i> e <i>MatLab</i>	41
3.2.6	Cálculo do erro relativo para os casos numérico-analítico e experimental- numérico	43
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	45
4.1	Resultados Numéricos	45
4.1.1	Modos e frequências naturais da viga livre-livre de alumínio	45
4.1.2	Modos e frequências naturais da viga livre-livre de aço	48
4.1.3	Modos e frequências naturais da viga fixo-livre de alumínio	51

4.1.4	Modos e frequências naturais da viga fixo-livre de aço	54
4.2	Resultados Experimentais	58
4.2.1	Resposta no tempo e na frequência da viga livre-livre de alumínio	58
4.2.2	Resposta no tempo e na frequência da viga livre-livre de aço	62
4.2.3	Resposta no tempo e na frequência da viga fixo-livre de alumínio	66
4.2.4	Resposta no tempo e na frequência da viga fixo-livre de aço	70
4.2.5	Modos e frequências naturais do pórtico	75
5	CONCLUSÃO	79
	REFERÊNCIAS	81

1 INTRODUÇÃO

Vibrações são fenômenos frequentes e significativos em uma ampla gama de sistemas estruturais, sejam eles de natureza mecânica ou civil (ONISZCZUK, 2002). Quando uma carga é aplicada a uma estrutura, ela tende a responder com movimentos oscilatórios, resultando em vibrações. Esses movimentos podem ser desencadeados por uma variedade de fontes, desde impactos até cargas cíclicas, e suas consequências variam de desconforto a falhas catastróficas.

Um dos casos catastróficos mais conhecidos foi a queda da Ponte Tacoma Narrows em 1940, nos Estados Unidos. As fortes vibrações induzidas pelo vento coincidiram com as frequências naturais da ponte, causando oscilações cada vez maiores até sua destruição (RAO, 2018). Além disso, o colapso da Ponte de Angers, na França, em 1850, foi atribuído a um grande número de pessoas marchando ao mesmo tempo, causando ressonância e levando ao desastre (TILLY, 2015). Esses acidentes catastróficos podem ser atribuídos ao fenômeno da ressonância.

O fenômeno da ressonância ocorre quando a frequência de excitação de uma estrutura se iguala à sua frequência natural de vibração. A ressonância pode levar a aumentos significativos na amplitude das vibrações, resultando em danos estruturais graves. Por isso, determinar as frequências naturais é fundamental no projeto de estruturas.

O estudo de vibrações é de grande importância prática em áreas como aeronáutica, engenharia civil, arquitetura, maquinário industrial e automotivo. Por exemplo, no setor aeronáutico o estudo de vibrações pode ser usado para aprimorar a segurança das aeronaves. Sendo aplicado minuciosamente nas asas, identificando suas frequências naturais e modos de vibração para evitar ressonâncias perigosas em diferentes condições de voo, como *flutter*, por exemplo. Em 2012, a Boeing precisou atrasar a primeira entrega de seu novo modelo 747-8, devido a preocupações com seu tanque de combustível no estabilizador horizontal poder provocar *flutter* (OSTROWER, 2012). Além das asas, a análise se estende aos motores, avaliando-se as peças rotativas (NETO, 2015) e evitando falhas catastróficas (FABRY; CESKOVIC, 2017). Essa compreensão global não apenas aprimora o conforto dos passageiros, reduzindo as vibrações durante o voo, mas também assegura a integridade estrutural e a confiabilidade das aeronaves ao longo de sua vida útil.

O estudo de vibrações pode ser aplicado em projetos como Baja, Aerodesign e foguetemodélismo desenvolvidos por estudantes. No Baja, por exemplo, o estudo das vibrações é utilizado para otimizar a durabilidade (SOUZA; SOUZA, 2019) e a estabilidade (BRAZ *et al.*, 2022) dos veículos *off-road* em terrenos variados. Já no Aerodesign, a compreensão das vibrações é aplicada no projeto das aeronaves modelo, como no estudo da aeroelasticidade, ou seja, a relação entre a força aerodinâmica e a resposta estrutural (BRITO, 2023). Além disso, nos projetos de foguetemodélismo, a análise das vibrações é essencial para garantir a integridade estrutural durante o lançamento e o voo (QAUMI; HASHEMI, 2023).

As análises modais incluem métodos analíticos, numéricos e experimentais. Esta análise desempenha um papel preponderante na investigação do comportamento dinâmico de estruturas. Isso proporciona uma visão profunda das características fundamentais de um sistema, revelando informações cruciais sobre suas frequências naturais e modos de vibração. Sendo importante para o projeto e a manutenção eficaz de sistemas sujeitos a cargas dinâmicas.

Os métodos numéricos, baseiam-se na discretização do sistema estudado e na resolução de equações diferenciais. A análise modal experimental obtém o modelo modal de dados FRF (Função Resposta em Frequência) medidos ou dados medidos de resposta de vibração livre (HE; FU, 2001).

Para demonstrar os princípios fundamentais das vibrações estruturais, optou-se por estudar uma viga fixa-livre devido a sua geometria simples. Vigas são estruturas lineares que trabalham em posição horizontal ou inclinada, assentadas em um ou mais apoios e que têm a função de suportar carregamentos e esforços diversos (ROSSI, 2019). As vigas podem sofrer vibração longitudinal, lateral, transversal e torcional. Foi escolhido estudar o movimento transversal da viga, pois oferece um terreno fértil para investigações, permitindo uma análise abrangente das diferentes frequências naturais e modos de vibração, como se observa em estudos de Adavardkar e Admuthe (2021), Monteiro (2014), Nadkarni, Bhardwaj e Ninan (2021) e Rani (2018). Com isso, para manter a integridade estrutural, cálculos estruturais para determinar frequências naturais e modos de vibração se tornam desafiadores e muitas vezes complexos. Nesses casos, a utilização de *softwares* de elementos finitos, oferece uma abordagem barata e prática para simular o comportamento vibracional de tais estruturas.

A utilização de métodos numéricos, especialmente o software ANSYS, desempenhará o papel de fornecer a 3 primeiras frequências naturais transversais da viga estudada. A robustez e precisão do Método dos Elementos finitos em análises estruturais complexas, combinadas com sua ampla adoção na indústria, oferece um ambiente propício para explorar problemas em engenharia envolvendo vigas estruturais (QUEIROZ, 2008).

A parte experimental será conduzida por meio do posicionamento da viga em uma bancada de testes, um acelerômetro em sua superfície e a conexão com o *software LabView*, que será a interface gráfica para a coleta de dados estudados.

Os resultados previstos deste estudo incluem uma correlação substancial entre os dados obtidos pela solução numérica e experimental, evidenciando a eficácia dos métodos empregados. A expectativa é não apenas compreender o comportamento vibratório da viga, mas também demonstrar a precisão e viabilidade das abordagens analíticas e experimentais utilizadas.

1.1 Objetivos

Este trabalho visa realizar um estudo comparativo entre métodos numéricos e experimentais utilizados para investigar as características modais de vibração de uma viga fixa-livre.

Tendo em vista o objetivo geral, os objetivos específicos são:

- Entender todas as etapas do processo de análise modal no contexto dos métodos numérico-experimental;
- Compreender o processo de instrumentação usando sensores de vibração, como o acelerômetro e o martelo de impacto;
- Aprender a utilizar o *software LabView* para realizar a aquisição de dados em tempo real, bem como obter a resposta no tempo e sua transformação para obter resposta em frequência;
- Aprender a utilizar o *software Ansys* para realização de análise modal;
- Entender as vantagens e desvantagens dos métodos numéricos e experimentais, bem como quantificar os erros esperados.

1.2 Justificativa

Como exemplificado na introdução deste capítulo, o estudo das vibrações desempenha um papel fundamental em diversas áreas da engenharia, sendo essencial para avaliar a segurança estrutural, projetar edifícios, pontes e controlar vibrações indesejadas em sistemas complexos, como veículos e aeronaves. Este trabalho propõe-se a comparar métodos numérico e experimental empregado nas vibrações,

permitindo sua aplicabilidade em várias áreas de estudo. Salgado e Meireles (2013) propõe uma análise modal para uma viga I, Leme (2014) analisa para o caso de uma viga livre-livre e, Rossi (2019) analisa para uma viga fixa-livre. No entanto, cada abordagem possui suas vantagens e desvantagens: enquanto os métodos numéricos, como o Método dos Elementos Finitos, oferecem flexibilidade e controle sobre as condições do modelo, os métodos experimentais, como a análise modal, fornecem dados reais, porém podem ser limitados pela complexidade na montagem do experimento e custos associados.

1.3 Estrutura do trabalho

O capítulo 2, aborda os conceitos de vibração livre, incluindo vibração de sistemas não amortecidos com um grau de liberdade; vibração de sistemas não amortecidos com múltiplos graus de liberdade; deflexão em viga, contendo linha elástica; e equações da curva de deflexão; vibração transversal de uma viga livre-livre; e vibração transversal de uma viga fixa-livre.

O capítulo 3 aborda os materiais e os métodos, incluindo cálculo analítico de frequência natural das vigas livre-livre e fixa-livre, modelagem da viga fixa-livre, análise modal numérica da viga fixa-livre, análise modal experimental e instrumentação dos modelos livre-livre e fixo-livre e a preparação do *software* de aquisição de sinais.

O capítulo 4 aborda os resultados numéricos, incluindo modos e frequências naturais para as vigas livre-livre e fixa-livre tendo alumínio e aço como materiais; os resultados experimentais, incluindo a resposta no tempo e na frequência da viga livre-livre e fixa-livre tendo o alumínio e aço como materiais.

O capítulo 5 mostra a relação entre os resultados numéricos e experimentais para as vigas livre-livre e fixa-livre com os materiais de alumínio e aço. Incluindo também discussão sobre fatores que contribuíram para discrepâncias nos resultados finais.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, explorou-se os fundamentos teóricos de vibrações mecânicas. A seção 2.1 abordou a vibração de sistemas não amortecidos com um grau de liberdade e a vibração de sistemas não amortecidos com múltiplos graus de liberdade. A seção 2.2 abordou a teoria da linha elástica e equações de deflexão. A seção 2.3 abordou a vibração transversal de uma viga livre-livre através do método analítico. A seção 2.4 abordou a vibração transversal de uma viga fixa-livre pelo método analítico.

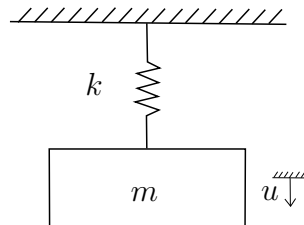
2.1 Vibração livre

Esta seção abordou a vibração de sistemas não amortecidos com um e múltiplos graus de liberdade. Com isso, a partir de sistemas simples, como sistemas massa-mola, pôde-se estudar os princípios básicos da vibração livre.

2.1.1 Vibração de sistemas não amortecidos com um grau de liberdade

A Figura 1 representa um sistema massa-mola, composto pela constante elástica k e pela massa m . O deslocamento u ocorre no eixo vertical.

Figura 1 – Sistema massa-mola com um grau de liberdade.



Fonte: Autoria própria (2024).

Conforme Rao (2018), a equação de movimento do sistema massa-mola é dada por

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (1)$$

Considerando que a solução da equação (1) seja

$$u(t) = X e^{st} \quad (2)$$

no qual X e s são constantes a determinar, então

$$\dot{u}(t) = X s e^{st} \quad (3)$$

$$\ddot{u}(t) = X s^2 e^{st} \quad (4)$$

Substituindo a equação (2), (3) e (4) na equação (1), tem-se

$$mXs^2e^{st} + kXe^{st} = 0$$

$$Xe^{st}(ms^2 + k) = 0$$

Como X não pode ser zero e e^{st} nunca é zero, então

$$ms^2 + k = 0 \quad (5)$$

A equação (5) é chamada de equação característica e sua solução é dada por

$$s_{1,2} = \pm i\omega_n$$

com $i = \sqrt{-1}$ e

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

no qual ω_n é denotado de frequência natural de vibração do sistema massa-mola. Como os dois valores de s satisfazem a equação característica, tem-se

$$u(t) = X_1 e^{i\omega_n t} + X_2 e^{-i\omega_n t} \quad (6)$$

no qual X_1 e X_2 são constantes a determinar.

Substituindo as identidades trigonométricas

$$e^{i\omega_n t} = \cos(\omega_n t) + i \operatorname{sen}(\omega_n t)$$

$$e^{-i\omega_n t} = \cos(\omega_n t) - i \operatorname{sen}(\omega_n t)$$

na equação (6), tem-se

$$u(t) = X_1 [\cos(\omega_n t) + i \operatorname{sen}(\omega_n t)] + X_2 [\cos(\omega_n t) - i \operatorname{sen}(\omega_n t)]$$

$$u(t) = (X_1 + X_2) \cos(\omega_n t) + (X_1 - X_2) i \operatorname{sen}(\omega_n t)$$

fazendo $X_1 + X_2 = A_1$ e $(X_1 - X_2) i = A_2$, então

$$u(t) = A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \operatorname{sen}(\omega_n t) \quad (7)$$

As constantes A_1 e A_2 da equação (7), podem ser obtidas utilizando as condições iniciais.

Considere as seguintes condições iniciais

$$u(0) = u_0 \quad (8)$$

$$\dot{u}(0) = \dot{u}_0$$

então $A_1 = u(0)$ e $A_2 = \frac{\dot{u}_0}{\omega_n}$

$$u(t) = u_0 \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega_n} \text{sen}(\omega_n t) \quad (9)$$

Definindo A_1 e A_2 como

$$A_1 = A \cos \phi$$

$$A_2 = A \text{sen} \phi \quad (10)$$

$$\text{tg} \phi = \frac{A_2}{A_1}$$

em seguida, substituindo a equação (10) na equação (7), obtém-se

$$A \cos(\omega_n t - \alpha) \quad (11)$$

com

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_n}\right)^2} \quad (12)$$

e

$$\phi = \text{arctg} \left(\frac{A_2}{A_1} \right) = \text{arctg} \left(\frac{\dot{u}_0}{u_0 \omega_n} \right) \quad (13)$$

Nota-se que a solução de $u(t)$ é uma função harmônica do tempo. Dessa forma, o sistema massa-mola é denominado de oscilador harmônico.

2.1.2 Vibração de sistemas não amortecidos com múltiplos graus de liberdade

Muitas estruturas, máquinas e dispositivos mecânicos requerem numerosas coordenadas para descrever seu movimento vibratório (INMAN, 2014). Esta seção apresenta o método analítico para o cálculo de frequências naturais em sistemas de vibração não amortecidos com múltiplos graus de liberdade.

Conforme Craig (2006), a equação de movimento de um sistema não amortecido com n graus de liberdade pode ser escrita da seguinte forma

$$M\ddot{u}(t) + Ku(t) = 0 \quad (14)$$

com

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \text{ e } u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

no qual M é denotado de matriz de massa, K é denotada de matriz de rigidez e u é denotado vetor de deslocamento.

A solução para a equação (14) pode ser encontrada a partir da seguinte suposição

$$x_i(t) = X_i T(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

no qual X_i uma constante e T a função do tempo t .

O vetor

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

é conhecido como a forma modal do sistema. Substituindo a equação (15) na equação (14), obtém-se

$$M\vec{X}\ddot{T}(t) + K\vec{X}T(t) = \vec{0} \quad (16)$$

Reescrevendo na forma escalar com as n equações separadas

$$\left(\sum_{j=1}^n m_{ij} X_j \right) \ddot{T}(t) + \left(\sum_{j=1}^n k_{ij} X_j \right) T(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

podendo obter a relação

$$-\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{\left(\sum_{j=1}^n k_{ij} X_j \right)}{\left(\sum_{j=1}^n m_{ij} X_j \right)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

Uma vez que o lado esquerda da equação (17) é independente do índice i , e o lado direito é independente de t , ambos os lados são iguais a uma constante. Assumindo essa constante como ω^2 , a equação (17) foi reescrita como

$$-\frac{\ddot{T}}{T} = \omega^2$$

ou

$$\frac{\sum_{j=1}^n k_{ij} X_j}{\sum_{j=1}^n m_{ij} X_j} \quad (18)$$

A equação (18) pode ser reescrita como

$$[\lambda[K] - [M]] \vec{X} = \vec{0} \quad (19)$$

com

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2} \quad (20)$$

Multiplicando a equação (19) por $[K]^{-1}$, obtém-se

$$[\lambda |I| - |D|] \vec{X} = \vec{0} \quad (21)$$

ou, equivalente

$$\lambda |I| \vec{X} = |D| \vec{X} \quad (22)$$

no qual $|I|$ é a a matriz identidade e

$$|D| = |K|^{-1} |M| \quad (23)$$

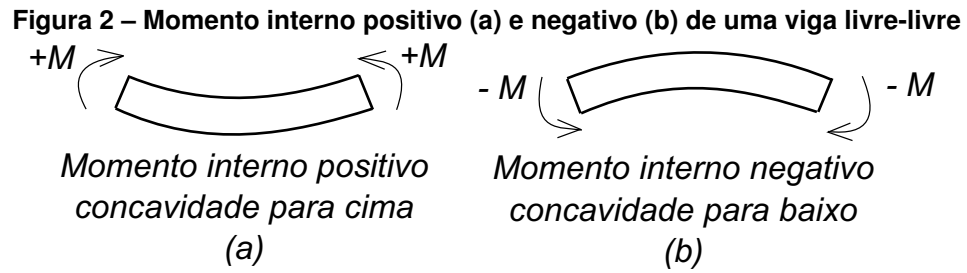
é a matriz dinâmica.

2.2 Deflexão em viga

Esta seção apresenta os métodos para determinar a deflexão e inclinação de uma viga.

2.2.1 Linha elástica

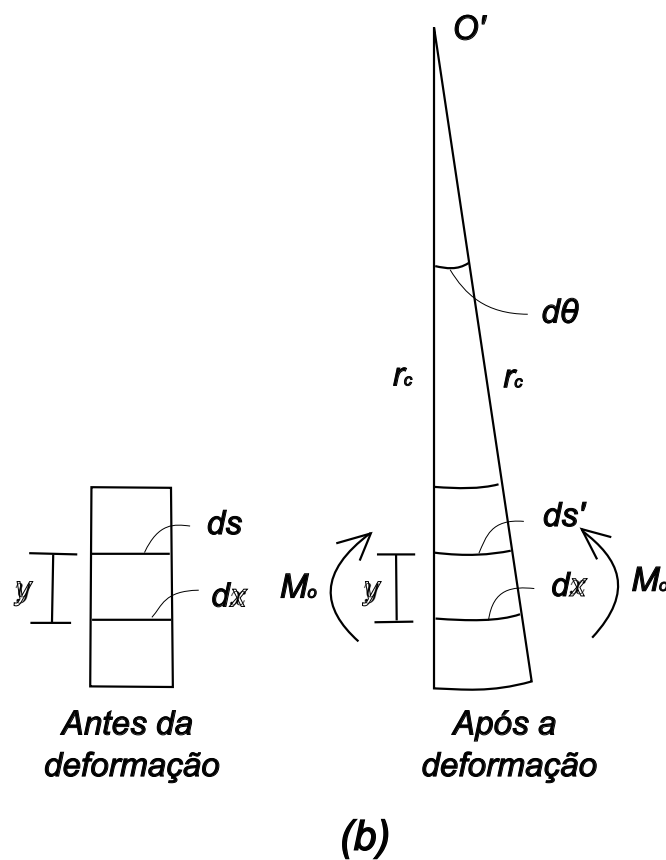
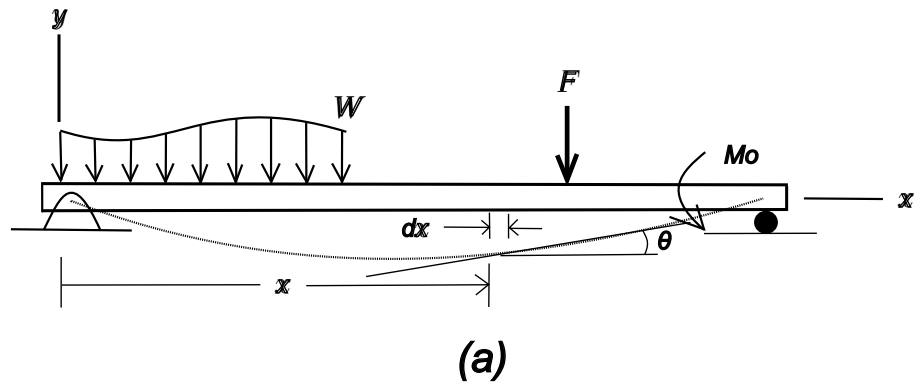
Conforme Hibbeler (2010), o diagrama da deflexão do eixo longitudinal que passa pelo centroide de cada área da seção transversal da viga é denominado de linha elástica. Um momento interno positivo tende a curvar a viga com a concavidade para cima, enquanto, um momento negativo tende a curvar a viga com concavidade para baixo, como mostra a Figura 2. Tendo o conhecimento do diagrama de momento, é possível representar a linha elástica.



Fonte: Adaptado de Hibbeler (2010).

De acordo com Hibbeler (2010), a relação entre o momento fletor interno na viga e o raio de curvatura da curva da linha elástica pode ser utilizada para determinar a inclinação e o deslocamento da linha elástica em uma viga.

Figura 3 – Momento-curvatura antes (a) e após (b) a deformação



Fonte: Adaptado de Hibbeler (2010).

Quando o momento fletor M_o deforma o elemento de viga, como mostra a Figura 3, forma-se um $d\theta$. O arco dx representa uma segmento da linha elástica que intercepta o eixo neutro para cada seção transversal. O raio de curvatura r_c para esse arco é definido como a distância do centro de curvatura até dx . Qualquer arco sobre o elemento, exceto dx , está sujeito a uma deformação normal. Por exemplo, a deformação ε no arco ds posicionado na distância até o eixo neutro y_n , é $\varepsilon = (ds' - ds)/ds$. Todavia, $ds = dx = r_c d\theta$ e $ds' = (r_c - y_n)d\theta$ e, portanto, $\varepsilon = [(r_c - y_n)d\theta - r_c d\theta]/r_c d\theta$ ou

$$\frac{1}{r_c} = -\frac{\varepsilon}{y_n} \quad (24)$$

Segundo Hibbeler (2010), se o material for homogêneo e comportar-se de maneira linear elástica, então pode ser aplicado a lei de Hooke

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (25)$$

no qual E é o módulo de elasticidade em GPa e σ é a tensão em MPa. Ainda segundo Hibbeler (2010), a fórmula da flexão também pode ser aplicado

$$\sigma = -\frac{M_o y_n}{I} \quad (26)$$

no qual I é a inércia. Combinando as equações (25) e (26) e substituindo na equação (24), tem-se

$$\frac{1}{r_c} = \frac{M_o}{EI} \quad (27)$$

O produto EI na equação (27) é denominado rigidez à flexão e sempre representa uma quantidade positiva. Portanto, o sinal de r_c depende da direção do momento. Quando momento é positivo, r_c prolonga-se acima da viga, ou seja, na direção positiva de y ; quando momento é negativo, r_c prolonga-se abaixo da viga, na direção negativa de y .

A utilização da equação (26) também permite expressar a curvatura em termos da tensão na viga

$$\frac{1}{r_c} = -\frac{\sigma}{Ey_n} \quad (28)$$

Vale a pena destacar que as equações (27) e (28) são válidas para raios de curvatura pequenos e grandes. No entanto, o valor calculado de r_c é normalmente uma quantidade muito grande.

2.2.2 Equações da curva de deflexão

De acordo com Hibbeler (2010), a curva da linha elástica para uma viga pode ser expressa por

$$\frac{1}{r_c} = \frac{d^2y/dx^2}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}} \quad (29)$$

Substituindo a equação (29) na equação (27), obtém-se

$$\frac{d^2y/dx^2}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}} = \frac{M_o}{EI} \quad (30)$$

Nota-se que a equação (30) representa uma equação diferencial não linear de segunda ordem. Sua solução fornece a forma exata da linha elástica, considerando que as deflexões na viga ocorram apenas por flexão.

Para facilitar a solução de um número maior de problemas de deflexão, a equação (30) pode ser modificada. Numerosos códigos e manuais de engenharia especificam limitações para as deflexões visando a questões de tolerância ou estética, e o resultado é que as deflexões elásticas para a maioria das vigas e eixos formam uma curva rasa. Conseqüentemente, a inclinação da linha elástica determinada por dy/dx será muito pequena e o quadrado dessa inclinação será desprezível em comparação com a unidade. Com isso, a curvatura pode ser aproximada por $1/r_c = d^2y/dx^2$. A equação (30) pode ser expressa como

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_o}{EI} \quad (31)$$

É possível reescrever a equação (31) de duas maneiras distintas. Se diferenciar cada lado em relação a x e substituir $V = dM_o/dx$, obtém-se

$$\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2y}{dx^2} \right) = V(x) \quad (32)$$

Se diferenciar a equação (32) em relação a x , usando $-w = dV/dx$, obtém-se

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2y}{dx^2} \right) = -w(x) \quad (33)$$

Na maioria dos problemas, a rigidez à deflexão será constante ao longo do comprimento da viga, neste caso, os resultados que se obtém são os seguintes

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = -w(x) \quad (34)$$

$$EI \frac{d^3y}{dx^3} = V(x) \quad (35)$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M_o(x) \quad (36)$$

A solução de qualquer equação mostrada anteriormente requer integrações sucessivas para obter a deflexão y da linha elástica. Para cada integração é necessário introduzir uma 'constante de integração' e então resolver para todas as constantes de modo a obter uma solução única para um problema particular. Por exemplo, se a carga distribuída for expressa em função de x e a equação (34) for usada, é necessário avaliar quatro constantes de integração; contudo, se o momento fletor interno for determinado e a equação (36) for usada, é necessário determinar somente duas constantes de integração. A escolha da equação depende do problema. Entretanto, na maioria dos casos, é mais viável determinar o momento interno em função de x , integrar duas vezes e avaliar somente duas constantes de integração.

Caso a carga sobre a viga for descontínua, isto é, consistir em uma série de várias cargas distribuídas e concentradas, é necessário escrever diversas funções para o momento interno, sendo cada uma delas válida dentro da região entre as descontinuidades. Além disso, a origem da coordenada x pode ser selecionada arbitrariamente.

Para a convenção de sinais e coordenadas, a deflexão positiva, y , é para cima, e o resultado é que o ângulo de inclinação positiva θ será medida na direção anti-horária em relação ao eixo x , quando este for positivo para a direita. Os aumentos positivos dx e dy em x e y provocam um aumento em θ no sentido anti-horário. Por outro lado, se x positivo for orientado para a esquerda, então θ será positivo em sentido horário.

Deve-se salientar que, considerando dy/dx muito pequeno, o comprimento horizontal original do eixo da viga e o arco de sua linha elástica serão aproximadamente os mesmos. Na qual $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}dx \approx dx$. O resultado é considerado que pontos sobre a linha elástica são deslocados no sentido vertical e não horizontal. Além disso, visto que o ângulo de inclinação θ será muito pequeno, seu valor em radianos pode ser determinado diretamente por $\theta \approx \text{tg } \theta = dy/dx$. As constantes de integração são determinadas pela avaliação das funções para cisalhamento, momento, inclinação ou deslocamento em um determinado ponto na viga no qual o valor da função é conhecido. Esses valores são denominados condições de contorno.

2.3 Vibração transversal de uma viga livre-livre

Esta seção aborda a vibração transversal de uma viga livre-livre, incluindo as equações fundamentais, condições de contorno e frequências naturais.

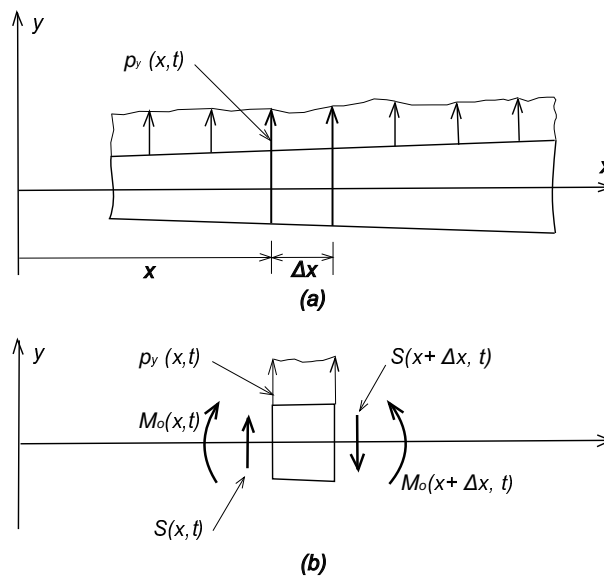
Conforme Craig (2006), a equação de movimento de uma viga longa e fina sofrendo vibração transversal, pode ser derivada usando a Segunda Lei de Newton. A Figura 4 mostra uma seção de uma viga sofrendo movimento transversal na direção vertical e o diagrama de corpo livre. O deslocamento transversal do ponto $(x,0)$ no eixo neutro da viga é chamado de $v(x,t)$, com v positivo na direção $+y$. O momento fletor na seção x é $M_o(x,t)$, a força de cisalhamento transversal é $S(x,t)$ e a força transversal externa por unidade de comprimento é $p_y(x,t)$.

De acordo com Craig (2006), as considerações de Bernoulli-Euler para teoria elementar das vigas são:

1. O plano $x - y$ é o principal plano da viga, e permanece plano enquanto a viga deforma na direção y .
2. Há um eixo na viga, no qual não sofre tração nem compressão. É chamado de eixo neutro, e se localiza no eixo x . O plano original xz é chamado de superfície neutra.

3. Seção transversal, o qual é perpendicular ao eixo neutro na viga não-deformada, permanece plano e perpendicular ao eixo neutro deformado; isto é, a deformação por cisalhamento transversal é desconsiderado.
4. O material é linearmente elástico, com módulo de elasticidade $E(x)$; isto é, a viga é homogênea em qualquer seção transversal. (Geralmente, $E = \text{constante}$ através da viga).
5. Tensões σ_y e σ_z são desprezíveis comparados a σ_x .

Figura 4 – Vibração Transversal



Fonte: Adaptado de Craig (2006).

6. A inércia rotacional da viga pode ser desprezível na equação do momento.
7. A densidade mássica, $\rho(x)$, é constante em cada seção transversal, para que o centro de massa coincida com o centroide da seção transversal. (Geralmente, $\rho = \text{constante}$ ao longo da viga).

Das cinemáticas baseadas nas suposições 2 e 3, a tensão extensional, $\epsilon(x,y,t)$, pode ser relacionada com a curvatura. Para uma viga linearmente elástica em que as propriedades são independentes da posição na seção transversal, o momento fletor pode ser relacionado com a curvatura pela equação momento-curvatura, como mostra a equação (27).

A equação de movimento para a massa Δm no diagrama de corpo livre na Figura 4 pode ser derivado usando a Lei de Newton. Portanto

$$\sum F_y = \Delta m a_y \quad (37)$$

e

$$\sum M_G = \Delta I_G \alpha \quad (38)$$

no qual F_y é a força na direção y , α é a aceleração angular, M_G o momento no centro de massa G e ΔI_G é a inércia rotacional no centro de massa. Entretanto, de acordo com a suposição 6, a inércia rotacional pode ser desprezada, assim a equação (38) se reduz a

$$\sum M_G = 0 \quad (39)$$

Utilizando o diagrama de corpo livre da Figura 4 e igualando as forças em y à equação (37), obtém-se

$$S(x,t) - S(x + \Delta x,t) + p_y(x,t)\Delta x = \rho A \Delta x \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (40)$$

Dividindo a equação (40) por Δx e tomando o limite $\Delta x \rightarrow 0$, obtém-se

$$-\frac{\partial S}{\partial x} + p_y(x,t) = \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (41)$$

Em seguida, utilizando o diagrama de corpo livre da Figura 4 e igualando os momentos à equação (38),

$$M_o(x,t) - M_o(x + \Delta x,t) + S(x,t)\frac{\Delta x}{2} + S(x + \Delta x,t)\frac{\Delta x}{2} = 0 \quad (42)$$

Dividindo a equação (42) por Δx e tomando o limite $\Delta x \rightarrow 0$, obtém-se

$$S = \frac{\partial M_o}{\partial x} \quad (43)$$

Se a inclinação da viga permanecer pequena, isto é, se $\partial v / \partial x \ll 1$, a curvatura pode ser aproximada por $\partial^2 v / \partial x^2$. Portanto, a equação (27) se torna

$$M_o(x,t) = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (44)$$

Combinando a equação (41), (43) e (44)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p_y(x,t), \quad 0 < x < L \quad (45)$$

A equação (45) é uma equação diferencial de movimento governando a vibração transversal de uma viga, no qual ρ é a densidade do material e A é a área da seção transversal. É válido somente para vigas que são relativamente longas e finas, ou seja, vigas que possuem seu comprimento significativamente maior que sua espessura.

A vibração transversal da viga de Bernoulli-Euler é governada pela equação (45). Para vibrações livres $P_y(x,t) = 0$, logo

$$(EIv''')'' + \rho A \ddot{v} = 0 \quad (46)$$

no qual $\frac{d^2v}{dx^2} = v''$ e $\frac{d^2v}{dt^2} = \ddot{v}$, assumindo que

$$v(x,t) = V(x) \cos(\omega t - \alpha) \quad (47)$$

no qual ω é a frequência natural e α é o ângulo de fase. A equação (46) pode ser reescrita da seguinte forma

$$(EIV'') - \rho A \omega^2 V = 0 \quad (48)$$

Como soluções de forma fechada não estão disponíveis para esta equação com coeficientes variáveis, será analisado apenas vibrações livres de vigas uniformes.

Para vibração livre de uma viga uniforme, a equação (48) é reduzida a

$$\frac{d^4V}{dx^4} - \lambda^4 V = 0 \quad (49)$$

com

$$\lambda^4 = \omega^2 \frac{\rho A}{EI} \quad (50)$$

A solução geral da equação (49) pode ser escrita na forma

$$V(x) = A_1 e^{\lambda x} + A_2 e^{-\lambda x} + A_3 e^{i\lambda x} + A_4 e^{-i\lambda x} \quad (51)$$

Conforma Craig (2006), a equação (51) pode ser reescrita como

$$V(x) = B_1 \sinh \lambda x + B_2 \cosh \lambda x + B_3 \sin \lambda x + B_4 \cos \lambda x \quad (52)$$

Diferenciando a equação (52) em x ,

$$\begin{aligned} \frac{d^2V}{dx^2}(x) &= \lambda^2 [C_1(-\cos \lambda x + \cosh \lambda x)] + C_2(-\cos \lambda x - \cosh \lambda x) \dots \\ &\dots + C_3(-\sin \lambda x + \sinh \lambda x) + C_4(-\sin \lambda x - \sinh \lambda x) \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3V}{dx^3}(x) &= \lambda^3 [C_1(\sin \lambda x + \sinh \lambda x) + C_2(\sin \lambda x - \sinh \lambda x) \dots \\ &\dots + C_3(-\cos \lambda x + \cosh \lambda x) + C_4(-\cos \lambda x - \cosh \lambda x)] \end{aligned} \quad (54)$$

Para uma viga livre-livre, tem-se as seguintes condições de contorno em $x = 0$:

$$EI \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=0} = 0 \quad (55)$$

e em $x = L$:

$$EI \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=L} = 0 \quad (56)$$

Usando as condições, obtém-se

$$C_2 = C_4 = 0 \quad (57)$$

Substituindo a equação (57) nas equações (53) e (54) chega-se a

$$\begin{aligned} C_1(-\cos \lambda x + \cosh \lambda x) + C_3(-\sin \lambda x + \sinh \lambda x) &= 0 \\ C_1(\sin \lambda x + \sinh \lambda x) + C_3(-\cos \lambda x + \cosh \lambda x) &= 0 \end{aligned} \quad (58)$$

escrevendo em forma de matriz

$$\begin{bmatrix} -\cos \lambda x + \cosh \lambda x & -\sin \lambda x + \sinh \lambda x \\ \sin \lambda x + \sinh \lambda x & -\cos \lambda x + \cosh \lambda x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (59)$$

para uma solução não trivial, as constantes C_1 e C_3 não podem ser zero. Com isso, o determinante precisa ser nula.

$$\begin{vmatrix} -\cos \lambda x + \cosh \lambda x & -\sin \lambda x + \sinh \lambda x \\ \sin \lambda x + \sinh \lambda x & -\cos \lambda x + \cosh \lambda x \end{vmatrix} = 0 \quad (60)$$

resolvendo a equação (60)

$$\cos \lambda x \cosh \lambda x - 1 = 0$$

encontrando suas raízes através de *MatLab*

$$\begin{aligned} \lambda_1 L &= 4,7300, & \lambda_2 L &= 7,8532 \\ \lambda_3 L &= 10,9956, & \lambda_4 L &= 14,1371 \end{aligned} \quad (61)$$

A partir da equação (50), as frequências naturais em *rad/s* são dadas por

$$\omega_r = \frac{(\lambda_r L)^2}{L^2} \left(\frac{EI}{\rho A} \right)^{1/2} \quad (62)$$

Substituindo a equação (61) na equação (62), obtém-se as quatro primeiras frequências naturais associadas a vibração transversal de uma viga livre-livre. As frequências naturais são:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{22,372}{L^2} \left(\frac{EI}{\rho A} \right)^{1/2} \\
\omega_2 &= \frac{61,672}{L^2} \left(\frac{EI}{\rho A} \right)^{1/2} \\
\omega_3 &= \frac{120,903}{L^2} \left(\frac{EI}{\rho A} \right)^{1/2} \\
\omega_4 &= \frac{199,857}{L^2} \left(\frac{EI}{\rho A} \right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{63}$$

2.4 Vibração transversal de uma viga fixa-livre

Esta seção aborda a vibração transversal de uma viga fixa-livre, as equações fundamentais tem por base a seção 2.3.

Para uma viga fixa-livre, tem-se as seguintes condições de contorno em $x = 0$:

$$V(0) = 0, \quad \left. \frac{dV}{dx} \right|_{x=0} = 0 \tag{64}$$

e em $x = L$:

$$\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{d^3V}{dx^3} \right|_{x=L} = 0 \tag{65}$$

Substituindo as equações (64) e (65) nas equações (52), (53) e (54), e escrevendo na forma matricial chega-se a

$$\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 \\
\lambda & 0 & \lambda & 0 \\
\lambda^2 \sinh \lambda L & \lambda^2 \cosh \lambda L & -\lambda^2 \sin \lambda L & -\lambda^2 \cos \lambda L \\
\lambda^3 \cosh \lambda L & \lambda^3 \sinh \lambda L & -\lambda^3 \cos \lambda L & \lambda^3 \sin \lambda L
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
C_1 \\
C_2 \\
C_3 \\
C_4
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\
0 \\
0 \\
0
\end{bmatrix} \tag{66}$$

Para estas equações homogêneas terem uma solução não-trivial, a determinante precisa ser nula. Com $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$

$$\begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 \\
\lambda & 0 & \lambda & 0 \\
\lambda^2 \sinh \lambda L & \lambda^2 \cosh \lambda L & -\lambda^2 \sin \lambda L & -\lambda^2 \cos \lambda L \\
\lambda^3 \cosh \lambda L & \lambda^3 \sinh \lambda L & -\lambda^3 \cos \lambda L & \lambda^3 \sin \lambda L
\end{vmatrix} = 0 \tag{67}$$

resolvendo encontra-se a equação característica

$$\cos \lambda L \cosh \lambda L + 1 = 0 \quad (68)$$

encontrando suas raízes através do *MatLab*

$$\begin{aligned} \lambda_1 L &= 1,8751, & \lambda_2 L &= 4,6941, \\ \lambda_3 L &= 7,8548, & \lambda_4 L &= 10,996 \end{aligned} \quad (69)$$

substituindo a equação (69) na equação (62), obtém-se as quatro primeiras frequências naturais associadas a vibração transversal de uma viga fixa-livre. As frequências naturais são:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{3,516}{L^2} \left(\frac{EI}{\rho A} \right)^{1/2} \\ \omega_2 &= \frac{22,03}{L^2} \left(\frac{EI}{\rho A} \right)^{1/2} \\ \omega_3 &= \frac{61,70}{L^2} \left(\frac{EI}{\rho A} \right)^{1/2} \\ \omega_4 &= \frac{120,912}{L^2} \left(\frac{EI}{\rho A} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (70)$$

3 MATERIAIS E MÉTODOS

Este capítulo aborda os materiais e métodos utilizados neste trabalho. Os materiais utilizados incluem *softwares* como *MatLab*, *Ansys* e *LabView*. Além disso, na parte experimental utilizou-se instrumentos como acelerômetro e martelo de impacto, bem como a montagem de uma bancada de testes.

3.1 Materiais

Os *softwares* utilizados neste trabalho são o *MatLab*, o *SolidWorks* e o *Ansys*. Tais *softwares* possuem grande número de tutoriais e materiais de apoio disponíveis, proporcionando maior facilidade para o usuário.

O *MatLab* é uma plataforma de programação feita para engenheiros e cientistas analisarem dados, desenvolverem algoritmos, criar modelos, aplicações, entre outros. Neste estudo, é utilizado para resolução de equações e plotagem de gráficos.

O *SolidWorks* é uma marca da Dassault Systèmes especializada em criar e vender *software* para modelagem de sólidos, *design* assistido por computador (CAD), engenharia assistida por computador (CAE), design CAD 3D, colaboração, análise e gestão de dados de produtos. Neste estudo, foi utilizado para a modelagem da viga estudada, que serviu para sua fabricação e posteriormente conexão com o *Ansys*.

O *Ansys* é um *software* usado para realizar análises estruturais com opções avançadas de solução, incluindo dinâmica linear, não-linear, análises térmicas, materiais, compostos, entre outros. Neste estudo é utilizado para análise modal da viga estudada.

O *LabVIEW* é um ambiente de programação gráfica que proporciona testes para desenvolvimentos de sistemas, com abordagens intuitivas em programação, conexão com qualquer instrumento e interface totalmente integrada. Neste estudo, é utilizado para o desenvolvimento da lógica e coleta dos dados experimentais.

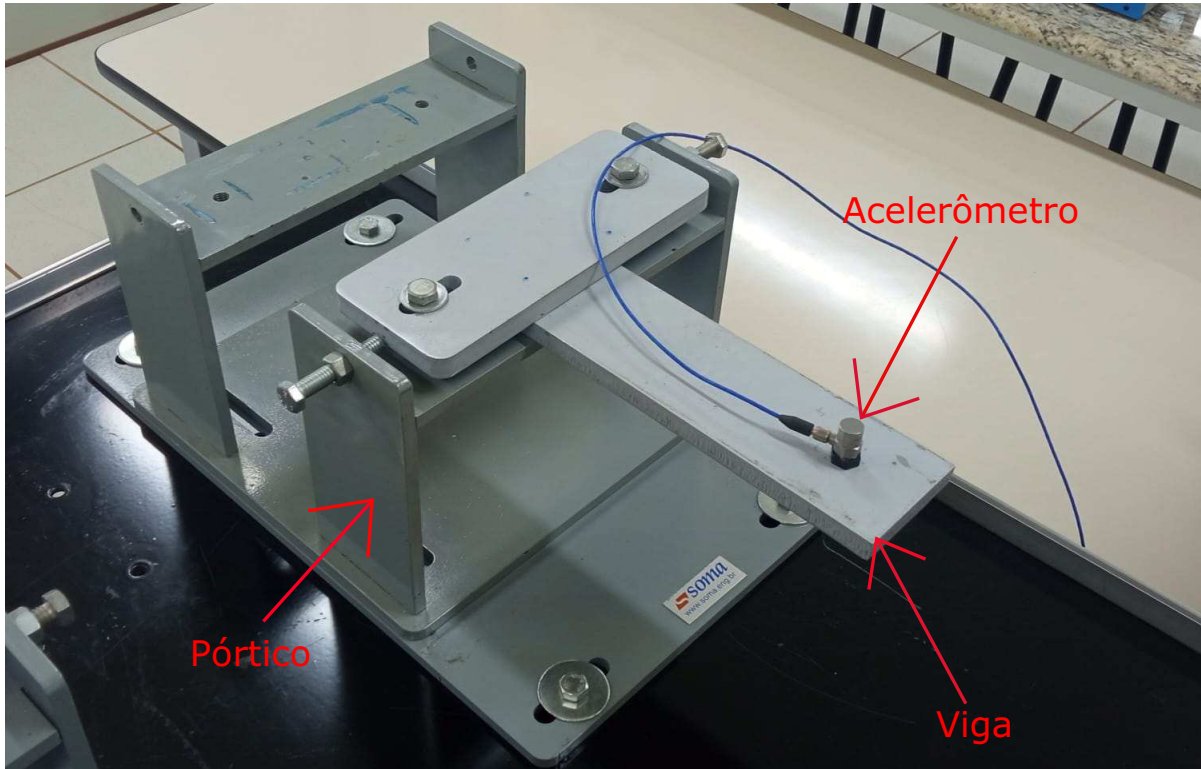
Além dos *softwares* mencionados montou-se uma bancada de teste como mostra a Figura 5. Esta bancada possui uma base presa em uma mesa através de 4 parafusos. Nesta base conecta-se um outro suporte, no estilo de um pórtico, fixado através de 2 parafusos. No topo do pórtico é posicionado a viga estudada e, em seu topo, uma outra viga prensou a viga estudada através de 2 parafusos.

A bancada é instrumentada com um sensor acelerômetro PCB Piezotronics modelo 352C03 e um martelo de impacto PCB Piezotronics modelo 086C03 ICP. Para a aquisição de sinais é utilizado o módulo NI 9234 da National Instruments.

A bancada está localizada na sala 108 do bloco K na UTFPR campus Londrina. Para este estudo, fabricou-se a viga estudada e a viga que a prensou. A base, o pórtico, os parafusos e os instrumentos estavam disponíveis no laboratório.

A Figura 5 mostra a viga fixo-livre, escolhida devido a existência de uma solução analítica. Este trabalho analisa a vibração transversal discutida na seção 2.3 e 2.4. Neste trabalho é utilizado o alumínio e o aço como materiais, tendo dimensões de 200 mm de comprimento, 66 mm de largura e 12,7 mm de espessura.

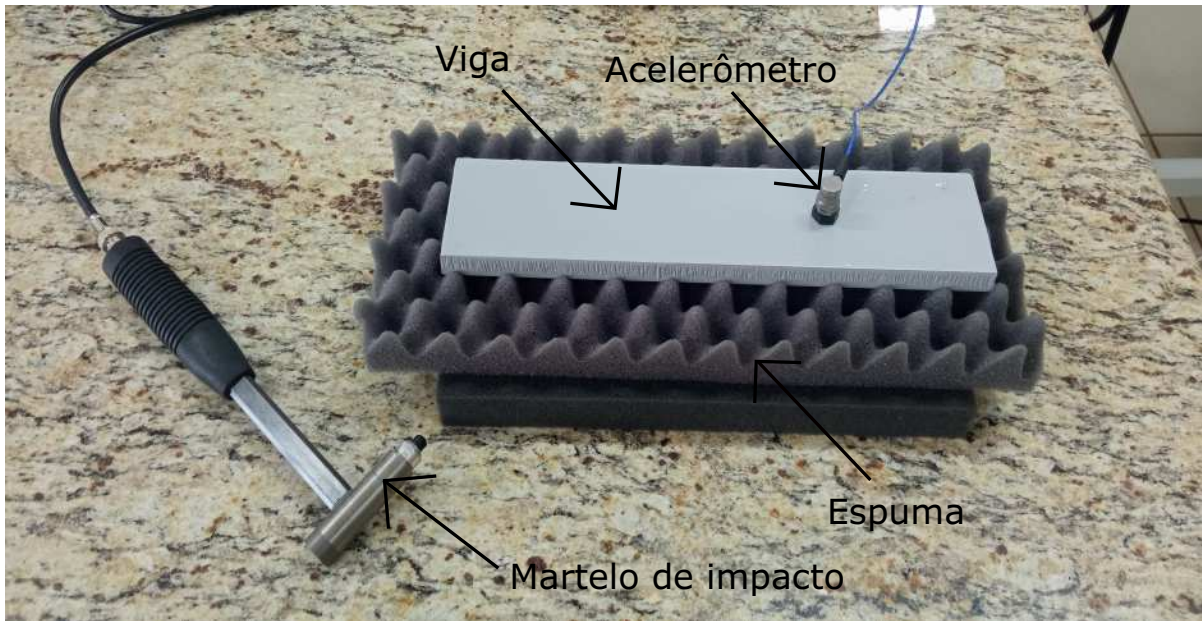
Figura 5 – Viga fixo-livre com o sensor apoiado em sua superfície



Fonte: Autoria Própria (2024).

Além da configuração fixo-livre, utilizou-se também de uma viga livre-livre com dimensões de 282 mm de comprimento, 66 mm de largura e 12,7 mm de espessura. Este caso é útil para a validação dos instrumentos. Este estaria apoiado em uma espuma, como mostra a Figura 6.

Figura 6 – Viga livre-livre apoiada em uma espuma com o sensor ao lado do martelo de impacto



Fonte: Aatoria Própria (2024).

O acelerômetro utilizado é o PCB Piezotronics modelo 352C03. De acordo com PCB Piezotronics (2002), possui sinal de saída de baixa impedância, o que pode ser transmitida por longos cabos em ambientes hostis sem a perda da qualidade do sinal; operação de dois fios com cabo coaxial de baixo custo, fio de fita de dois condutores ou cabeamento de par trançado; baixo ruído, sinal de saída de voltagem compatível com leitura padrão, análise de sinal, gravação, e equipamento de aquisição de dados; baixo custo por canal - acelerômetros da ICP requerem apenas um condicionador de sinal de corrente constante para operar; por fim, recurso auto-testado intrínseco - monitorar a tensão de polarização de saída do sensor fornece uma indicação de operação adequada, condição defeituosa e cabos ruins.

A faixa de frequência ($\pm 10\%$) do acelerômetro no sistema internacional varia entre 0,5 e 10000 Hz. Já sua calibração equivale a 9,93 mV/g. A faixa de amplitude equivale a ± 4900 m/s² pk. A excitação de corrente constante se encontra entre 2 e 20 mA.

Figura 7 – Acelerômetro PCB Piezotronics modelo 352C03 utilizado no estudo



Fonte: Aatoria Própria (2024).

O módulo NI 9234, da National Instruments é utilizado para fazer medições de alta precisão a partir de sensores IEPE. O NI 9234 oferece 102 dB de faixa dinâmica e incorpora sinal Piezoelétrico de Eletrônica Integrada (IEPE) com corrente constante de 2 mA. Os quatro canais de entrada adquirem simultaneamente a taxas de até 51,2 kS/s. Além disso, o módulo inclui filtros *anti-aliasing* integrados que ajustam automaticamente à taxa de amostragem. Compatível com uma portadora USB de módulo único e *hardware* NI CompactDAQ, o NI 9234 é ideal para uma ampla variedade de aplicações móveis ou portáteis, como monitoramento de condições de máquinas industriais e em veículos testes de ruído, vibração e aspereza (NATIONAL INSTRUMENTS, 2015).

Figura 8 – Módulo de aquisição de sinais NI9234 da National Instruments



Fonte: A autoria Própria (2024).

O martelo de impacto é da marca *PCB Piezotronics*, modelo 086C03 ICP Impact Hammer. Este consiste em um sensor de força ICP integrado montado na extremidade de impacto da cabeça do martelo. O sensor transfere a força de impacto em um sinal elétrico para exibição e análise. É estruturado com cristais de quartzo rígidos e um amplificador de ganho unitário microeletrônico integrado (PCB PIEZOTRONICS, 2007). A sensibilidade do martelo de impacto utilizado equivale a 2,367 mV/N

O sensor ICP opera através de um cabo padrão de dois fios de uma unidade de alimentação PCB. Por razões de segurança, o cabo de fita facilmente reparável destina-se a ser o elo mais fraco em projetos de martelos maiores. A extremidade de impacto do martelo possui um orifício roscado para instalação de uma variedade de pontas de impacto. A ponta funciona para transferir a força do impacto para o sensor e protege a face do sensor contra danos.

Figura 9 – Martelo de impacto PCB Piezotronics modelo 086C03 utilizado no estudo



Fonte: Aatoria Própria (2024).

3.2 Métodos

Esta seção define os métodos e técnicas utilizados para coletar e analisar os dados necessários para encontrar as frequências naturais de uma viga fixa-livre. A metodologia utilizada consiste nos seguintes passos:

1. Cálculo analítico de frequência natural das vigas livre-livre e fixa-livre usando formulação apresentada na seção 2.3 e 2.4
2. Modelagem das vigas de alumínio e aço usando o *SolidWorks*
3. Determinação dos modos e frequências naturais usando o *Ansys*
4. Determinação experimental das frequências naturais das vigas usando martelo e acelerômetro
5. Processamento e análise das medições usando o *LabVIEW* e *MatLab*
6. Cálculo do erro relativo para os casos numérico-analítico e experimental-numérico

O caso livre-livre, mostrado na Figura 6, é utilizado para validar os instrumentos através das frequências naturais, comparando o método experimental com o analítico. Já o caso fixo-livre, como mostrado na Figura 5, é o foco deste estudo comparando as frequências naturais coletadas de maneira numérica com o experimental.

3.2.1 Cálculo analítico de frequência natural das vigas livre-livre e fixa-livre usando formulação apresentada na seção 2.3 e 2.4

No primeiro passo, com base nas seções 2.3 e 2.4 resolve-se a equação (63), para encontrar as frequências naturais para o caso livre-livre; e a equação (70), para encontrar as frequências naturais para o caso fixo-livre; através do *MatLab*. Para resolver ambas as equações, define-se as dimensões das vigas livre-livre e fixa-livre, como mostrado na seção 3.1; módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e densidade foram retirados do Rao (2018) e se encontram na Tabela 1.

Tabela 1 – Propriedades dos materiais utilizados

Material	Módulo de Elasticidade (GPa)	Coeficiente de Poisson	Densidade (kg/m³)
Aço	207	0,292	7798,16
Alumínio	71	0,334	2711,51

Fonte: Autoria Própria (2024).

As propriedades mecânicas dos materiais utilizados neste estudo, apresentadas na Tabela 1, foram obtidas a partir de referências bibliográficas, uma vez que não foram realizados ensaios experimentais para determiná-las. Para aumentar a confiabilidade nos resultados, optou-se pela utilização de dois materiais distintos, buscando fornecer mais dados e maior segurança à análise.

3.2.2 Modelagem da viga livre-livre e fixa-livre usando o *SolidWorks*

No segundo passo, utiliza-se do *SolidWorks* como ferramenta de CAD para a modelagem da viga estudada. Dois arquivos são modelados, um para o caso livre-livre e outro para o caso fixo-livre.

A gravação do arquivo que será feito a análise numérica é em *.STEP* e se justifica pelo fato de ser o formato aceito para conexão com o *Ansys*. Já a gravação para o arquivo enviado para fabricação é no formato *.DWG* e se deve pelo fato de ser o formato utilizado para cortes a laser.

3.2.3 Determinação dos modos e frequências naturais usando o *Ansys*

No terceiro passo, utiliza-se o *Ansys* para a análise de modos e frequências naturais das vigas livre-livre e fixa-livre, com as dimensões da seção 3.1. Para isso, utiliza-se o *Workbench 2023 R2* versão estudantil que, de acordo com o fabricante, para analisar geometrias, utiliza-se blocos de construção, chamados sistemas, ao espaço de trabalho principal do projeto. Esses sistemas constituem um diagrama semelhante a um fluxograma, que representa

o fluxo de dados no projeto. Cada sistema é um bloco de um ou mais componentes chamados células, que representam as etapas sequenciais necessárias para o tipo específico de análise.

O foco deste trabalho é a análise modal, portanto ao criar um arquivo novo, seleciona-se na barra de *Analysis Systems* a opção *Modal*.

Com o novo bloco criado, seleciona-se a opção *Engineering Data*, sendo o local em que o usuário fornece ao *Ansys* as informações do material, como densidade, coeficiente de Poisson e o módulo de elasticidade. Nota-se que esta etapa apenas insere informações sobre o material, não o conectando à estrutura estudada.

Em seguida, através da opção *Geometry*, importa-se a geometria feita anteriormente no *SolidWorks* e gravada no formato *.STEP*.

Uma vez importada a geometria, acessa-se a opção *Model*, a qual abre uma nova janela em que as condições de contorno podem ser inseridas.

Seleciona-se a opção *Geometry*. Uma nova caixa aparecerá no canto inferior esquerdo, permitindo ao usuário inserir o material pré-preparado no *Engineering Data*.

Na opção *Mesh*, insere-se o tamanho de 0,00282 mm para cada elemento, isso permite que a malha fique fina e os resultados mais precisos. Uma vez feito, clica-se com o botão direito na opção *Mesh* e depois em *Generate Mesh*. Isso faz com que a malha seja criada. A malha representa a divisão de elementos no modelo estudado.

Para fixar uma das faces, clica-se com o botão direito em *Analysis Settings*, seleciona-se *Fixed Support* e seleciona-se a face que simulará o engastamento.

Na opção *Modal*, seleciona-se a opção *Analysis Settings*, a qual permite inserir a quantidade de frequências naturais que deseja analisar. Este número é inserido na opção *Max Modes to find*.

Por fim, através da opção *Solve*, uma nova caixa será aberta no canto inferior da tela com as frequências naturais. Clicando com o botão direito nas frequências naturais encontradas, seleciona-se *Select all*. Clica-se novamente com o botão direito no mesmo local e seleciona-se *Create Mode Shapes Results*. Isso criará as animações na opção *Solution* que permitirá analisar o comportamento do componente nas diferentes frequências naturais.

Com a execução adequada dos passos anteriores, é possível determinar numericamente as frequências naturais da viga fixa-livre. Os resultados obtidos estão na seção 4.1.

3.2.4 Determinação experimental das frequências naturais das vigas usando martelo e acelerômetro descritos

No quarto passo, iniciou-se a análise modal experimental para os casos livre-livre e fixo-livre que podem ser descritos da seguinte forma:

- Experimento com a viga livre-livre: Para a preparação da bancada para o modelo livre-livre, apoiou-se a viga estudada sobre uma espuma. A espuma permitiu que a viga

oscilasse livremente. Para sua instrumentação, posicionou-se o acelerômetro em sua superfície para que pudesse ser atingida pelo martelo de impacto, como mostra a Figura 6.

- Experimento com a viga fixa-livre: A montagem da bancada para o modelo fixo-livre ocorreu como descrito na seção 3.1. Para sua instrumentação, posicionou-se o acelerômetro na superfície da viga como mostrado na Figura 5, para que pudesse ser atingido pelo martelo de impacto.

O experimento para o modo fixo-livre foi feito em um pórtico, entretanto testou-se em outras duas superfícies para entender se ocorreria mudança nos resultados. Como foi observado que a diferença foi mínima, o pórtico foi mantido como o apoio da viga.

3.2.5 Processamento e análise das medições usando o *LabVIEW* e *MatLab*

No quinto passo, para analisar a peça, inicia-se preparando o *LabView* para que a aquisição de sinais fosse possível.

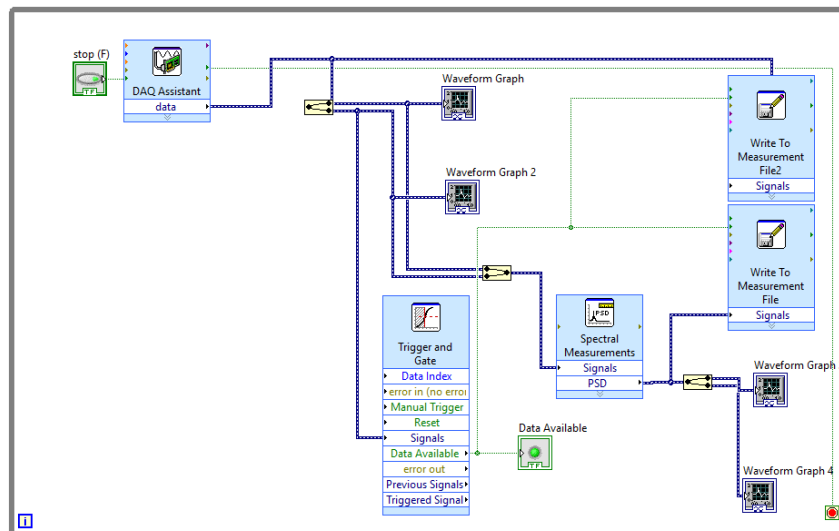
A Figura 10 apresenta a lógica utilizada para a coleta dos dados de maneira experimental. Utiliza-se de cinco blocos principais, sendo eles *DAQ Assistant*, *Trigger and Gate*, *Spectral Measurements* e dois *Write To Measurement File*.

Como a célula possui duas entradas, do martelo e do acelerômetro, separa-se os sinais para que sejam tratados de maneira independente, sendo que o sinal do martelo passa pela célula *Trigger and Gate*, a qual se conecta a uma função booliana. Essa função está conectada a célula *Write To Measurement File*, que grava os dados coletados. Ou seja, enquanto esta célula não recebesse o sinal do martelo, ela não gravaria os dados.

Pelo outro caminho, os sinais são unidos e seguem pela célula *Spectral Measurements*. Neste ocorre a Transformada Rápida de Fourier, transformando os dados em frequência.

Além disso, cria-se 4 gráficos para melhor visualização, estes incluem: força, aceleração e a transformada de Fourier da força e da aceleração.

Figura 10 – Diagrama de blocos utilizado para a coleta dos dados

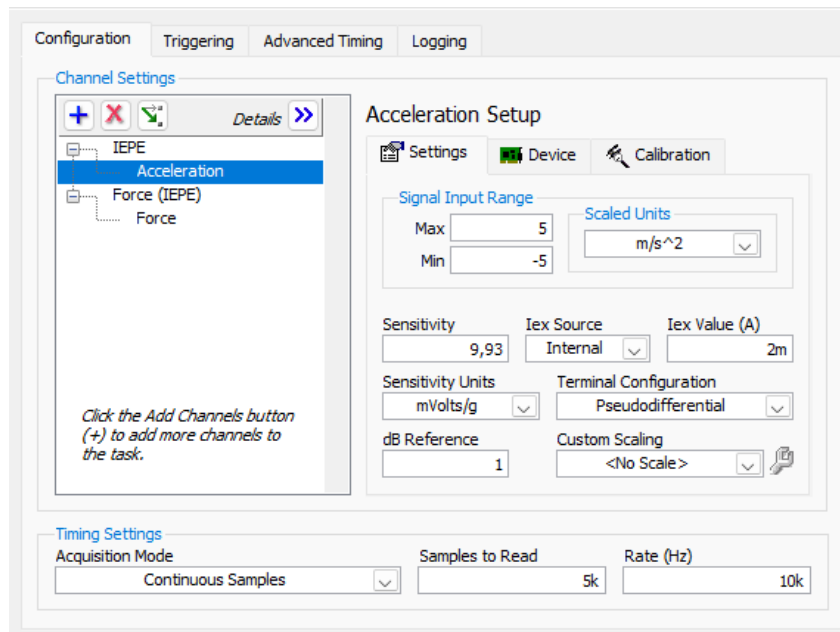


Fonte: Autoria Própria (2024).

No diagrama de blocos, a célula *DAQ Assistant* permite configurar em qual entrada do módulo conecta-se ao acelerômetro e ao martelo de impacto, e também fornecer informações das calibrações.

A Figura 11 apresenta os dados fornecidos para o *LabVIEW* sobre o acelerômetro, incluindo a sensibilidade de 9,93 mV/g. Nota-se também que para o caso livre-livre, foi configurado para ler um total de 5000 amostras a uma taxa de 10000 Hz após ser atingido pelo martelo de impacto e, para o caso fixo-livre, foi configurado para ler um total de 2000 amostras a uma taxa de 10000 Hz após ser atingido pelo martelo de impacto. O número menor de amostras coletadas em relação ao modelo livre-livre se deve pelo fato de que o tempo de acomodação para o fixo-livre é mais curto, necessitando de menos amostras.

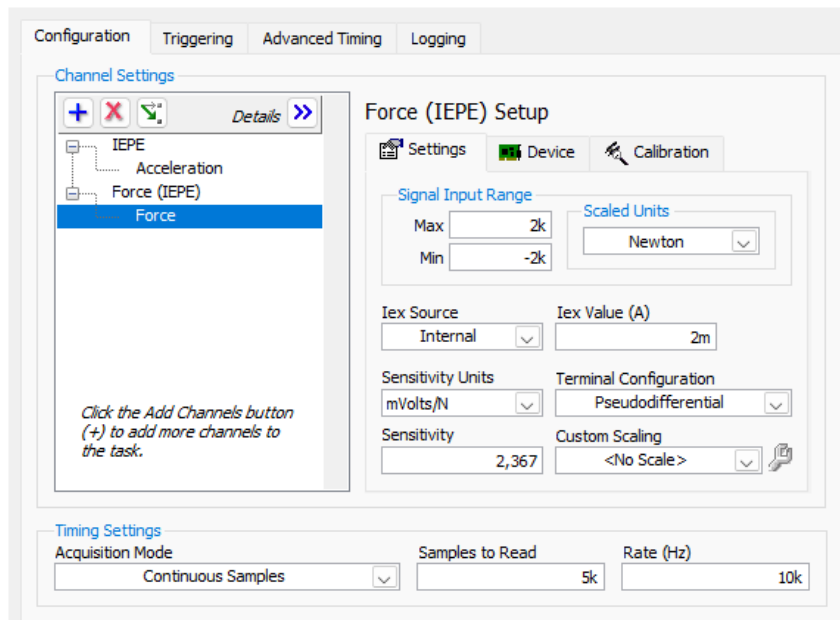
Figura 11 – Informações fornecidas sobre o acelerômetro



Fonte: Autoria Própria (2024).

A Figura 12 apresenta as informações sobre o martelo de impacto fornecidas ao *LabVIEW*, incluindo a sensibilidade de 2,367 mV/g.

Figura 12 – Informações fornecidas sobre o martelo de impacto



Fonte: Autoria Própria (2024).

3.2.6 Cálculo do erro relativo para os casos numérico-analítico e experimental-numérico

Para calcular o erro relativo, em porcentagem, para o caso numérico-analítico, utiliza-se a equação (71).

$$\frac{|\text{Resultado Analítico} - \text{Resultado Numérico}|}{\text{Resultado Analítico}} \cdot 100 \quad (71)$$

Para calcular o erro relativo ,em porcentagem, para o caso experimental-numérico, utiliza-se a equação (72).

$$\frac{|\text{Resultado Experimental} - \text{Resultado Numérico}|}{\text{Resultado Experimental}} \cdot 100 \quad (72)$$

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Esta seção apresenta os resultados e discussões obtidos empregando os métodos numérico e experimental descritos no capítulo 3.2. A seção 4.1 mostra os resultados obtidos com o método numérico para as vigas de aço e alumínio no caso livre-livre e fixo-livre. Os resultados numéricos foram comparados com as soluções analíticas. A seção 4.2 mostra os resultados obtidos com o método experimental para as vigas de aço e alumínio no caso livre-livre e fixo-livre. Os resultados experimentais foram comparados com as soluções numéricas. Após diversos testes para o método experimental, optou-se por utilizar o sinal que fornecia a magnitude em decibéis (dB), pois o sinal facilitava a leitura em comparação ao linear. Além disso, para a captura das frequências, optou-se por utilizar a densidade espectral ao invés do pico, pois também facilitava a visualização dos resultados coletados.

4.1 Resultados Numéricos

O resultado numérico buscou apresentar as frequências naturais para o caso livre-livre e fixo-livre, obtidas pelo *Ansys*, conforme citado na seção 3.2.3.

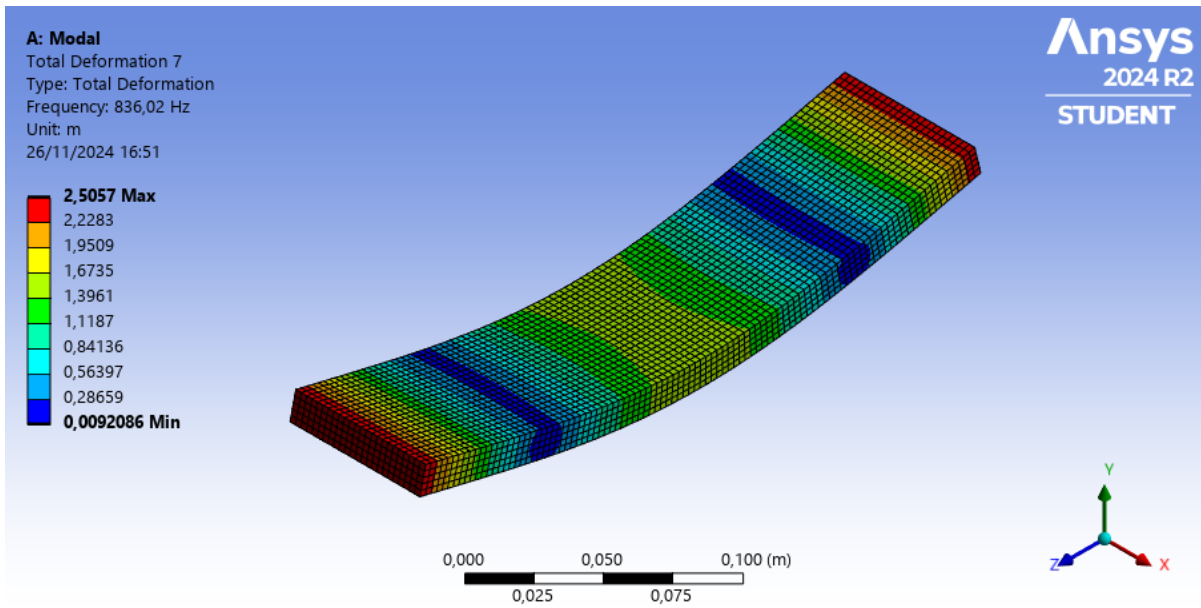
As informações sobre o material foram retirados da Tabela 1 e as dimensões foram mostradas na seção 3.1.

4.1.1 Modos e frequências naturais da viga livre-livre de alumínio

As Figuras 13, 14 e 15 apresentam os modos e frequências naturais encontradas usando o *Ansys* para o caso livre-livre utilizando o alumínio e com propriedades dadas pela Tabela 1.

A Figura 13 mostra o sétimo modo de vibração da viga de alumínio para o caso livre-livre. Observa-se que a frequência natural deste modo é de 836,02 Hz. Observa-se também que a deformação máxima é de 2,5057 mm.

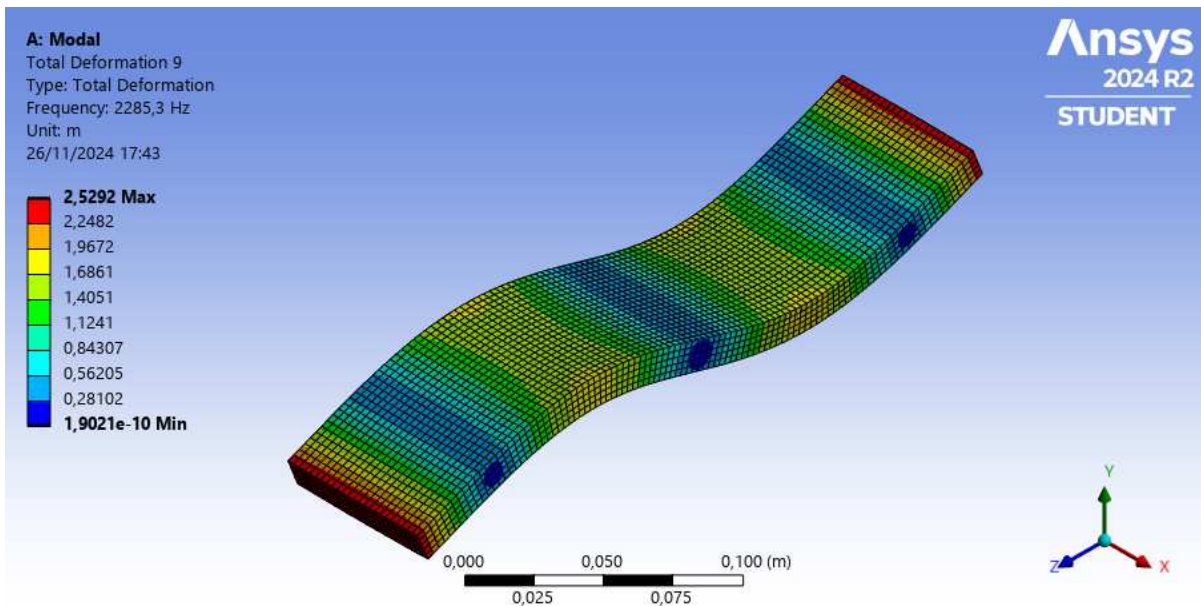
Figura 13 – Sétima frequência natural numérica da viga de alumínio para o caso livre-livre



Fonte: Autoria Própria (2024).

A Figura 14 mostra o nono modo de vibração da viga de alumínio para o caso livre-livre. Observa-se que a frequência natural deste modo é de 2285,30 Hz. Observa-se também que a deformação máxima é de 2,5292 mm.

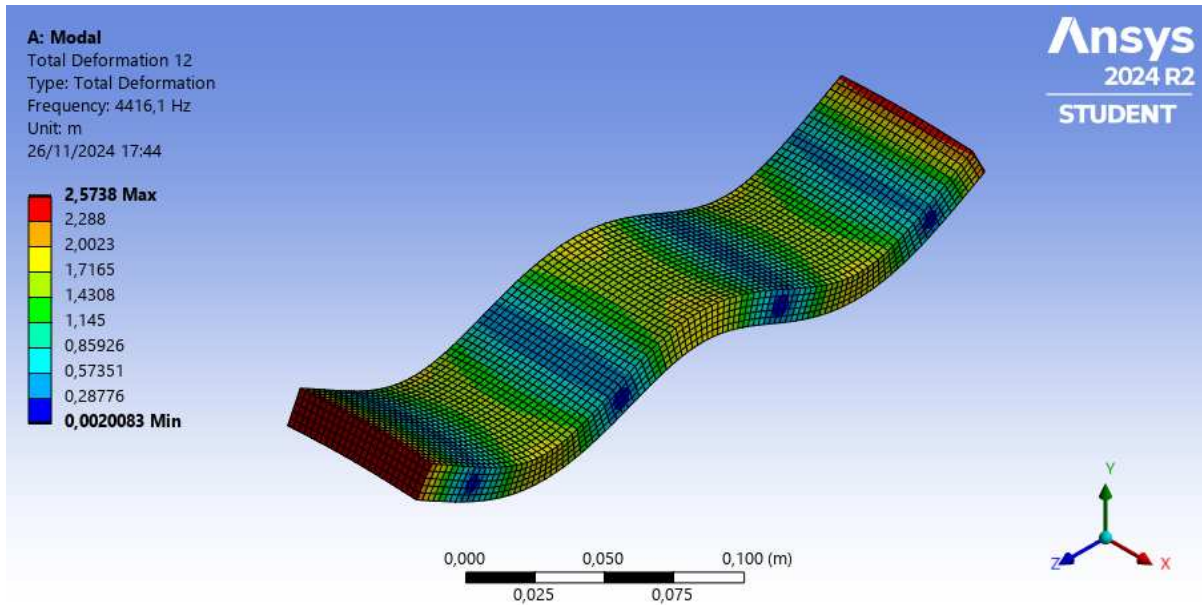
Figura 14 – Nona frequência natural numérica da viga de alumínio para o caso livre-livre



Fonte: Autoria Própria (2024).

A Figura 15 mostra o décimo segundo modo de vibração da viga de alumínio para o caso livre-livre. Observa-se que a frequência natural deste modo é de 4416,10 Hz. Observa-se também que a deformação máxima é de 2,5738 mm.

Figura 15 – Décima segunda frequência natural numérica da viga de alumínio para o caso livre-livre



Fonte: Autoria Própria (2024).

Para a validação dos resultados obtidos e evitar que informações foram inseridas de maneira equivocada, comparou-se os resultados obtidos de maneira numérica com os resultados analíticos, utilizando como referência a seção 2.3.

A Tabela 2 apresenta as 14 primeiras frequências naturais para o alumínio no caso livre-livre. As seis primeiras frequências naturais foram zero por se tratar de um corpo rígido. A sétima, nona, décima segunda e a décima quarta frequência indicam os modos transversais. A oitava, décima primeira e décima terceira frequências indicam o modos de torção. A décima frequência indica o modo lateral.

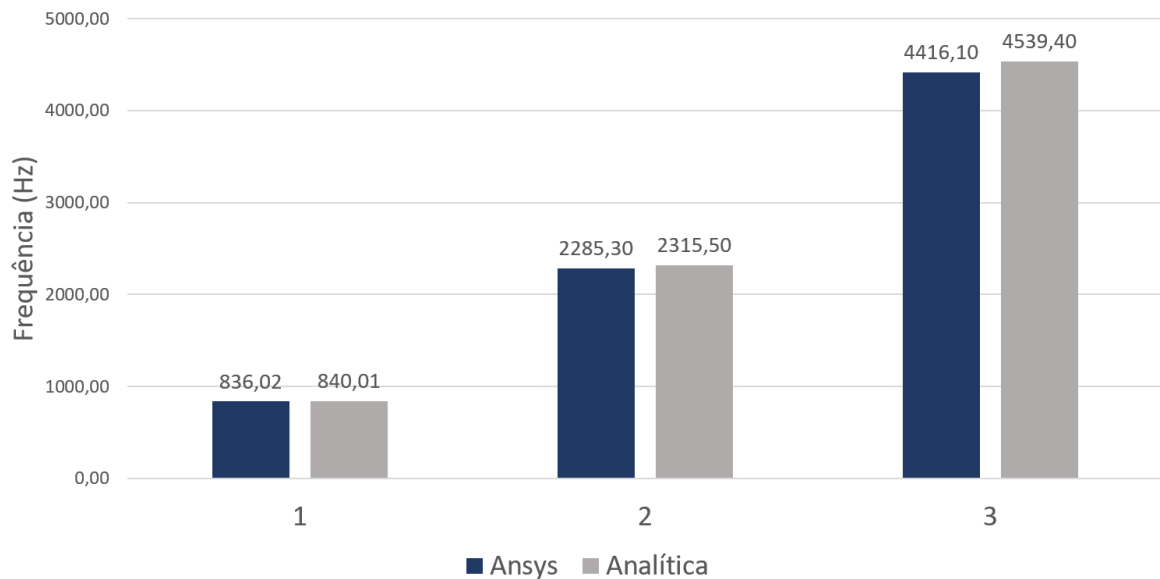
Tabela 2 – Comparação entre as frequências naturais obtidas por método numérico e analítico para o alumínio no caso livre-livre

Frequência Natural	Ansys (Hz)	Analítica (Hz)	Erro Relativo(%)
7	836,02	840,01	0,47
8	1985,60	<i>torção</i>	-
9	2285,30	2315,50	1,3
10	3729,80	<i>lateral</i>	-
11	4073,30	<i>torção</i>	-
12	4416,10	4539,40	2,71
13	6351,10	<i>torção</i>	-
14	7149,80	<i>transversal</i>	-

Fonte: Autoria Própria (2024).

Para analisar a Tabela 2, utilizou-se de um gráfico de barras para facilitar a visualização do comportamento das frequências naturais transversais. A Figura 16 apresenta a comparação entre as 3 frequências naturais transversais pelo método numérico e analítico de maneira gráfica para o alumínio.

Figura 16 – Comparação entre as frequências naturais transversais pelo método numérico e analítico de maneira gráfica para o alumínio no caso livre-livre



Fonte: Autoria Própria (2024).

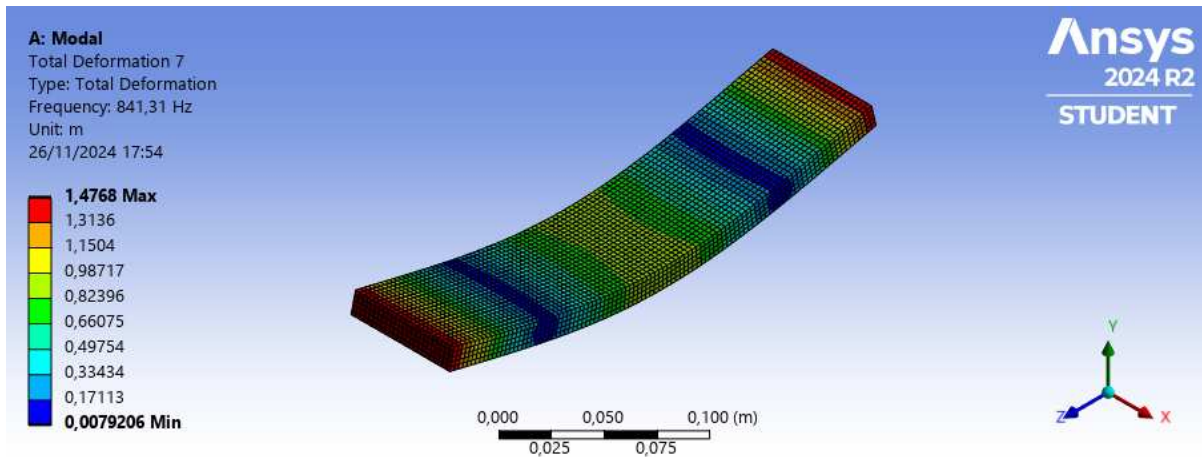
Nota-se que, apesar do erro relativo, como mostra a Tabela 2, os resultados mostrados na Figura 16 foram próximos. Essa diferença pode ser atribuída às limitações tanto do modelo analítico baseado na teoria da viga de Euler-Bernoulli quanto da análise realizada por elementos finitos. No caso do modelo analítico, as simplificações inerentes à teoria de Euler-Bernoulli, que desconsidera efeitos como a inércia rotacional e as tensões de cisalhamento, podem impactar os resultados. Por outro lado, a análise por elementos finitos também apresenta limitações, especialmente por se tratar de um software de código fechado. Isso impossibilita determinar se o programa utiliza a teoria de Euler-Bernoulli ou outra abordagem, bem como se considera explicitamente a inércia rotacional e as tensões de cisalhamento no cálculo. Observa-se também que o erro relativo aumentou conforme a frequência aumentava. Entretanto, ainda assim, os resultados se mostraram suficientes para garantir que as informações fornecidas ao Ansys estavam corretas.

4.1.2 Modos e frequências naturais da viga livre-livre de aço

As Figuras 17, 18 e 19 apresentam os modos e frequências naturais encontradas usando o Ansys para o caso livre-livre utilizando o aço e com propriedades dadas pela Tabela 1.

A Figura 17 mostra o sétimo modo de vibração da viga de aço para o caso livre-livre. Observa-se que a frequência natural deste modo é de 841,31 Hz. Observa-se também que a deformação máxima é de 1,4768 mm.

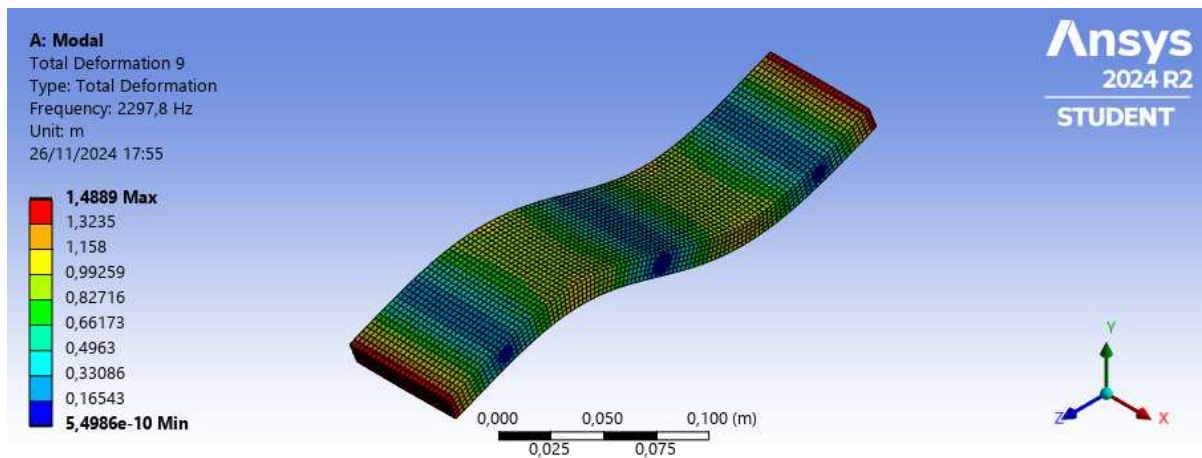
Figura 17 – Sétima frequência natural numérica da viga de aço para o caso livre-livre



Fonte: Autoria Própria (2024).

A Figura 18 mostra o nono modo de vibração da viga de aço para o caso livre-livre. Observa-se que a frequência natural deste modo é de 2297,80 Hz. Observa-se também que a deformação máxima é de 1,4889 mm.

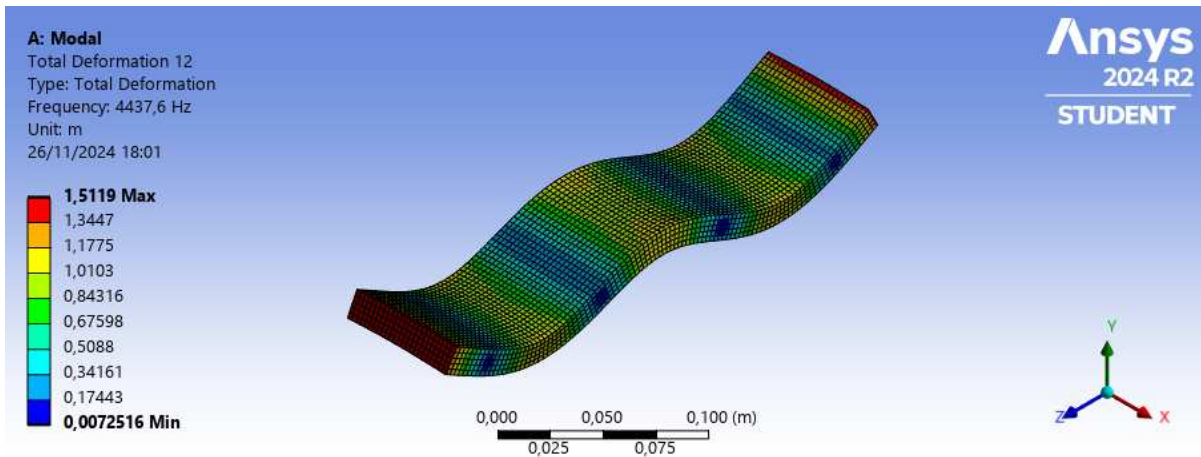
Figura 18 – Nona frequência natural numérica da viga de aço para o caso livre-livre



Fonte: Autoria Própria (2024).

A Figura 19 mostra o décimo segundo modo de vibração da viga de aço para o caso livre-livre. Observa-se que a frequência natural deste modo é de 4437,60 Hz. Observa-se também que a deformação máxima é de 1,5119 mm.

Figura 19 – Décima segunda frequência natural numérica da viga de aço para o caso livre-livre



Fonte: Autoria Própria (2024).

Para a validação dos resultados obtidos e evitar que informações foram inseridas de maneira equivocada, comparou-se os resultados obtidos de maneira numérica com os resultados analíticos, utilizando como referência a seção 2.3.

A Tabela 3 apresenta as 14 primeiras frequências naturais para o aço no caso livre-livre. As seis primeiras frequências naturais foram zero por se tratar de um corpo rígido. A sétima, nona, sexta e a décima segunda frequência indicam os modos transversais. A oitava, décima primeira e décima terceira frequências indicam os modos de torção. A décima frequência indica o modo lateral. A décima quarta frequência indica o modo longitudinal.

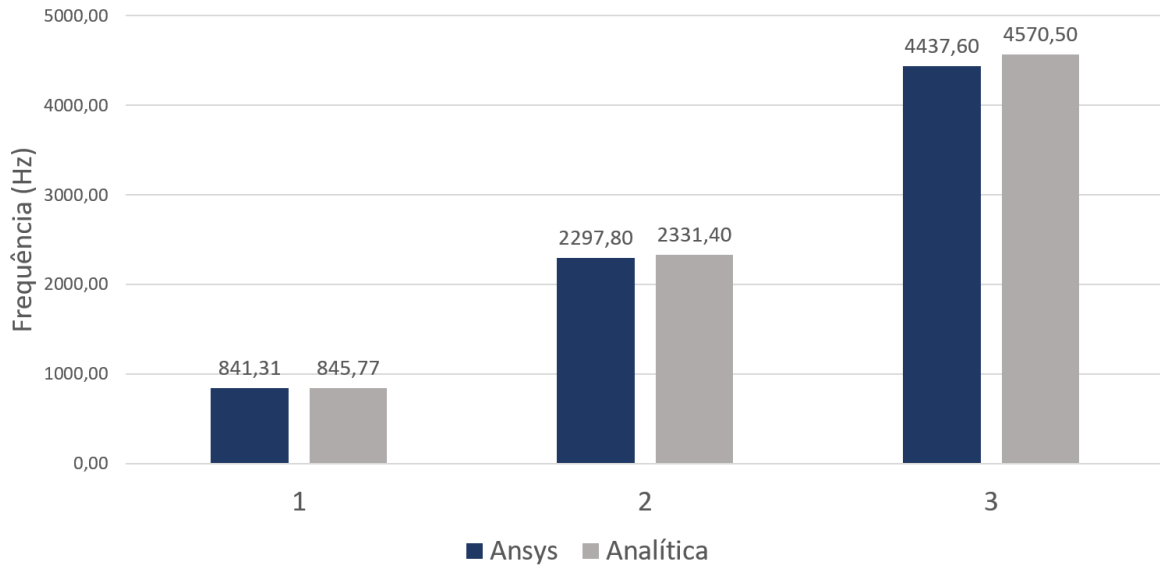
Tabela 3 – Comparação entre as frequências naturais obtidas por método numérico e analítico para o aço no caso livre-livre

Frequência Natural	Ansys (Hz)	Analítica (Hz)	Erro Relativo(%)
7	841,31	845,77	0,52
8	2030,40	<i>torção</i>	-
9	2297,80	2331,40	1,44
10	3760,50	<i>lateral</i>	-
11	4160,50	<i>torção</i>	-
12	4437,60	4570,50	2,90
13	6476,80	<i>torção</i>	-
14	7183,20	<i>longitudinal</i>	-

Fonte: Autoria Própria (2024).

Para analisar a Tabela 3, utilizou-se de um gráfico de barras para facilitar a visualização do comportamento das frequências naturais transversais. A Figura 20 apresenta a comparação entre as 3 frequências naturais transversais pelo método numérico e analítico de maneira gráfica para o aço.

Figura 20 – Comparação entre as frequências naturais transversais pelo método numérico e analítico de maneira gráfica para o aço no caso livre-livre



Fonte: Autoria Própria (2024).

Nota-se que, apesar do erro relativo, como mostra a Tabela 3, os resultados mostrados na Figura 20 foram próximos. Essa diferença pode ser atribuída às limitações tanto do modelo analítico baseado na teoria da viga de Euler-Bernoulli quanto da análise realizada por elementos finitos. No caso do modelo analítico, as simplificações inerentes à teoria de Euler-Bernoulli, que desconsidera efeitos como a inércia rotacional e as tensões de cisalhamento, podem impactar os resultados. Por outro lado, a análise por elementos finitos também apresenta limitações, especialmente por se tratar de um software de código fechado. Isso impossibilita determinar se o programa utiliza a teoria de Euler-Bernoulli ou outra abordagem, bem como se considera explicitamente a inércia rotacional e as tensões de cisalhamento no cálculo. Observa-se também que o erro relativo aumentou conforme a frequência aumentava. Entretanto, ainda assim, os resultados se mostraram suficientes para garantir que as informações fornecidas ao Ansys estavam corretas.

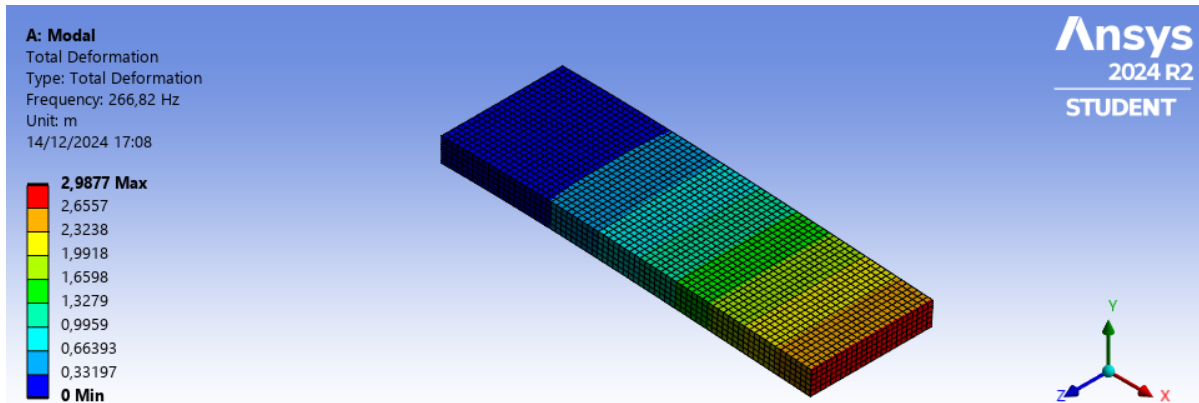
Verificou-se também que as frequências naturais para o aço e para o alumínio ficaram próximas. Isso ocorre porque, apesar das diferenças em suas propriedades mecânicas, a relação entre o módulo de elasticidade e densidade de ambos os materiais é semelhante. Essa combinação desempenha um papel importante no cálculo das frequências naturais, resultando em valores próximos para os dois materiais.

4.1.3 Modos e frequências naturais da viga fixo-livre de alumínio

As Figuras 21, 22 e 23 apresentam os modos e frequências naturais encontradas usando o *Ansys* para o caso fixo-livre utilizando o alumínio e com propriedades dadas pela Tabela 1.

A Figura 21 mostra o primeiro modo de vibração da viga de alumínio para o caso fixo-livre. Observa-se que a frequência natural deste modo é de 266,82 Hz. Observa-se também que a deformação máxima é de 2,9877 mm.

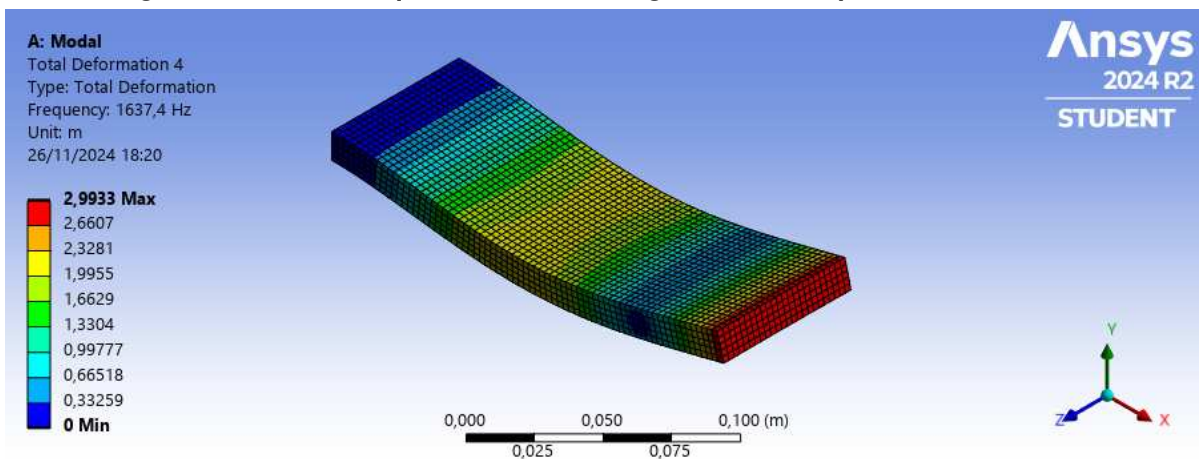
Figura 21 – Primeira frequência natural da viga de alumínio para o caso fixo-livre



Fonte: Autoria Própria (2024).

A Figura 22 mostra o quarto modo de vibração da viga de alumínio para o caso fixo-livre. Observa-se que a frequência natural deste modo é de 1637,40 Hz. Observa-se também que a deformação máxima é de 2,9933 mm.

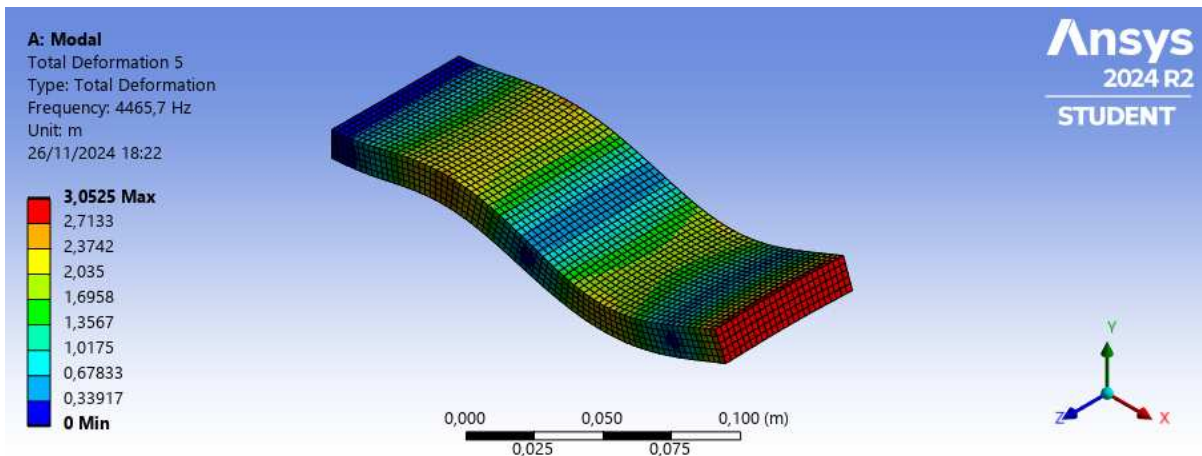
Figura 22 – Quarta frequência natural da viga de alumínio para o caso fixo-livre



Fonte: Autoria Própria (2024).

A Figura 23 mostra o quinto modo de vibração da viga de alumínio para o caso fixo-livre. Observa-se que a frequência natural deste modo é de 4465,70 Hz. Observa-se também que a deformação máxima é de 3,0525 mm.

Figura 23 – Quinta frequência natural da viga de alumínio para o caso fixo-livre



Fonte: Autoria Própria (2024).

Para a validação dos resultados obtidos e evitar que informações foram inseridas de maneira equivocada, comparou-se os resultados obtidos de maneira numérica com os resultados analíticos, utilizando como referência a seção 2.4

A Tabela 4 apresenta as 8 primeiras frequências naturais para o alumínio no caso fixo-livre. A primeira, quarta e quinta frequência indicam os modos transversais. A segunda e a sétima frequências indicam o modos laterais. A terceira, sexta e oitava indicam os modos de torção.

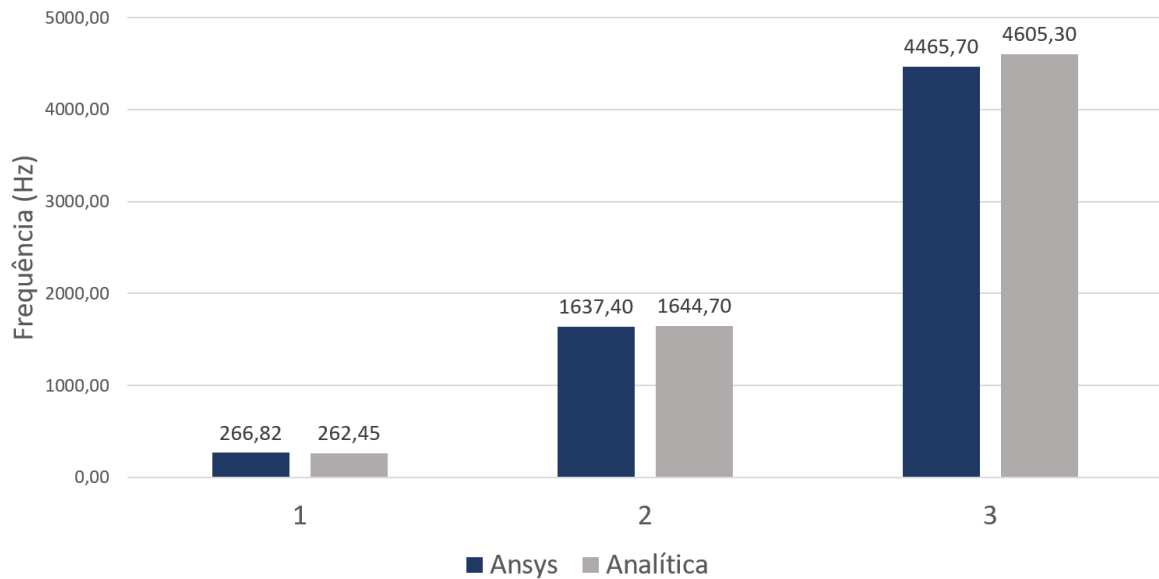
Tabela 4 – Comparação entre as frequências naturais obtidas por método numérico e analítico para o alumínio no caso fixo-livre

Frequência Natural	Ansys (Hz)	Analítica (Hz)	Erro Relativo(%)
1	266,82	262,45	1,63
2	1261,20	<i>lateral</i>	-
3	1512,30	<i>torção</i>	-
4	1637,40	1644,70	0,44
5	4465,70	4605,30	3,03
6	4690,20	<i>torção</i>	-
7	5789,50	<i>lateral</i>	-
8	6433,30	<i>torção</i>	-

Fonte: Autoria Própria (2024).

Para analisar a Tabela 4, utilizou-se de um gráfico de barras para facilitar a visualização do comportamento das frequências naturais transversais. A Figura 24 apresenta a comparação entre as 3 frequências naturais transversais pelo método numérico e analítico de maneira gráfica para o alumínio.

Figura 24 – Comparação entre as 3 frequências naturais transversais obtidas pelo método numérico e analítico para o alumínio no caso fixo-livre



Fonte: Autoria Própria (2024).

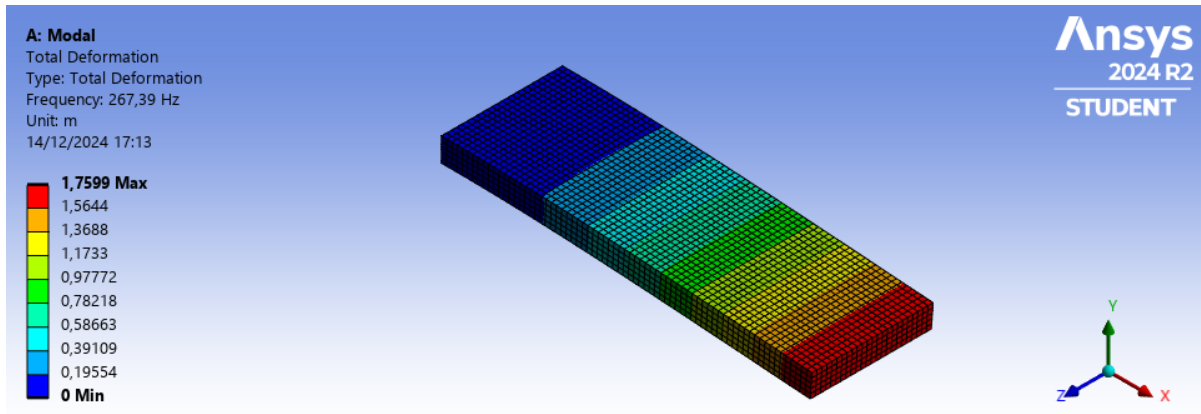
Nota-se que, apesar do erro relativo, como mostra a Tabela 4, os resultados mostrados na Figura 24 foram próximos. Essa diferença pode ser atribuída às limitações tanto do modelo analítico baseado na teoria da viga de Euler-Bernoulli quanto da análise realizada por elementos finitos. No caso do modelo analítico, as simplificações inerentes à teoria de Euler-Bernoulli, que desconsidera efeitos como a inércia rotacional e as tensões de cisalhamento, podem impactar os resultados. Por outro lado, a análise por elementos finitos também apresenta limitações, especialmente por se tratar de um software de código fechado. Isso impossibilita determinar se o programa utiliza a teoria de Euler-Bernoulli ou outra abordagem, bem como se considera explicitamente a inércia rotacional e as tensões de cisalhamento no cálculo. Observa-se também que o erro relativo para a primeira e terceira frequência foi maior e o erro relativo para a segunda frequência foi menor. Entretanto, ainda assim, os resultados se mostraram suficientes para garantir que as informações fornecidas ao *Ansys* estavam corretas.

4.1.4 Modos e frequências naturais da viga fixo-livre de aço

As Figuras 25, 26 e 27 apresentam as frequências naturais encontradas usando o *Ansys* para o caso fixo-livre utilizando o aço e com as propriedades dadas pela Tabela 1.

A Figura 25 mostra o primeiro modo de vibração transversal da viga de aço para o caso fixo-livre. Observa-se que a frequência natural deste modo é 267,39 Hz. Observa-se também que a deformação máxima é de 1,7599 mm.

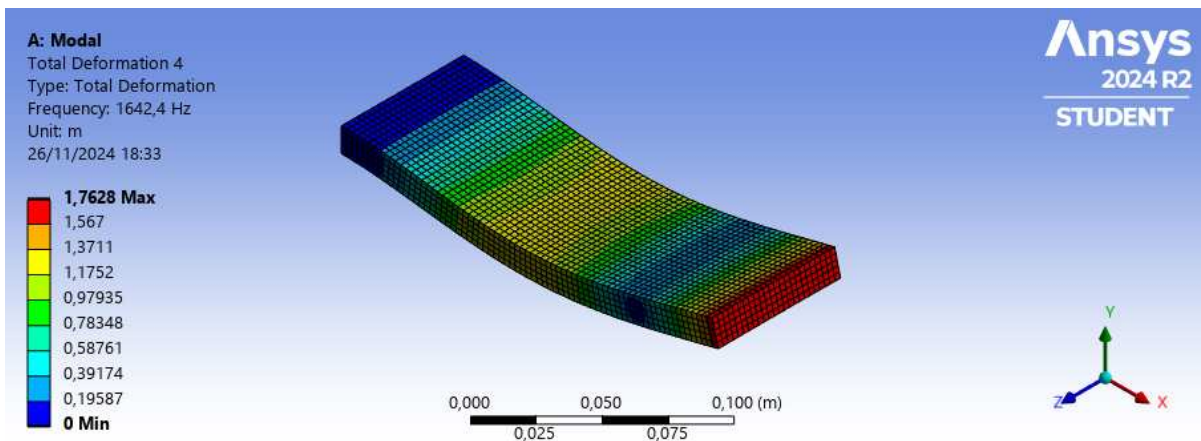
Figura 25 – Primeira frequência natural numérica da viga de aço para o caso fixo-livre



Fonte: Autoria Própria (2024).

A Figura 26 mostra o quarto modo de vibração transversal da viga de aço para o caso fixo-livre. Observa-se que a frequência natural deste modo é 1642,40 Hz. Observa-se também que a deformação máxima é de 1,7628 mm.

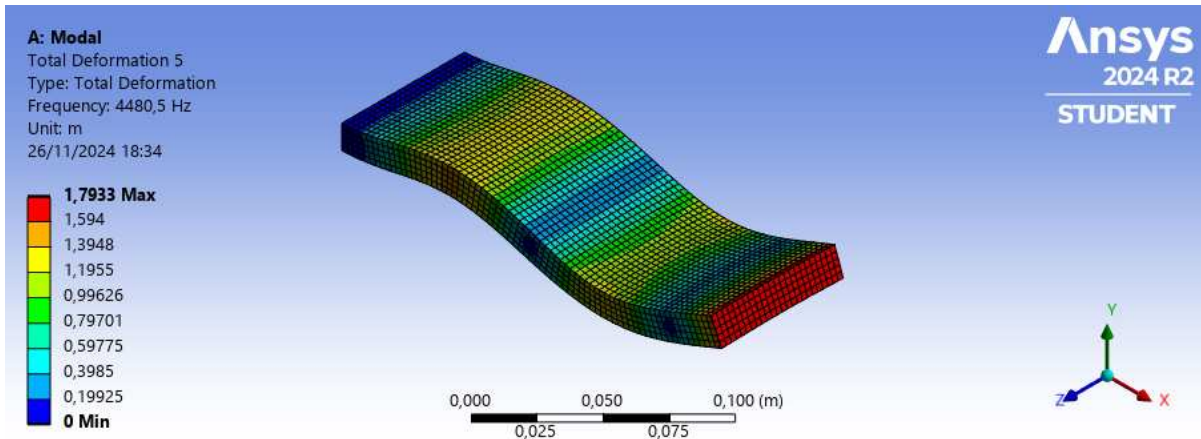
Figura 26 – Quarta frequência natural numérica da viga de aço para o caso fixo-livre



Fonte: Autoria Própria (2024).

A Figura 27 mostra o quinto modo de vibração transversal da viga de aço para o caso fixo-livre. Observa-se que a frequência natural deste modo é 4480,50 Hz. Observa-se também que a deformação máxima é de 1,7933 mm.

Figura 27 – Quinta frequência natural numérica da viga de aço para o caso fixo-livre



Fonte: Autoria Própria (2024).

Para a validação dos resultados obtidos e evitar que informações foram inseridas de maneira equivocada, comparou-se os resultados obtidos de maneira numérica com os resultados analíticos, utilizando como referência a seção 2.4.

A Tabela 5 apresenta as 8 primeiras frequências naturais para o alumínio no caso fixo-livre. A primeira, quarta e quinta frequência indicam os modos transversais. A segunda e a sétima frequências indicam o modos laterais. A terceira, sexta e oitava indicam os modos de torção.

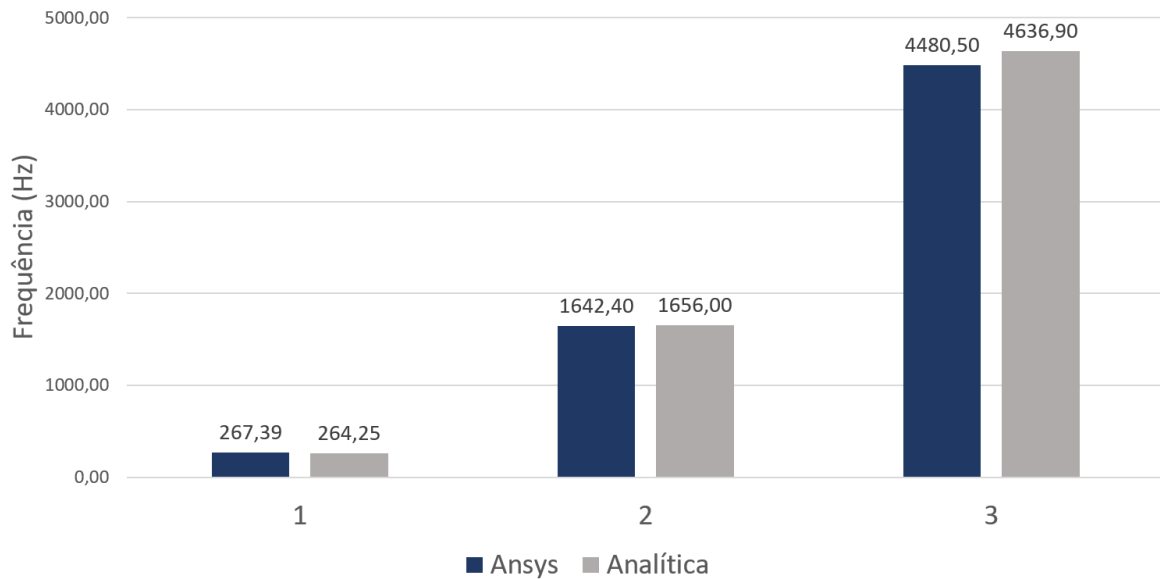
Tabela 5 – Comparação entre as frequências naturais obtidas por método numérico e analítico para o aço no caso fixo-livre

Frequência Natural	Ansys (Hz)	Analítica (Hz)	Erro Relativo (%)
1	267,39	264,25	1,17
2	1269,70	<i>lateral</i>	-
3	1543,40	<i>torção</i>	-
4	1642,40	1656,00	0,82
5	4480,50	4636,90	3,37
6	4780,30	<i>torção</i>	-
7	5859,00	<i>lateral</i>	-
8	6467,90	<i>torção</i>	-

Fonte: Autoria Própria (2024).

Para analisar a Tabela 5, utilizou-se de um gráfico de barras para facilitar a visualização do comportamento das frequências naturais transversais. A Figura 28 apresenta a comparação entre as 3 frequências naturais transversais pelo método numérico e analítico de maneira gráfica para o aço.

Figura 28 – Comparação entre as 3 frequências naturais transversais obtidas pelo método numérico e analítico para o aço no caso fixo-livre



Fonte: Autoria Própria (2024).

Nota-se que, apesar do erro relativo, como mostra a Tabela 4, os resultados se mostraram próximos. Essa diferença pode ser atribuída às limitações tanto do modelo analítico baseado na teoria da viga de Euler-Bernoulli quanto da análise realizada por elementos finitos. No caso do modelo analítico, as simplificações inerentes à teoria de Euler-Bernoulli, que desconsidera efeitos como a inércia rotacional e as tensões de cisalhamento, podem impactar os resultados. Por outro lado, a análise por elementos finitos também apresenta limitações, especialmente por se tratar de um software de código fechado. Isso impossibilita determinar se o programa utiliza a teoria de Euler-Bernoulli ou outra abordagem, bem como se considera explicitamente a inércia rotacional e as tensões de cisalhamento no cálculo. Observa-se também que o erro relativo para a primeira e terceira frequência foi maior e o erro relativo para a segunda frequência foi menor, da mesma maneira que ocorreu para o alumínio. Entretanto, ainda assim, os resultados se mostraram suficientes para garantir que as informações fornecidas ao *Ansys* estavam corretas.

Verificou-se também que as frequências naturais para o aço e para o alumínio ficaram próximas. Isso ocorre porque, apesar das diferenças em suas propriedades mecânicas, a relação entre o módulo de elasticidade e densidade de ambos os materiais é semelhante. Essa combinação desempenha um papel importante no cálculo das frequências naturais, resultando em valores próximos para os dois materiais.

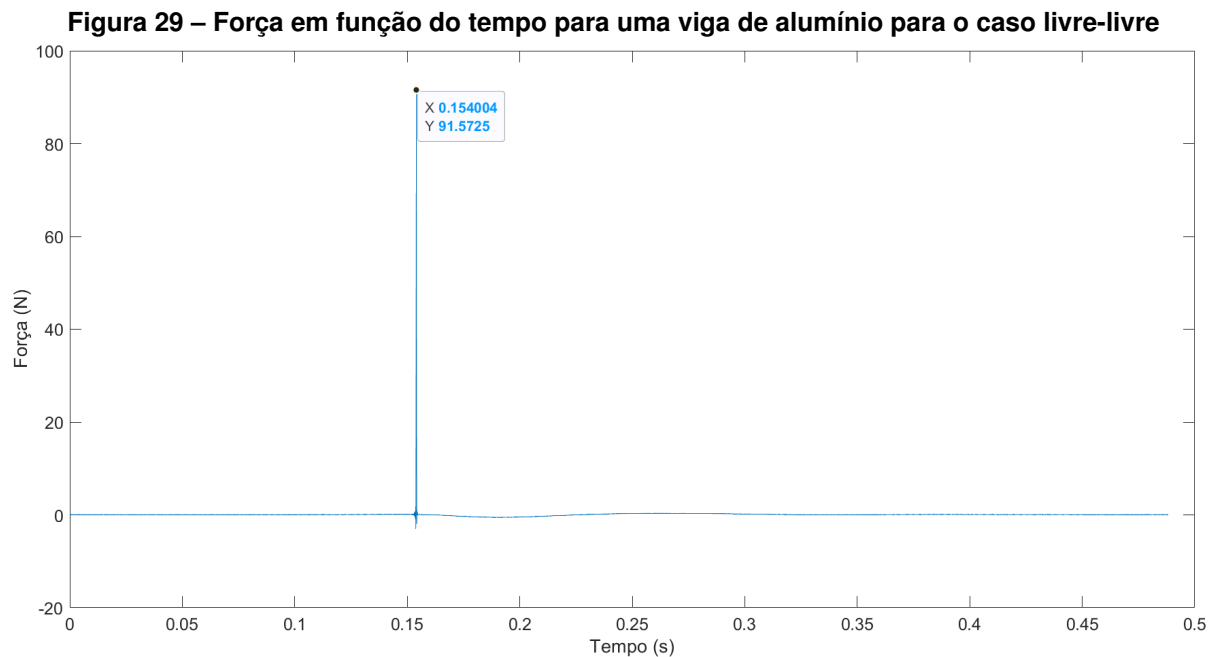
4.2 Resultados Experimentais

Os resultados experimentais buscou apresentar as frequências naturais para o pórtico, caso livre-livre e fixo-livre, obtidas pelo uso do acelerômetro e o martelo de impacto, conforme citado na seção 3.2.4.

As informações sobre o material foram retirados da Tabela 1 e as dimensões foram citadas na seção 3.1.

4.2.1 Resposta no tempo e na frequência da viga livre-livre de alumínio

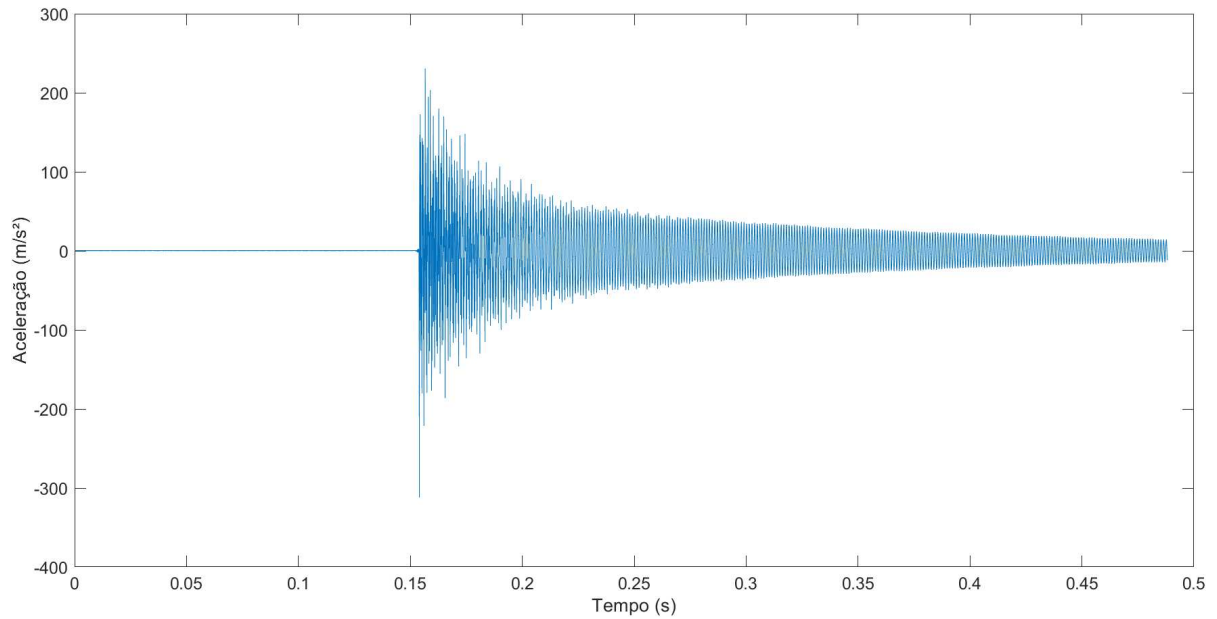
A Figura 29 mostra a resposta no tempo da intensidade da força em N aplicada ao martelo de impacto na viga livre-livre de alumínio. Nota-se que o valor do pico da força foi de 91,5 N e ocorreu no instante 0,15s.



Fonte: Autoria Própria (2024).

A Figura 30 mostra a resposta no tempo da intensidade da aceleração em m/s^2 da viga livre-livre de alumínio excitada pelo martelo de impacto. Observa-se que a aceleração é zero antes do impacto que ocorre em aproximadamente 0,15s. Observa-se também que a amplitude da aceleração decai com o tempo indicando a existência de um amortecimento.

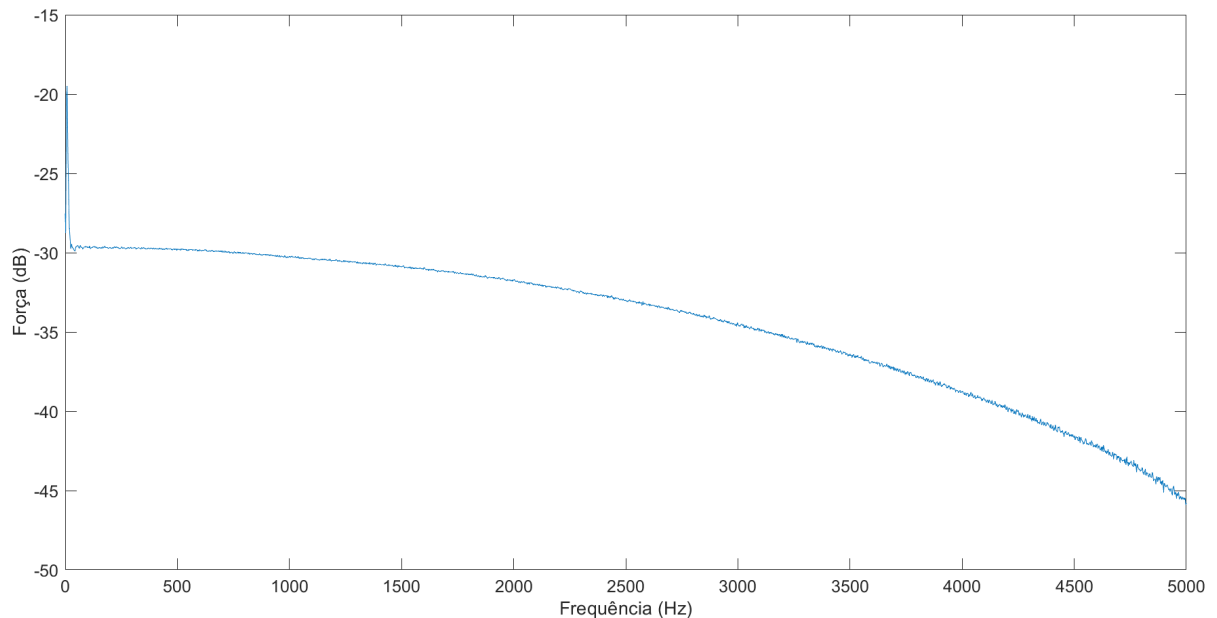
Figura 30 – Aceleração em função do tempo para uma viga de alumínio para o caso livre-livre



Fonte: Autoria Própria (2024).

A Figura 31 mostra a resposta na frequência da intensidade da força em dB aplicada pelo martelo de impacto na viga de alumínio. Observa-se que a amplitude da força decai rapidamente conforme a frequência aumenta. Isso implica que o martelo pode não excitar de forma adequada modos de vibração de alta frequência.

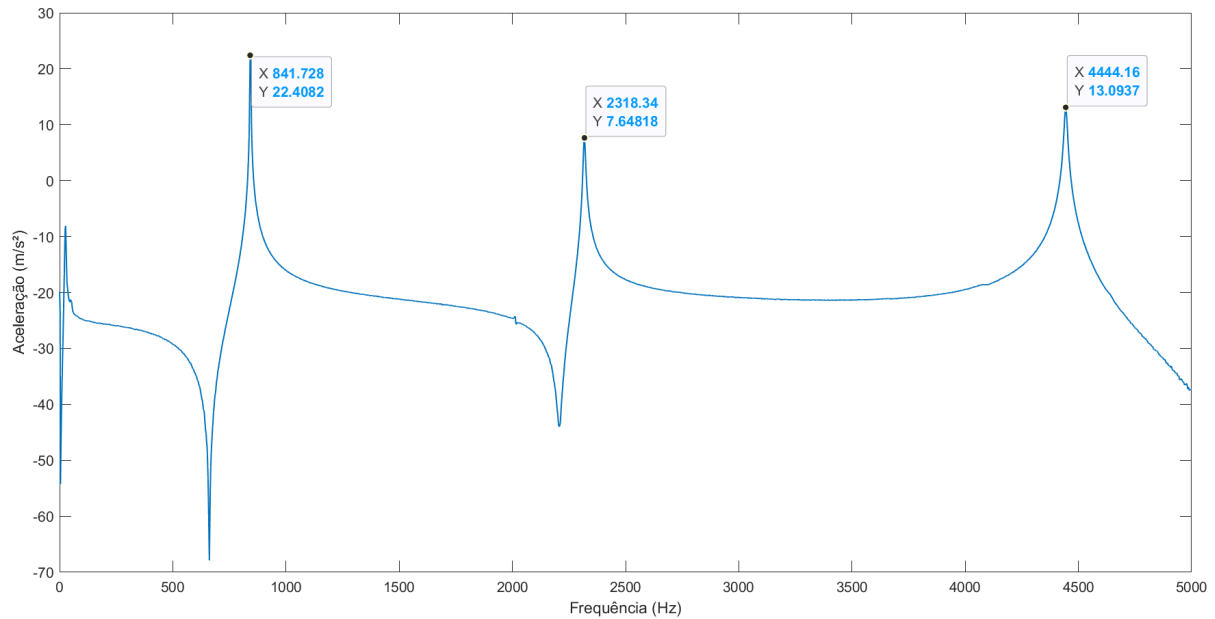
Figura 31 – Força em função da frequência para uma viga de alumínio para o caso livre-livre



Fonte: Autoria Própria (2024).

A Figura 32 mostra a resposta na frequência da intensidade da aceleração em m/s^2 da viga livre-livre de alumínio. Observa-se que os picos obtidos no gráfico são as frequências naturais da viga de alumínio, sendo elas de 841,728 Hz, 2318,34 Hz e 4444,16 Hz.

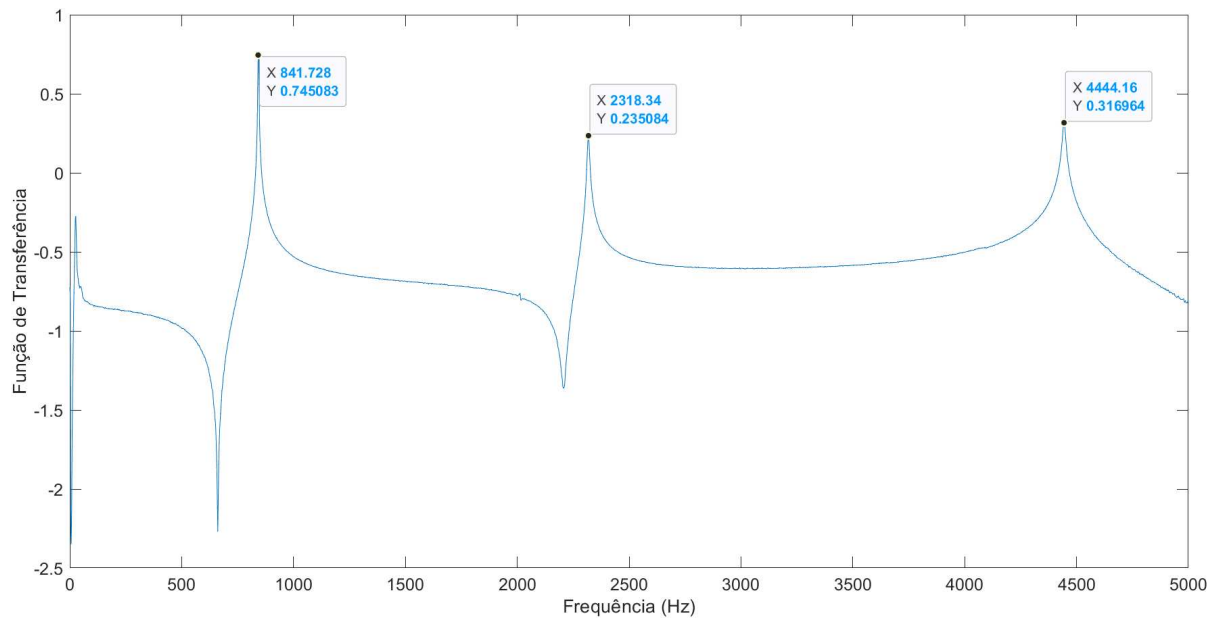
Figura 32 – Aceleração em função da frequência para uma viga de alumínio para o caso livre-livre



Fonte: Aatoria Própria (2024).

A Figura 33 mostra a resposta em frequência da função de transferência em Hz. Utilizou-se a transformada de Fourier para analisar a curva, considerando o impacto do martelo (entrada) e a aceleração (saída), e a aceleração foi dividida pelo impacto do martelo.

Figura 33 – Função de Transferência em função da frequência da viga de alumínio para o caso livre-livre



Fonte: Aatoria Própria (2024).

A Tabela 6 apresenta a comparação entre os resultados obtidos de maneira experimental com o método numérico para o caso livre-livre, para validação dos instrumentos.

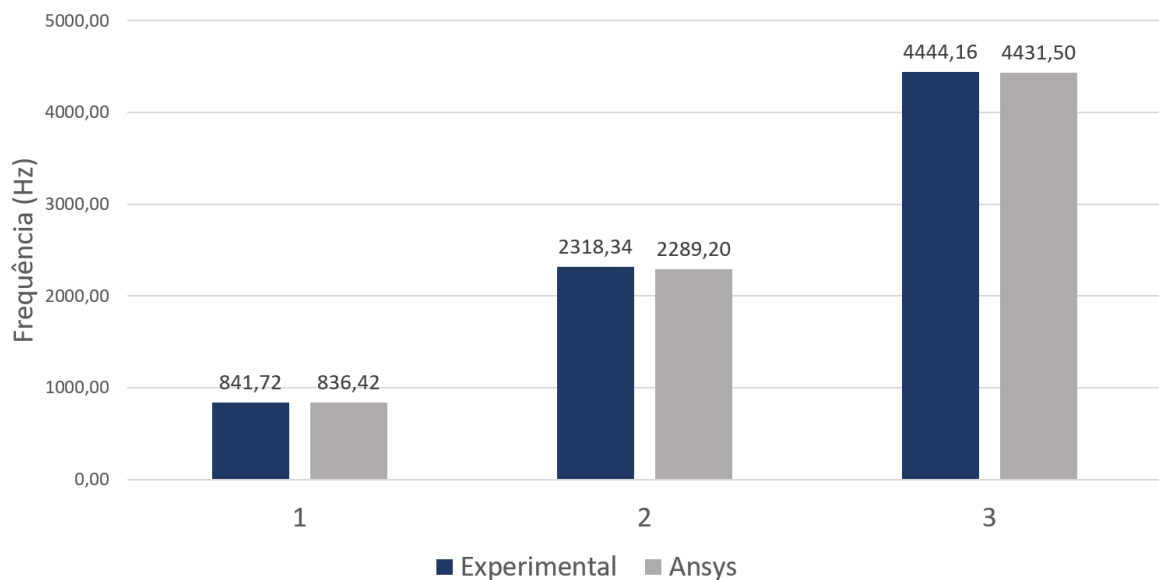
Tabela 6 – Comparação entre as frequências naturais transversais obtidas por método experimental e numérico para o alumínio para o caso livre-livre

Frequência Natural	Método Experimental (Hz)	Método Numérico (Hz)	Erro Relativo(%)
1	841,72	836,42	0,62
2	2318,34	2289,20	1,25
3	4444,16	4431,50	0,28

Fonte: Autoria Própria (2024).

Para analisar a Tabela 6, utilizou-se de um gráfico de barras para facilitar a visualização do comportamento das frequências naturais. A Figura 34 apresenta a comparação entre as 3 frequências naturais pelo método experimental e numérico de maneira gráfica para o alumínio.

Figura 34 – Comparação entre as 3 frequências naturais transversais obtidas pelo método experimental e numérico para o alumínio no caso livre-livre

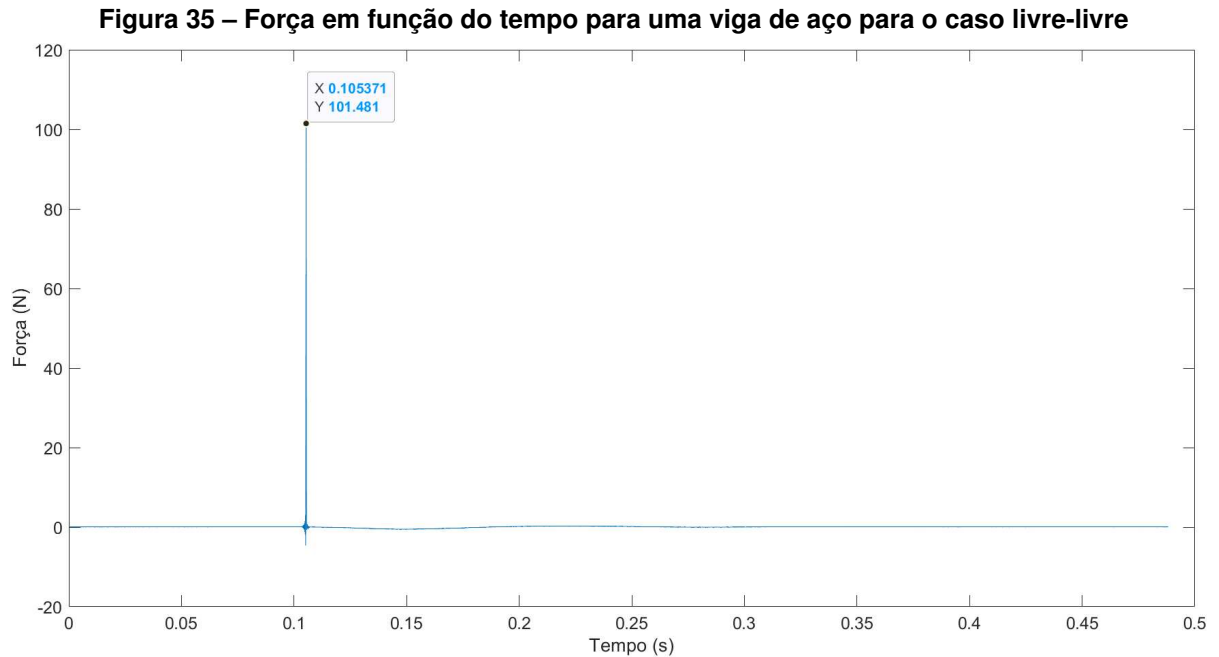


Fonte: Autoria Própria (2024).

Nota-se que, apesar do erro relativo, como mostra a Tabela 6, os resultados se mostraram próximos. Esta diferença pode ocorrer devido a interferência da espuma ao suportar a oscilação da viga, como também pelas limitações das análises por elementos finitos. Observa-se também que o erro para a primeira e terceira frequência foi menor e o erro para a segunda frequência foi maior, oposto do que ocorreu para a comparação numérico-analítico. Entretanto, ainda assim, os resultados se mostraram suficientes para garantir que a calibração dos instrumentos estavam de acordo com o ideal.

4.2.2 Resposta no tempo e na frequência da viga livre-livre de aço

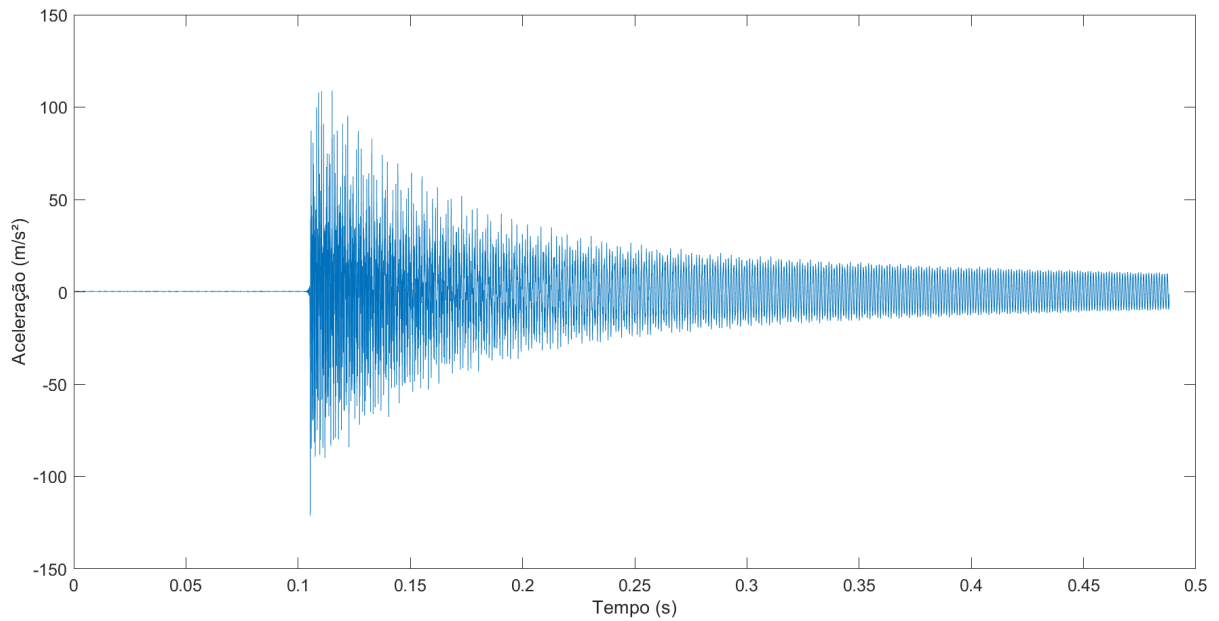
A Figura 35 mostra a resposta no tempo da intensidade da força em N aplicada ao martelo de impacto na viga livre-livre de aço. Nota-se que o valor do pico da força foi de 101,481 N no tempo aproximado de 0,1s.



Fonte: Autoria Própria (2024).

A Figura 36 mostra a resposta no tempo da intensidade da aceleração em m/s^2 da viga livre-livre de aço excitada pelo martelo de impacto. Observa-se que a aceleração é zero antes do impacto que ocorre em aproximadamente 0,1s. Observa-se também que a amplitude da aceleração decai com o tempo indicando a existência de um amortecimento.

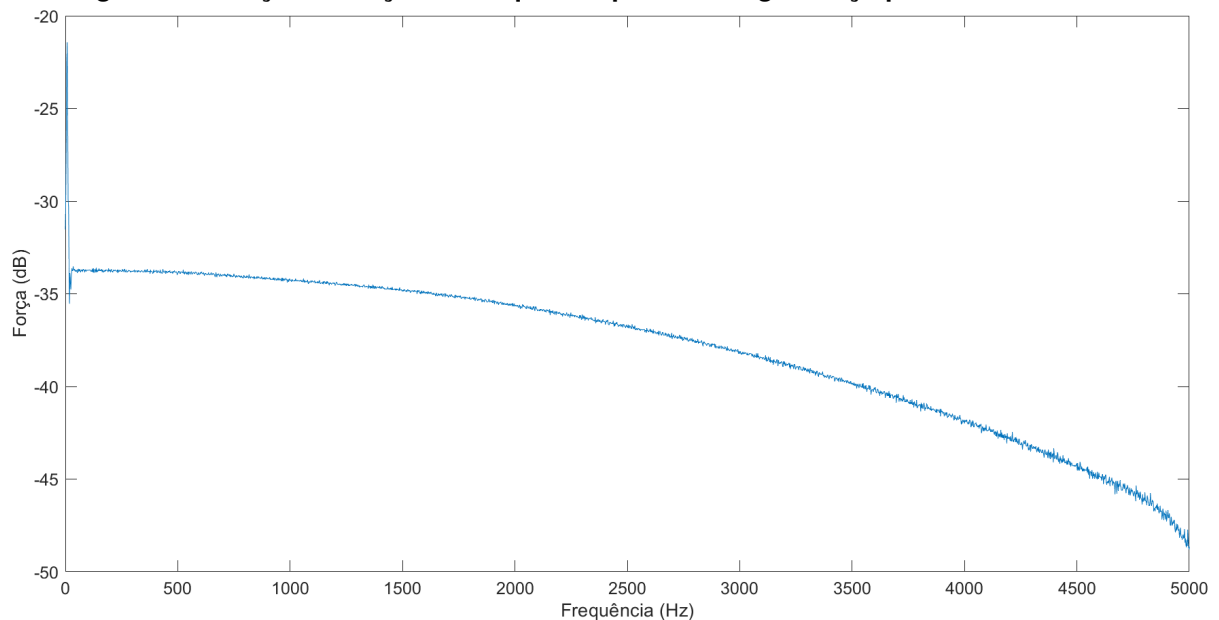
Figura 36 – Aceleração em função do tempo para uma viga de aço para o caso livre-livre



Fonte: Autoria Própria (2024).

A Figura 37 mostra a resposta na frequência da intensidade da força em dB aplicada pelo martelo de impacto na viga de alumínio. Observa-se que a amplitude da força decai rapidamente conforme a frequência aumenta. Isso implica que o martelo pode não excitar de forma adequada modos de vibração de alta frequência.

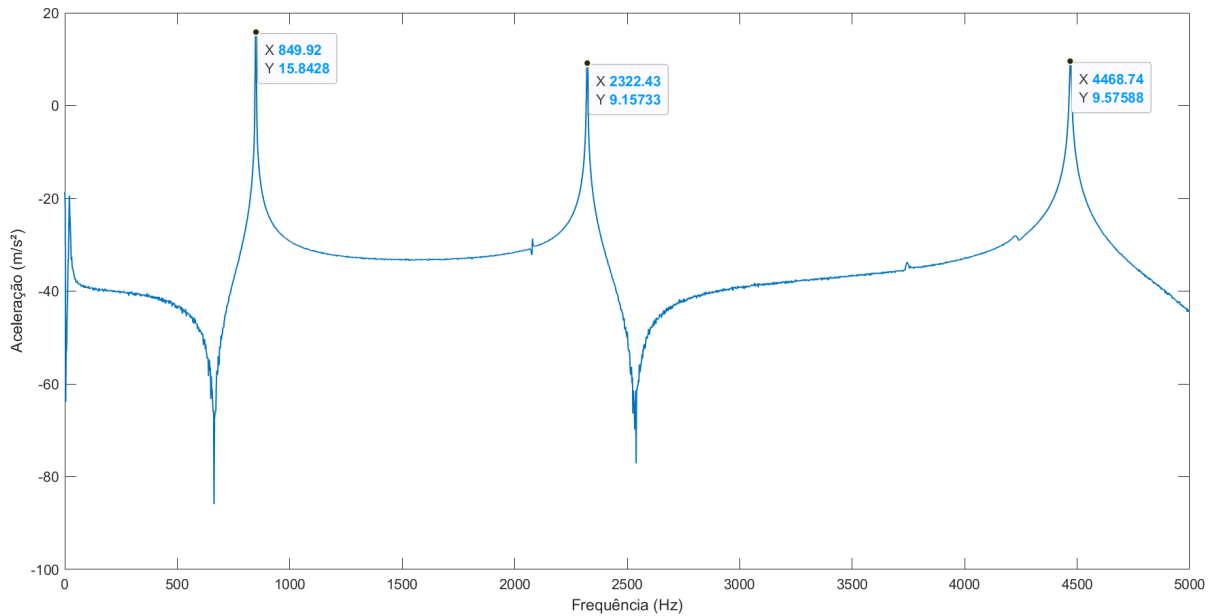
Figura 37 – Força em função da frequência para uma viga de aço para o caso livre-livre



Fonte: Autoria Própria (2024).

A Figura 38 mostra a resposta na frequência da intensidade da aceleração em m/s^2 da viga livre-livre de aço. Observa-se que os picos obtidos no gráfico são as frequências naturais da viga de alumínio, sendo elas de 849,92 Hz, 2322,43 Hz e 4468,74 Hz.

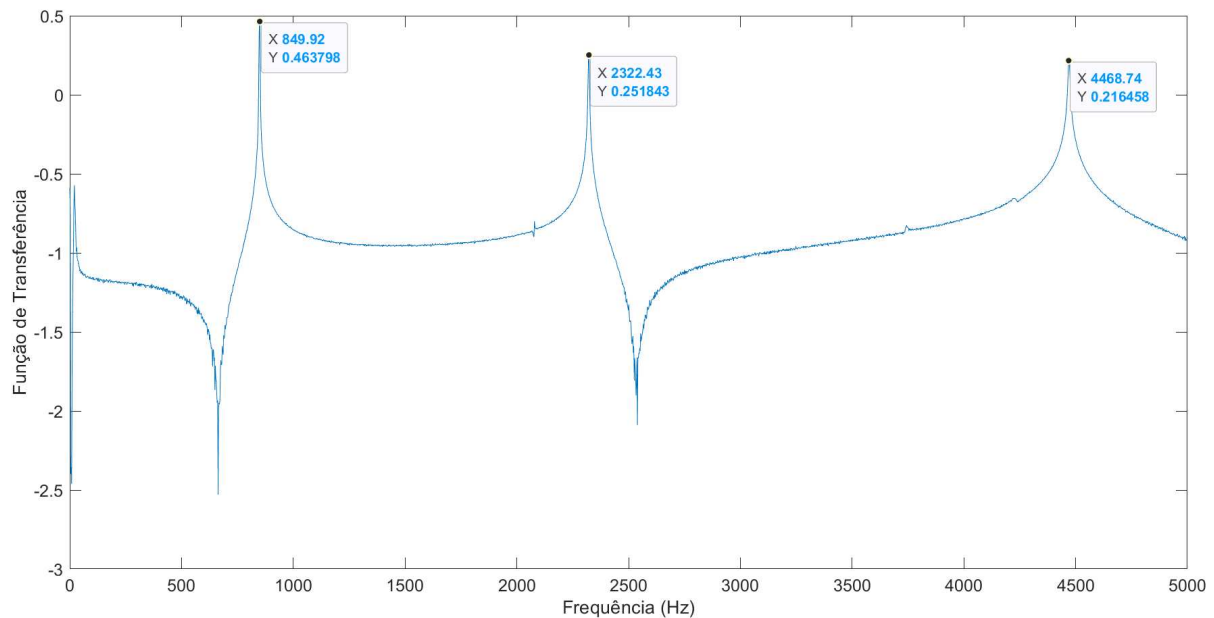
Figura 38 – Aceleração em função da frequência para uma viga de aço para o caso livre-livre



Fonte: Autoria Própria (2024).

A Figura 39 mostra a resposta em frequência da função de transferência em Hz. Utilizou-se a transformada de Fourier para analisar a curva, considerando o impacto do martelo (entrada) e a aceleração (saída), e a aceleração foi dividida pelo impacto do martelo.

Figura 39 – Função de transferência em função da frequência para uma viga de aço para o caso livre-livre



Fonte: Autoria Própria (2024).

A Tabela 7 apresenta a comparação entre os resultados obtidos de maneira experimental com o método numérico para o caso livre-livre, para validação dos instrumentos.

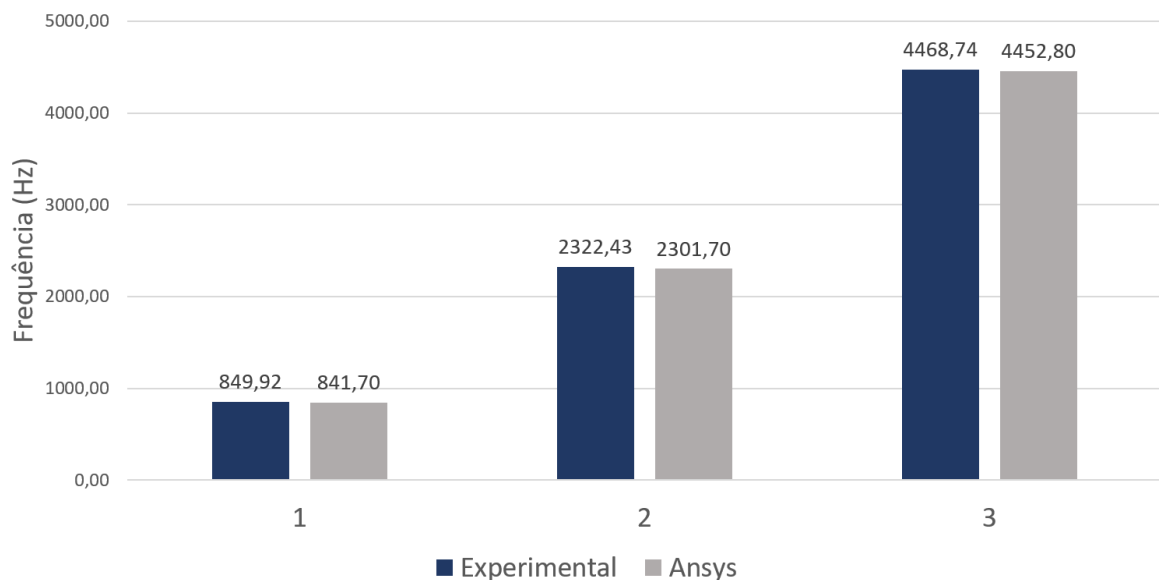
Tabela 7 – Comparação entre as frequências naturais transversais obtidas por método experimental e numérico para o aço para o caso livre-livre

Frequência Natural	Método Experimental (Hz)	Método Numérico (Hz)	Erro Relativo(%)
1	849,92	841,70	0,96
2	2322,43	2301,70	0,89
3	4468,74	4452,80	0,35

Fonte: Autoria Própria (2024).

Para analisar a Tabela 7, utilizou-se de um gráfico de barras para facilitar a visualização do comportamento das frequências naturais. A Figura 40 apresenta a comparação entre as 3 frequências naturais pelo método experimental e numérico de maneira gráfica para o aço.

Figura 40 – Comparação entre as 3 frequências naturais transversais obtidas pelo método experimental e numérico de maneira gráfica para o aço no caso livre-livre



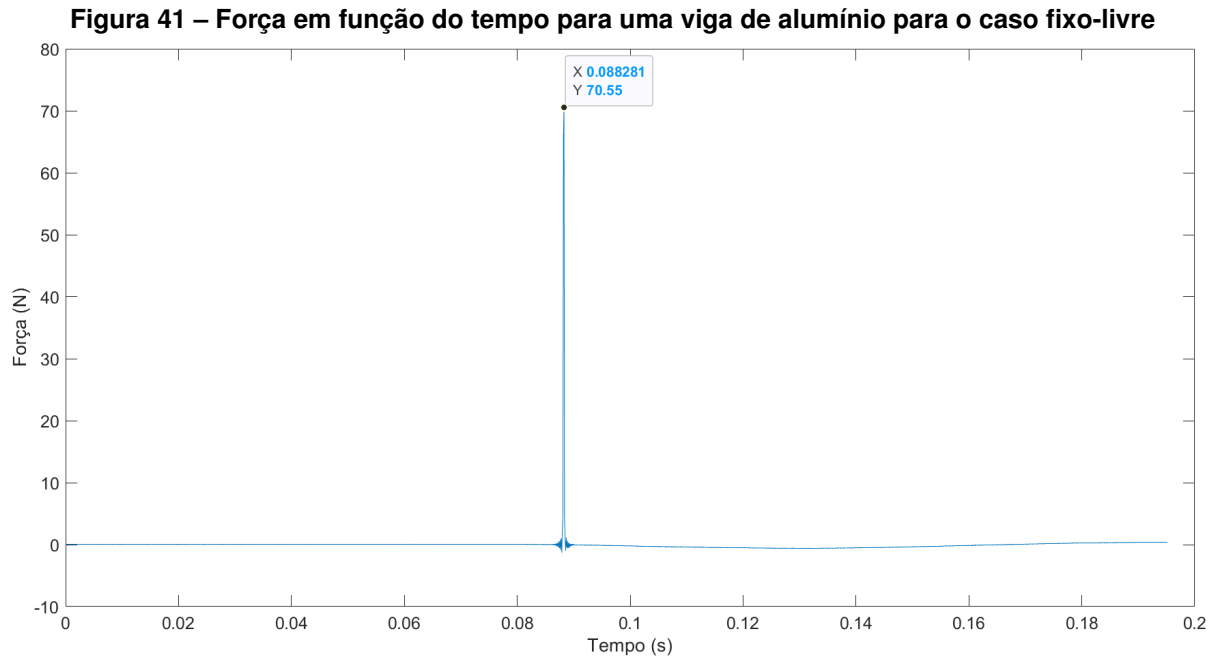
Fonte: Autoria Própria (2024).

Nota-se que, apesar do erro relativo, como mostra a Tabela 7, os resultados se mostraram próximos. Esta diferença pode ocorrer devido a interferência da espuma ao suportar a oscilação da viga, como também pelas limitações das análises por elementos finitos. Observa-se também que o erro para a primeira e segunda frequência foi maior e para a terceira frequência menor. Entretanto, ainda assim, os resultados se mostraram suficientes para garantir que a calibração dos instrumentos estavam de acordo com o ideal.

Verificou-se também que as frequências naturais para o aço e para o alumínio ficaram próximas. Isso ocorre porque, apesar das diferenças em suas propriedades mecânicas, a relação entre o módulo de elasticidade e densidade de ambos os materiais é semelhante. Essa combinação desempenha um papel importante no cálculo das frequências naturais, resultando em valores próximos para os dois materiais.

4.2.3 Resposta no tempo e na frequência da viga fixo-livre de alumínio

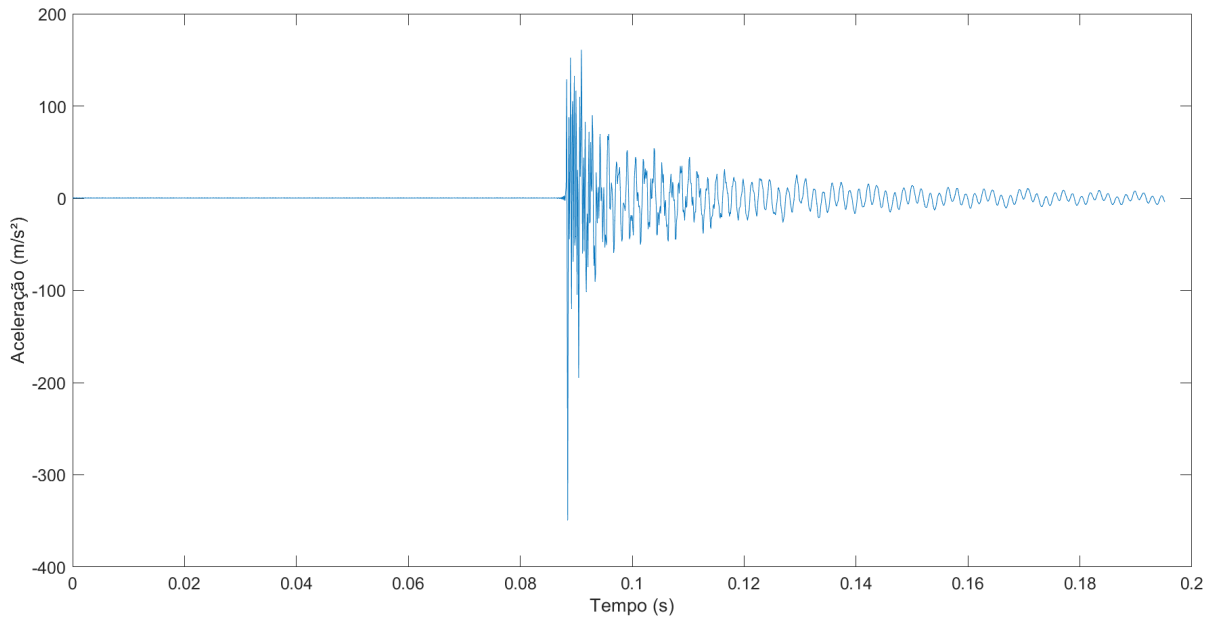
A Figura 41 mostra a resposta no tempo da intensidade da força em N aplicada ao martelo de impacto na viga fixo-livre de alumínio. Nota-se que o valor do pico da força foi de 70,55 N no tempo aproximado de 0,08 s.



Fonte: Autoria Própria (2024).

A Figura 42 mostra a resposta no tempo da intensidade da aceleração em m/s^2 da viga fixo-livre de alumínio excitada pelo martelo de impacto. Observa-se que a aceleração é zero antes do impacto que ocorre em aproximadamente 0,08 s. Observa-se também que a amplitude da aceleração decai com o tempo indicando a existência de um amortecimento.

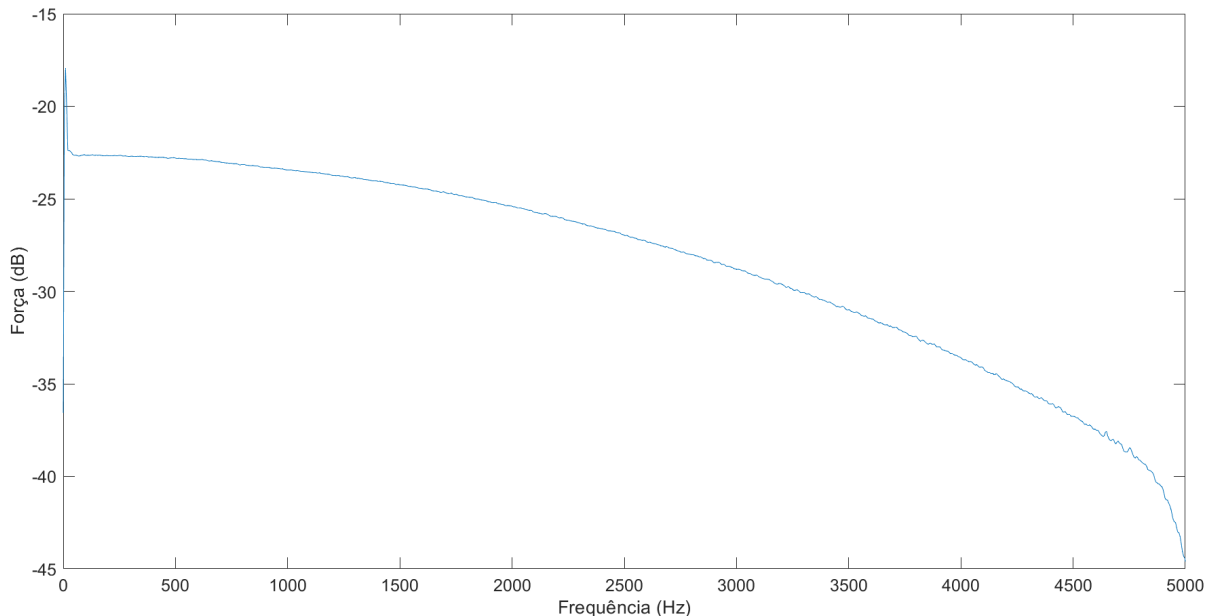
Figura 42 – Aceleração em função do tempo para uma viga de alumínio para o caso fixo-livre



Fonte: Autoria Própria (2024).

A Figura 43 mostra a resposta na frequência da intensidade da força em dB aplicada pelo martelo de impacto na viga fixo-livre de alumínio. Observa-se que a amplitude da força decai rapidamente conforme a frequência aumenta. Isso implica que o martelo pode não excitar de forma adequada modos de vibração de alta frequência.

Figura 43 – Força em função da frequência para uma viga de alumínio para o caso fixo-livre



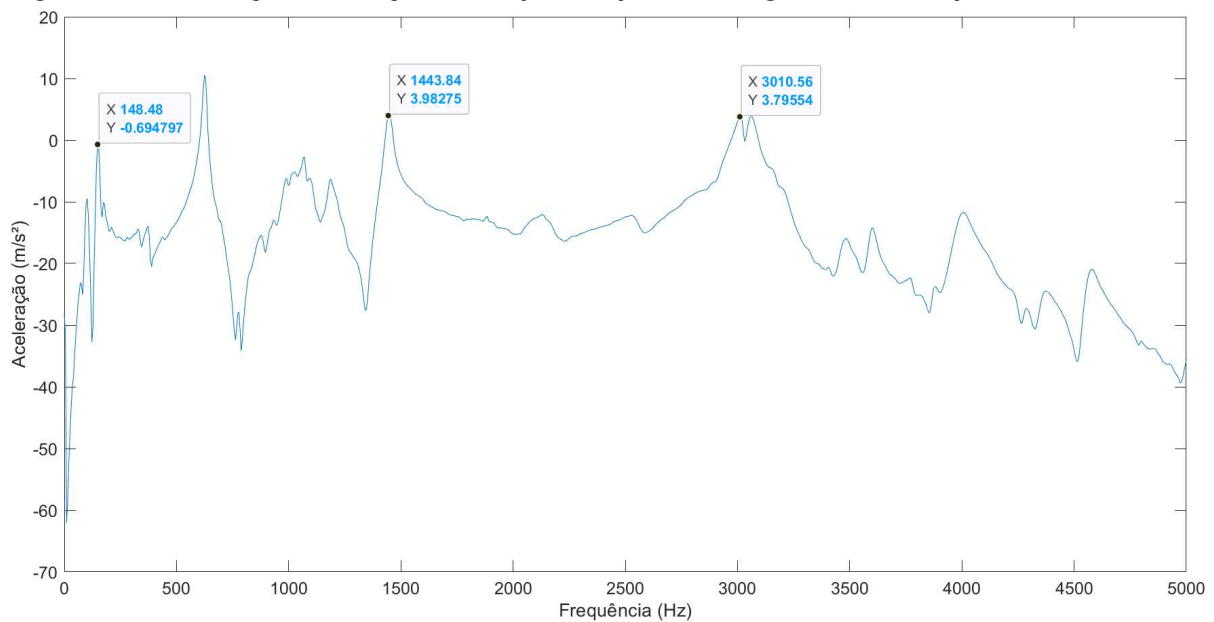
Fonte: Autoria Própria (2024).

A Figura 44 mostra a resposta na frequência da intensidade da aceleração em m/s^2 da viga fixo-livre de alumínio. Observa-se que os picos obtidos no gráfico são as frequências naturais da viga de alumínio, sendo elas de 148,48 Hz, 1443,84 Hz e 3010,56 Hz. Nela observa-

se um segundo pico, em 629,76 Hz, que não se aproxima de nenhum dos dados obtidos pelo método numérico mostrado na Tabela 8, com isso conclui-se que foi uma ressonância com o pórtico e por isso foi desconsiderada.

Observa-se também que, ao contrário do modelo livre-livre, os picos não se destacaram da mesma maneira. Isso se deve pela presença do pórtico, que pode estar oscilando em conjunto a viga e interferindo nos sinais coletados. É esperado que isto ocorra, entretanto houve interferência significativa que não pode ser eliminada pelos testes feitos.

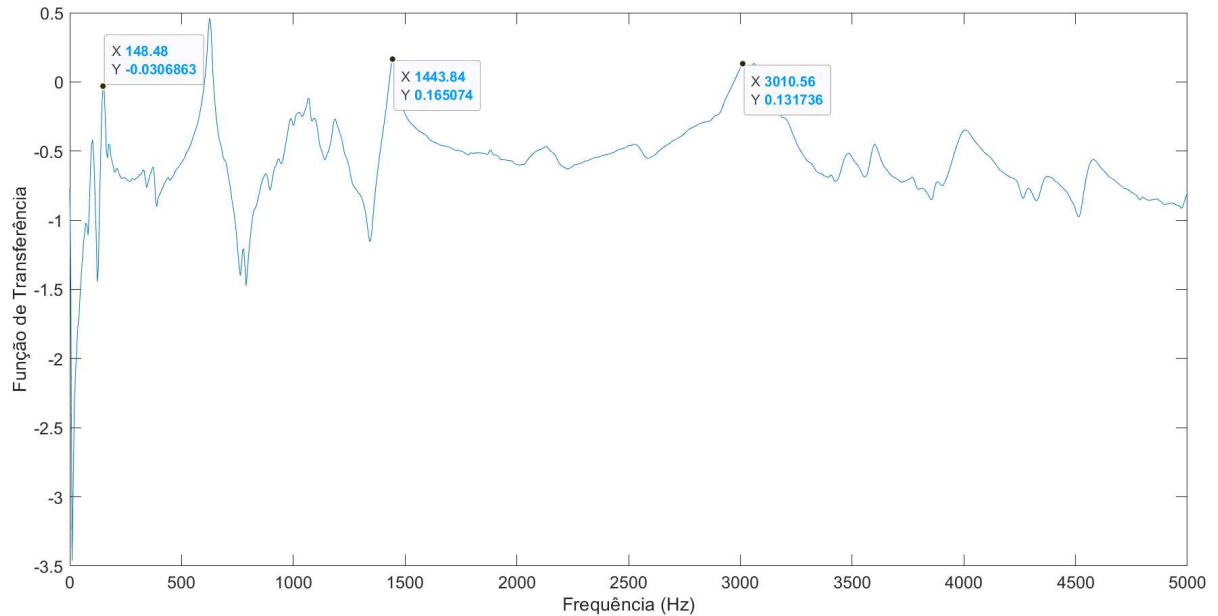
Figura 44 – Aceleração em função da frequência para uma viga de alumínio para o caso fixo-livre



Fonte: Autoria Própria (2024).

A Figura 45 mostra a resposta em frequência da função de transferência em Hz para a viga fixo-livre de alumínio. Utilizou-se a transformada de Fourier para analisar a curva, considerando o impacto do martelo (entrada) e a aceleração (saída), e a aceleração foi dividida pelo impacto do martelo.

Figura 45 – Função de transferência em função da frequência para uma viga de alumínio para o caso fixo-livre



Fonte: Autorial Própria (2024).

Após todos os dados coletados, comparou-se com as frequências naturais obtidas pelo método numérico, na seção 4.1. A Tabela 8 mostra os resultados encontrados para o alumínio no caso fixo-livre de maneira experimental e numérica.

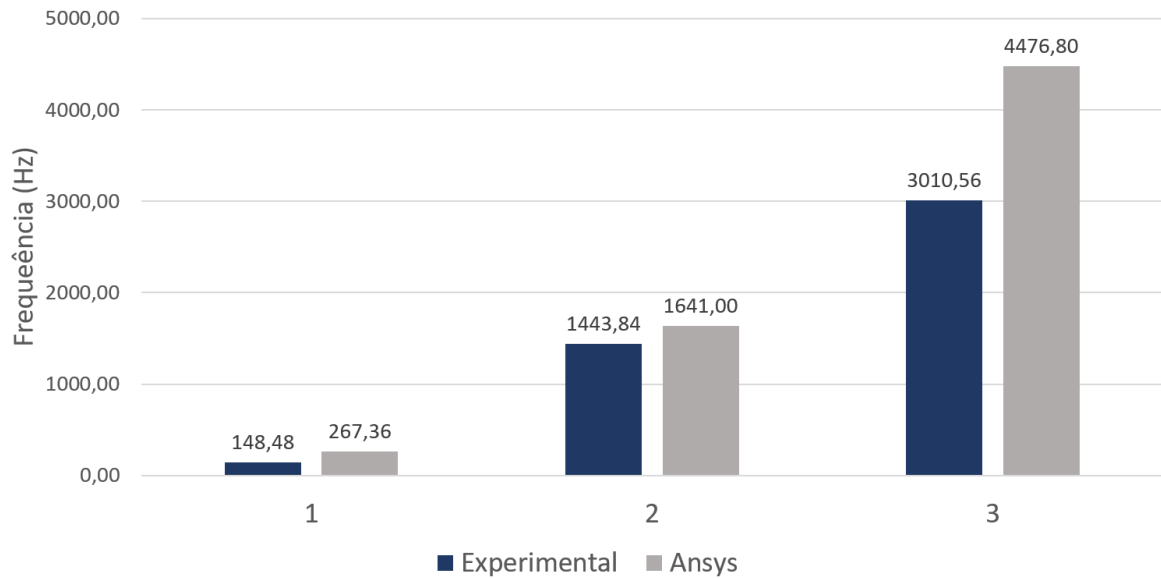
Tabela 8 – Comparação entre frequências naturais obtidas por método experimental e numérico para o alumínio para o caso fixo-livre

Frequência Natural	Método Experimental (Hz)	Método Numérico (Hz)	Erro Relativo(%)
1	148,48	267,36	44,46
2	1443,84	1641,00	12,06
3	3010,56	4476,80	32,75

Fonte: Autorial Própria (2024).

Para analisar a Tabela 8, utilizou-se de um gráfico de barras para facilitar a visualização do comportamento das frequências naturais. A Figura 46 apresenta a comparação entre as 3 frequências naturais pelo método experimental e numérico de maneira gráfica para o alumínio no caso fixo-livre.

Figura 46 – Comparação entre as 3 frequências naturais pelo método experimental e numérico para o alumínio no caso fixo-livre



Fonte: Autoria Própria (2024).

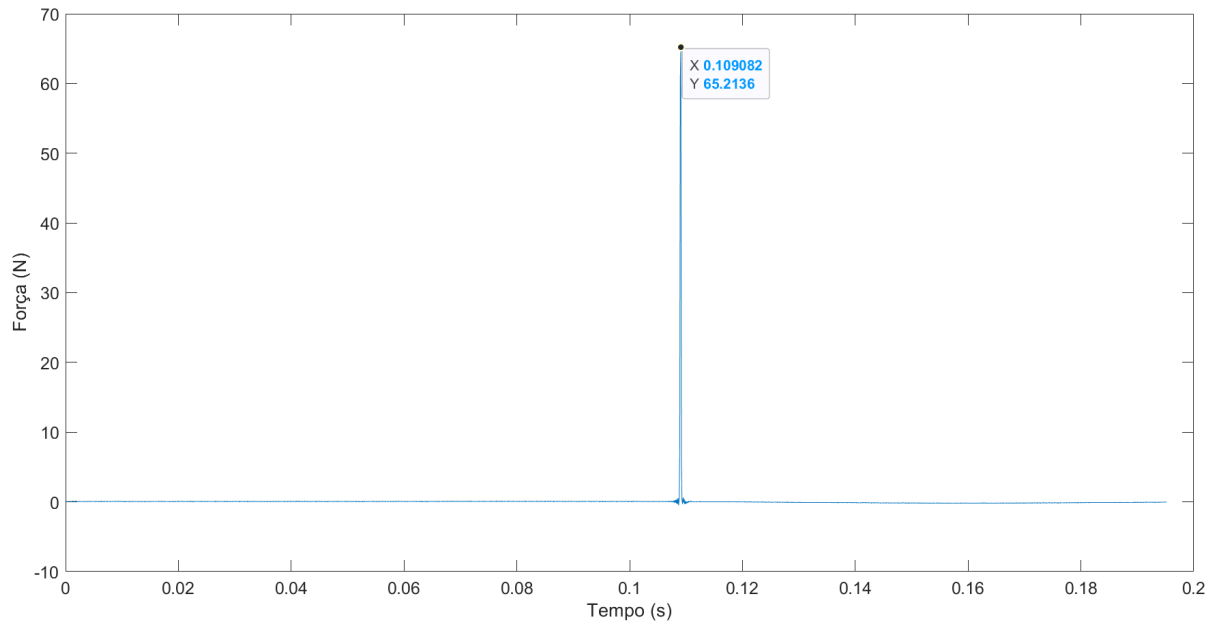
Nota-se que o erro relativo, como mostra a Tabela 8, foi maior do que as análises para o numérico-analítico e o experimental-numérico. Essa diferença pode ser atribuída à presença do pórtico, que pode ter experimentado ressonância com a viga estudada. Observa-se também que o erro na primeira e terceira frequência foram maiores, e a segunda frequência menor, como foi observado em análises anteriores.

Além disso, a geometria da viga estudada mostrou-se ter frequências naturais altas e, ao analisar a Figura 43, observa-se que o martelo de impacto pode não excitar a viga de maneira adequada em altas frequências. Como também, a relação comprimento-espessura pode não estar próxima do ideal, o qual pode interferir no experimento.

4.2.4 Resposta no tempo e na frequência da viga fixo-livre de aço

A Figura 47 mostra a resposta no tempo da intensidade da força em N aplicada ao martelo de impacto na viga fixo-livre de aço. Nota-se que o valor do pico da força foi de 65,21 N no tempo aproximado de 0,1 s.

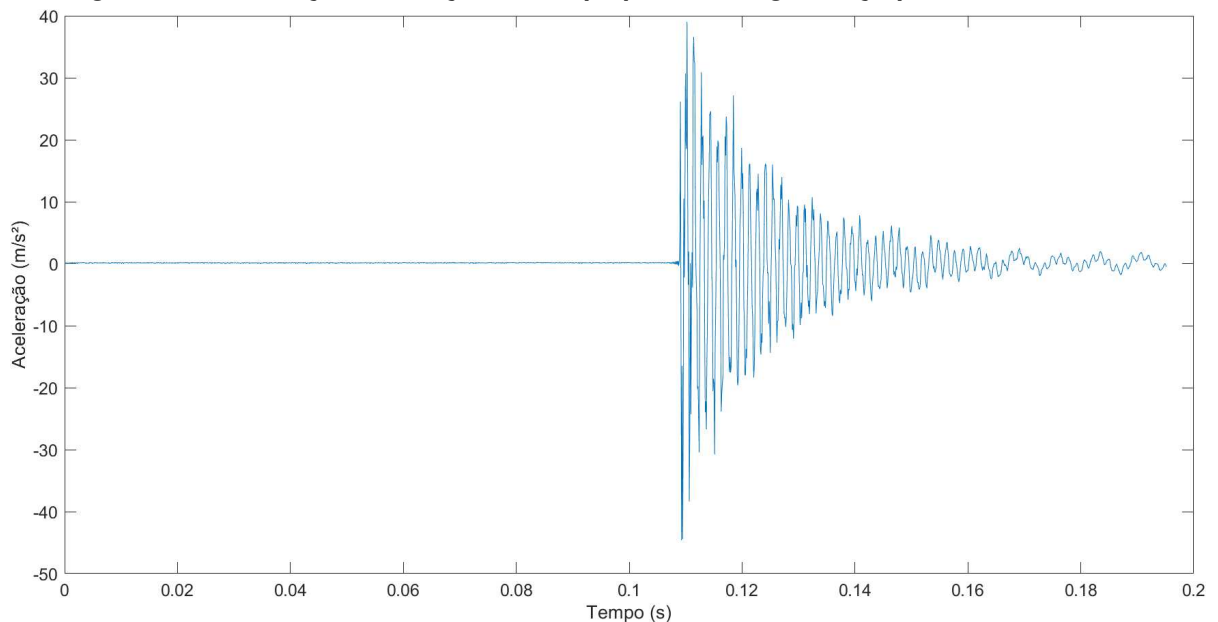
Figura 47 – Força em função do tempo para uma viga de aço para o caso fixo-livre



Fonte: Autoria Própria (2024).

A Figura 48 mostra a resposta no tempo da intensidade da aceleração em m/s^2 da viga fixo-livre de aço excitada pelo martelo de impacto. Observa-se que a aceleração é zero antes do impacto que ocorre em aproximadamente 0,1 s. Observa-se também que a amplitude da aceleração decai com o tempo indicando a existência de um amortecimento.

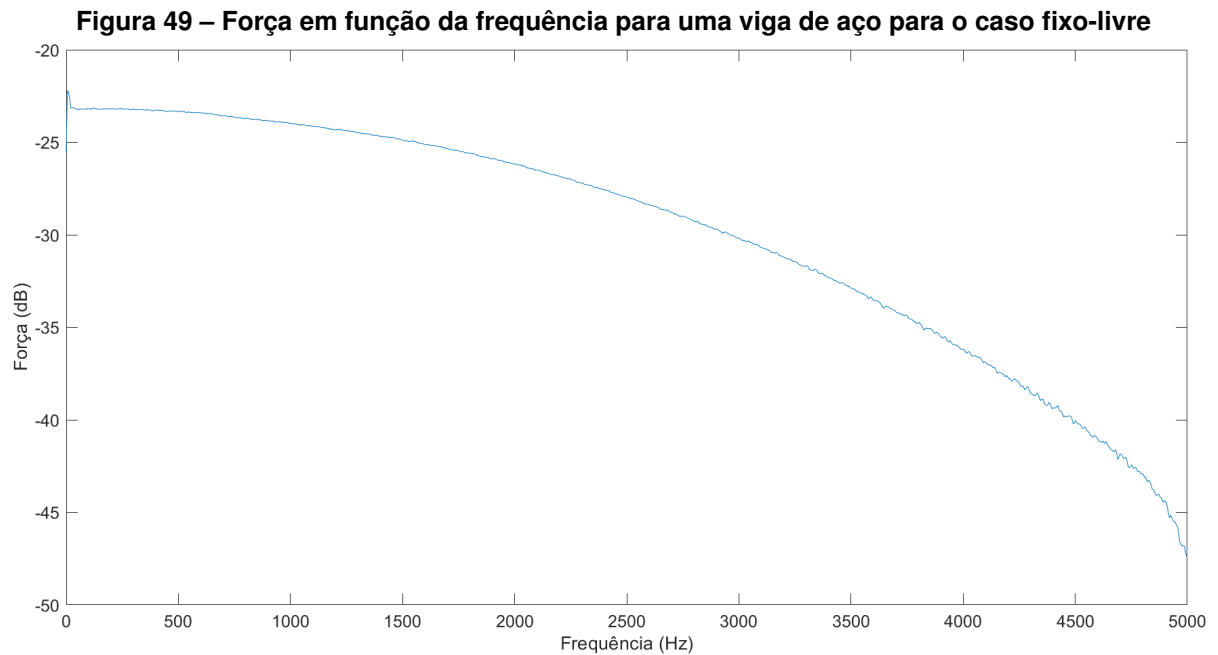
Figura 48 – Aceleração em função do tempo para uma viga de aço para o caso fixo-livre



Fonte: Autoria Própria (2024).

A Figura 49 mostra a resposta na frequência da intensidade da força em dB aplicada pelo martelo de impacto na viga fixo-livre de aço. Observa-se que a amplitude da força decai

rapidamente conforme a frequência aumenta. Isso implica que o martelo pode não excitar de forma adequada modos de vibração de alta frequência.

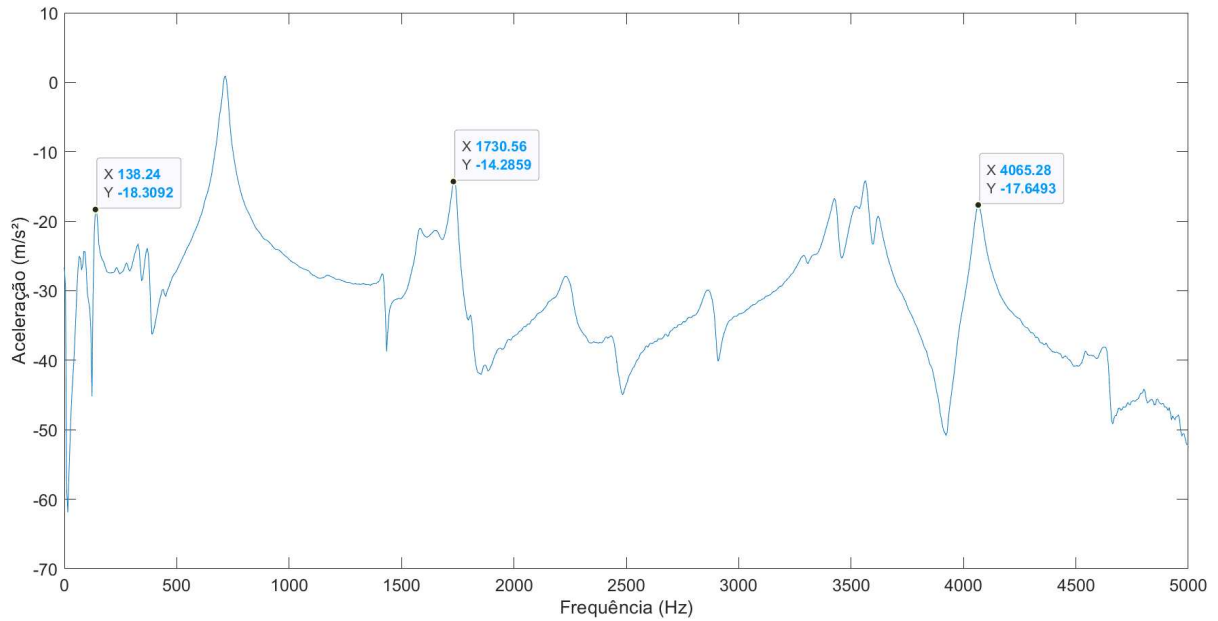


Fonte: Autoria Própria (2024).

A Figura 50 mostra a resposta na frequência da intensidade da aceleração em m/s^2 da viga fixo-livre de aço. Observa-se que os picos obtidos no gráfico são as frequências naturais da viga de alumínio, sendo elas de 138,24 Hz, 1730,56 Hz e 4065,28 Hz. Nela observa-se um segundo pico, em 716,80 Hz, que não se aproxima de nenhum dos dados obtidos pelo método numérico mostrado na Tabela 9, com isso conclui-se que foi uma ressonância com o pórtico e por isso foi desconsiderada.

Observa-se também que o comportamento da curva com as frequências naturais foi igual ao alumínio, com picos sem grande destaque devido a presença do pórtico, que poderia oscilar em conjunto da viga e interferindo nos sinais coletados.

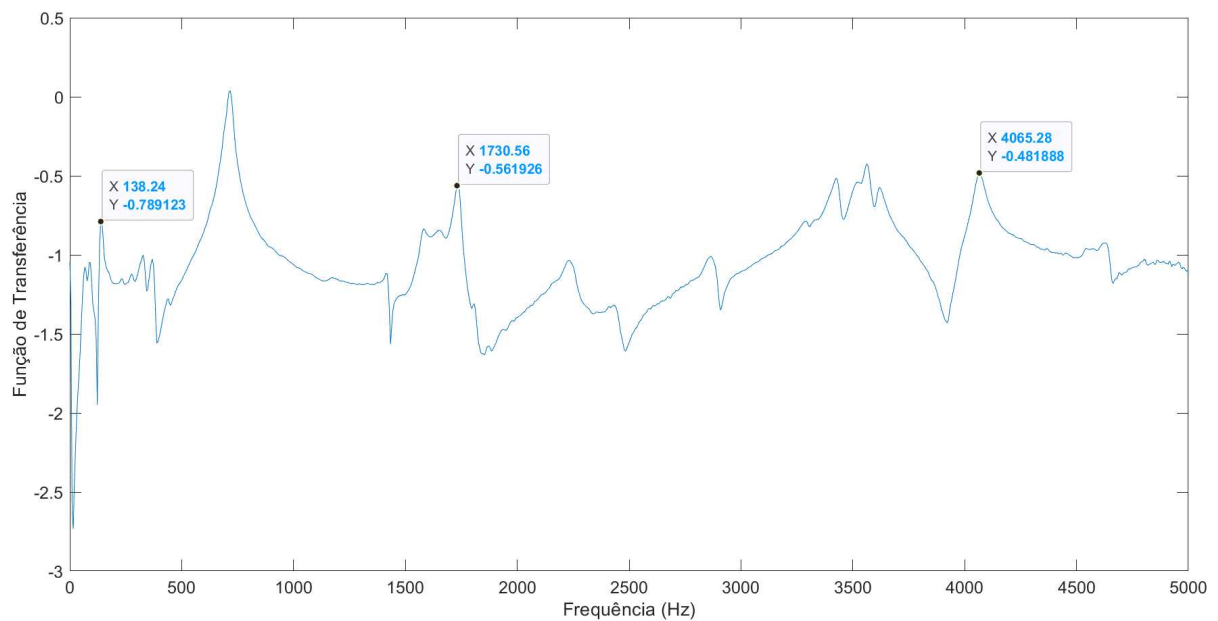
Figura 50 – Aceleração em função da frequência para uma viga de aço para o caso fixo-livre



Fonte: Autoria Própria (2024).

A Figura 51 mostra a resposta em frequência da função de transferência em Hz para a viga fixo-livre de aço. Foi utilizada a transformada de Fourier para analisar a curva, considerando o impacto do martelo (entrada) e a aceleração (saída), e a aceleração foi dividida pelo impacto do martelo.

Figura 51 – Função de transferência em função da frequência para uma viga de aço para o caso fixo-livre



Fonte: Autoria Própria (2024).

Após todos os dados coletados, comparou-se com as frequências naturais obtidas pelo método numérico, na seção 4.1. A Tabela 9 mostra os resultados encontrados para o aço no caso fixo-livre de maneira numérica e experimental.

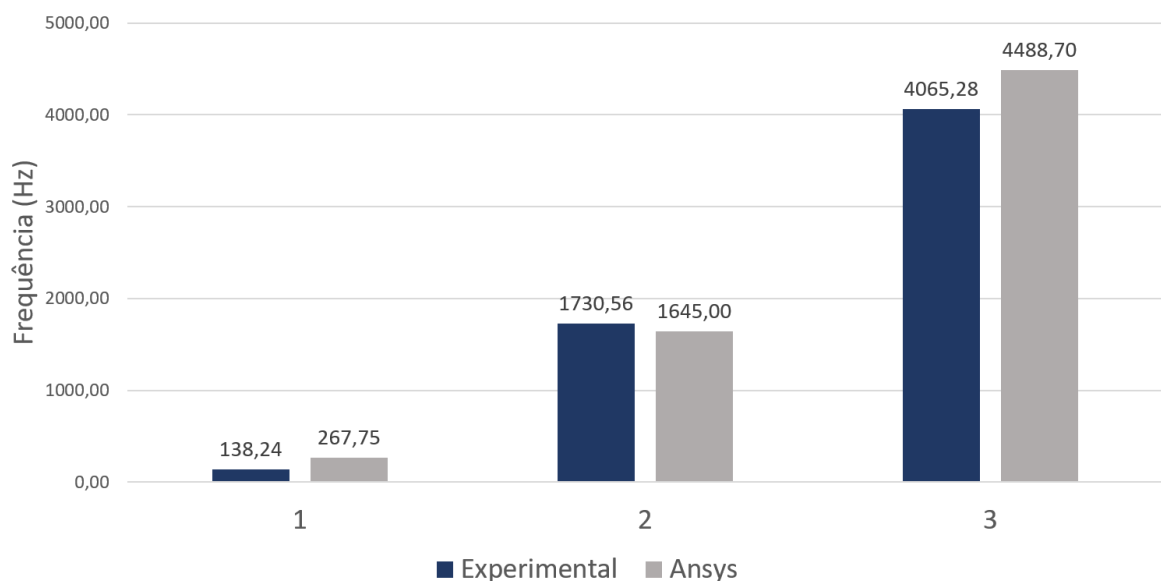
Tabela 9 – Comparação entre frequências naturais obtidas por método experimental e numérico para o aço para o caso fixo-livre

Frequência Natural	Método Experimental (Hz)	Método Numérico (Hz)	Erro Relativo (%)
1	138,24	267,75	48,36
2	1730,56	1645,00	5,20
3	4065,28	4488,70	9,43

Fonte: Autoria Própria (2024).

Para analisar a Tabela 9, utilizou-se de um gráfico de barras para facilitar a visualização do comportamento das frequências naturais. A Figura 52 apresenta a comparação entre as 3 frequências naturais pelo método experimental e numérico de maneira gráfica para o aço no caso fixo-livre.

Figura 52 – Comparação entre as 3 frequências naturais pelo método experimental e numérico para o aço no caso fixo-livre



Fonte: Autoria Própria (2024).

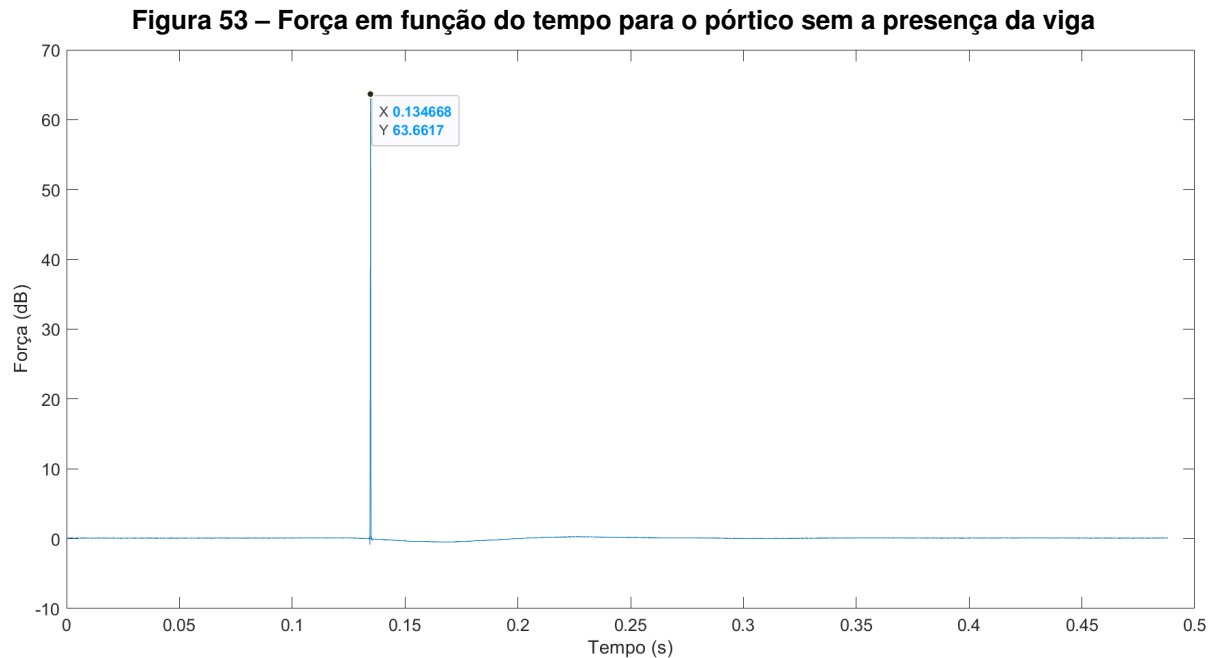
Nota-se que o erro relativo, como mostra a Tabela 9, foi maior do que as análises para o numérico-analítico e o experimental-numérico. Essa diferença pode ser atribuída à presença do pórtico, que pode ter experimentado ressonância com a viga estudada. Observa-se também que o erro na primeira e terceira frequência foram maiores, e a segunda frequência menor, como foi observado em análises anteriores.

Além disso, a geometria da viga estudada mostrou-se ter frequências naturais altas e, ao analisar a Figura 49, observa-se que o martelo de impacto pode não excitar a viga de maneira adequada em altas frequências. Como também, a relação comprimento-espessura pode não estar próxima do ideal, o qual pode interferir no experimento.

Verificou-se também que as frequências naturais para o aço e para o alumínio ficaram próximas. Isso ocorre porque, apesar das diferenças em suas propriedades mecânicas, a relação entre o módulo de elasticidade e densidade de ambos os materiais é semelhante. Essa combinação desempenha um papel importante no cálculo das frequências naturais, resultando em valores próximos para os dois materiais.

4.2.5 Modos e frequências naturais do pórtico

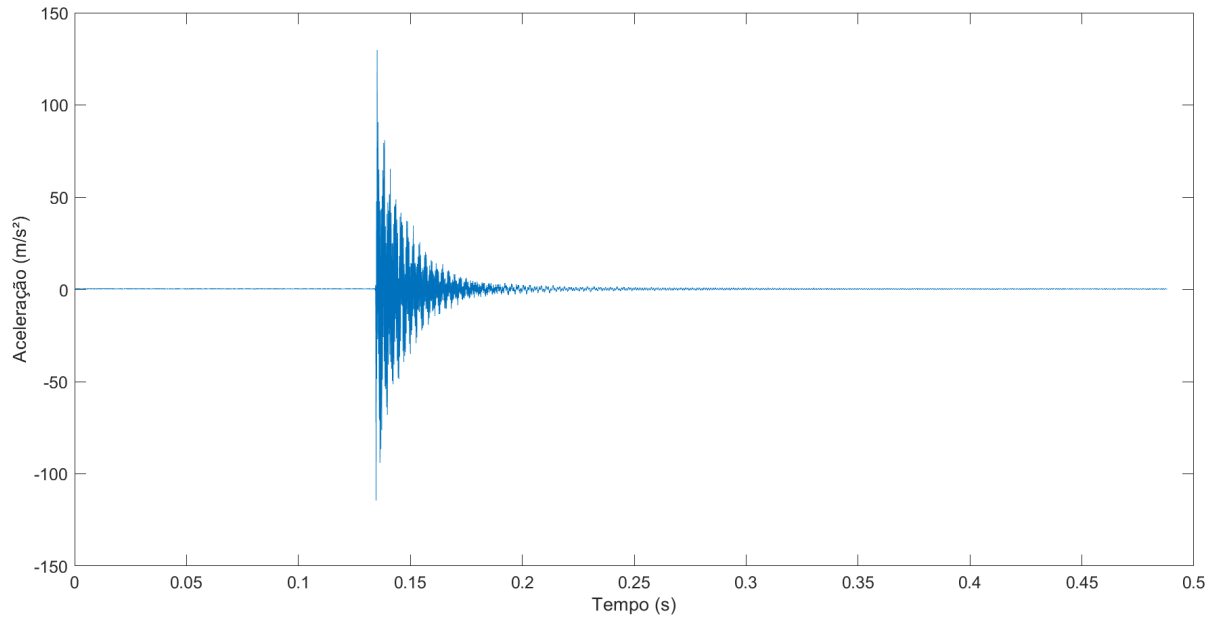
A Figura 53 mostra a resposta no tempo da intensidade da força em dB aplicada ao martelo de impacto no pórtico sem a presença da viga. Nota-se que o pico da força foi de 63,66 dB e ocorreu no instante 0,13s.



Fonte: Autoria Própria (2024).

A Figura 54 mostra a resposta no tempo da intensidade da aceleração em m/s^2 do pórtico sem a presença da viga excitado pelo martelo de impacto. Observa-se que a aceleração é zero antes do impacto que ocorre em aproximadamente 0,13s. Observa-se também que a amplitude decai com o tempo indicando a existência de amortecimento.

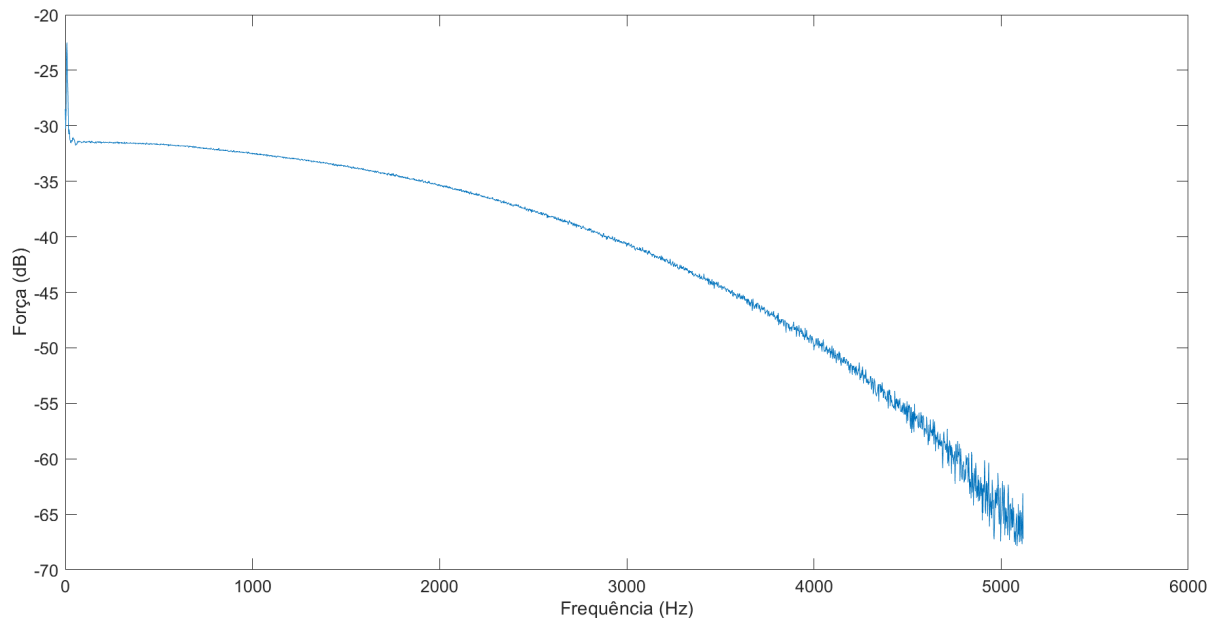
Figura 54 – Aceleração em função do tempo para o pórtico sem a presença da viga



Fonte: Autoria Própria (2024).

A Figura 55 mostra a resposta na frequência da intensidade da força em dB aplicada pelo martelo de impacto no pórtico sem a presença da viga. Observa-se que a amplitude da força decai rapidamente conforme a frequência aumenta. Isso implica que o martelo pode não excitar de forma adequada modos de vibração de alta frequência.

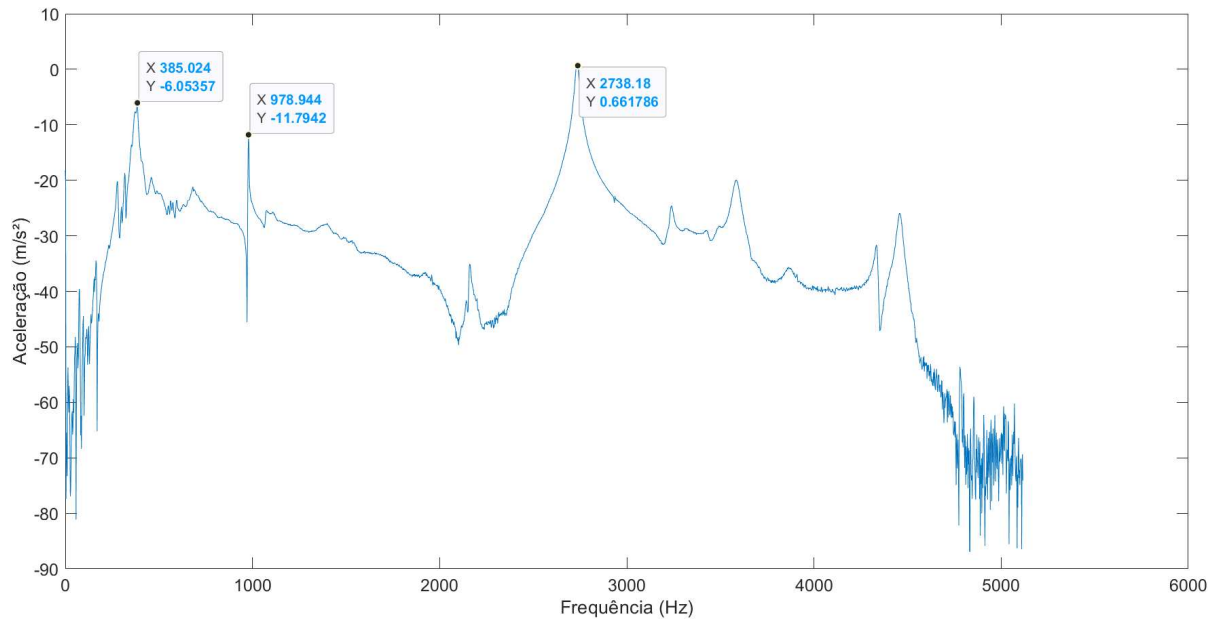
Figura 55 – Força em função da frequência para o pórtico sem a presença da viga



Fonte: Autoria Própria (2024).

A Figura 56 mostra a resposta na frequência da intensidade da aceleração em m/s^2 do pórtico sem a presença da viga. Observa-se que os picos obtidos no gráfico são as frequências naturais do pórtico sem a presença da viga, sendo elas 385,02 Hz, 978,94 Hz e 2738,18 Hz.

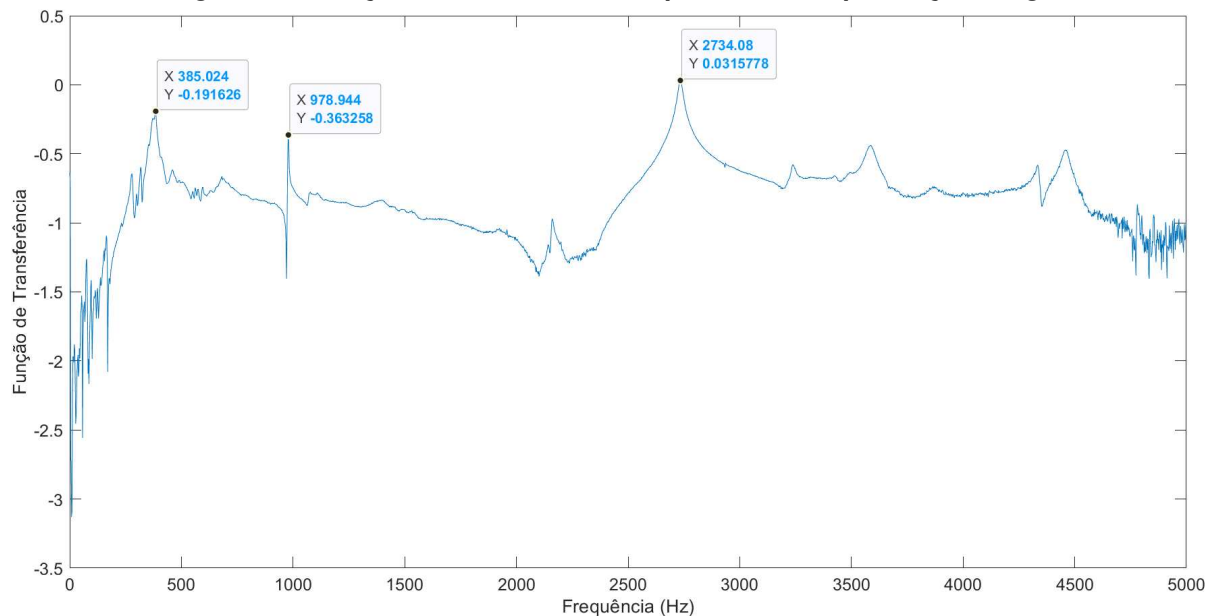
Figura 56 – Aceleração em função da frequência para o pórtico sem a presença da viga



Fonte: Autoria Própria (2024).

A Figura 57 mostra a resposta em frequência da função de transferência em Hz. Utilizou-se a transformada de Fourier para analisar a curva, considerando o impacto do martelo (entrada), e a aceleração foi dividida pelo impacto do martelo.

Figura 57 – Função de transferência do pórtico sem a presença da viga



Fonte: Autoria Própria (2024).

A Tabela 10 apresenta a comparação entre as frequências naturais obtidas para o pórtico e o caso fixo-livre para o alumínio e aço.

Ao analisar a Tabela 10, observou-se que a primeira frequência natural do pórtico apresentou uma proximidade com as primeiras frequências naturais transversais tanto do alumínio

Tabela 10 – Comparação entre frequências naturais obtidas por método experimental para o pórtico e o caso fixo-livre para o alumínio e aço

Frequência Natural	Pórtico (Hz)	Alumínio (Hz)	Aço (Hz)
1	385,02	148,48	138,24
2	978,94	1443,84	1730,56
3	2734,08	3010,56	4065,28

Fonte: Autoria Própria (2024).

quanto do aço. A segunda frequência natural do pórtico encontrou-se no intervalo entre a primeira e a segunda frequências naturais transversais desses materiais, o que pode ter influenciado as oscilações observadas nas análises para ambos. Já a terceira frequência natural do pórtico se aproximou da terceira frequência natural transversal do alumínio.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho realizou um estudo comparativo entre métodos numéricos e experimentais na investigação das características modais de vibração de uma viga fixa-livre. Através do uso do Método dos Elementos Finitos e da análise modal, foram comparadas as frequências naturais obtidas por ambas as abordagens, buscando validar os modelos utilizados e contribuir para a compreensão da dinâmica estrutural da viga, além de ressaltar a importância da análise de sistemas mecânicos vibratórios.

O estudo das vibrações é fundamental em diversas áreas da engenharia, sendo crucial para a segurança estrutural e o projeto de sistemas complexos como veículos e aeronaves. A abordagem comparativa entre métodos numéricos e experimentais adotada neste trabalho amplia sua aplicabilidade e destaca a complementaridade entre as técnicas. Enquanto os métodos numéricos, como o Método dos Elementos Finitos, oferecem flexibilidade e capacidade de modelagem detalhada, os experimentais fornecem dados concretos, mesmo com suas limitações práticas.

Os resultados obtidos revelaram a proximidade entre as análises numérica e analítica, reforçando a confiabilidade do método. Ademais, o estudo das frequências naturais transversais para a viga livre-livre pelo método experimental e numérico confirmou os dados da literatura, ao convergir com as previsões analíticas.

Entretanto, observou-se certa discrepância ao analisar o modelo fixo-livre. Apesar das tentativas de isolar a viga de interferências externas, o modelo ainda sofreu com impactos do pórtico. Além disso, essa diferença pode ser atribuída à possibilidade de ressonância entre o pórtico e a viga, fazendo com que a frequência natural obtida para a viga não seja a real.

Além disso, verificou-se que os erros relativos nas frequências naturais transversais foram mais significativos na primeira e na terceira frequência, enquanto a segunda apresentou menor variação. A alta frequência natural da geometria da viga dificulta a convergência nos resultados ao comparar com o numérico, pois o martelo de impacto não excita a viga de maneira adequada em frequências altas.

Ademais, ao comparar com as referências utilizadas neste estudo, a relação comprimento-espessura pode não ter sido a mais adequada, o que pode ter afetado o experimento de forma relevante, a qual nos outros estudos utilizou-se de uma viga relativamente mais comprida que sua espessura.

Pode-se concluir que a análise comparativa entre métodos numéricos e experimentais ressaltou tanto as vantagens quanto as limitações de cada abordagem, proporcionando um entendimento mais profundo das características vibratórias da viga fixa-livre. As discrepâncias observadas nos resultados, em particular devido à interferência do pórtico e à relação comprimento-espessura da viga, indicam a necessidade de ajustes nos experimentos futuros para minimizar tais influências e obter medições mais precisas. Como também, reforça a importância de uma análise criteriosa e integrada dos fatores que afetam as medições experimentais,

contribuindo para o desenvolvimento de modelos mais robustos e confiáveis em aplicações de engenharia.

Para estudos futuros, é recomendado levar em consideração as interferências causadas pelo pórtico, adotando modelos que incorporem seu coeficiente de amortecimento ou, preferencialmente, utilizando pórticos com características mais simplificadas. Além disso, realizar análises prévias com o apoio do Método dos Elementos Finitos pode ser uma estratégia eficaz para selecionar uma viga cujas frequências naturais se distanciem das do pórtico, minimizando assim a ocorrência de ressonância e aumentando a precisão dos resultados experimentais.

REFERÊNCIAS

- ADAVADKAR, B.; ADMUTHE, A. Modal analysis of cantilever beam using analytical and finite element method. **Journal of Emerging Technologies and Innovative Research**, v. 8, 2021. ISSN 2349-5162.
- BRAZ, L. D. V. *et al.* Dynamic analysis of baja-type vehicle subjected to excitation by irregular road profile. **CILAMCE**, p. 21–25, Nov 2022.
- BRITO, L. C. S. **Desenvolvimento de uma metodologia numérica e experimental para análise de aeroelasticidade na asa de um VANT utilizado na competição SAE Brasil Aerodesign**. 2023. Universidade Federal Rural do Semiárido. Disponível em: <https://repositorio.ufersa.edu.br/handle/prefix/10584>. Acesso em: 06 ago. 2024.
- CRAIG, R. R. **Fundamentals of Structural Dynamics**. USA: JOHN WILEY and SONS, INC, 2006. v. 1. 56–415 p.
- FABRY, S.; CESKOVIC, M. Aircraft gas turbine engine vibration diagnostic. **Magazine of Aviation Development**, n. 1, p. 24–28, Apr 2017. ISSN 1805-7578.
- HE, J.; FU, Z.-F. **Modal Analysis**. USA: Replika Press Pvt Ltd, 2001. v. 1. 1–9 p.
- HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais**. Brasil: Pearson Prentice Hall, 2010. v. 1. 421–477 p.
- INMAN, D. J. **Engineering Vibration**. USA: Pearson Education, Inc., 2014. v. 1. 303–435 p.
- LEME, L. M. M. **Estudo comparativo de técnicas de análise modal experimental no domínio da frequência em uma barra na condição de contorno livre-livre**. 2014. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Disponível em: <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/15149>. Acesso em: 24 ago. 2024.
- MONTEIRO, B. **Análise modal de vigas engastadas para identificação das propriedades mecânicas de três fibras de carbono utilizando para validação computacional o método dos elementos finitos**. 2014. Universidade Federal do Espírito Santo. Disponível em: https://engenhariamecanica.ufes.br/sites/engenhariamecanica.ufes.br/files/field/anexo/2014-1_brunelabragamonteiro-pg_revisado.pdf. Acesso em: 24 nov. 2024.
- NADKARNI, I.; BHARDWAJ, R.; NINAN, S. Experimental modal parameter identification and validation of cantilever beam. **materialstoday**, v. 38, p. 319–324, 2021.
- NATIONAL INSTRUMENTS. **NI 9234 Manual**. Austin, USA, 2015.
- NETO, W. **Identificação de parâmetros modais de uma viga engastada utilizando teste de impacto**. 2015. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Disponível em: <http://monografias.poli.ufrj.br/monografias/monopoli10013871.pdf>. Acesso em: 24 nov. 2024.
- ONISZCZUK, Z. Forced transverse vibrations of an elastically connected complex simply supported double-beam system. **Journal of Sound and Vibration**, v. 1, n. 1, p. 273–286, May 2002.
- OSTROWER, J. Boeing locks out 747-8 tail fuel tanks on flutter concerns. **Flight Global**, Flight Global, p. 1, jan. 2012. Disponível em: <https://www.flightglobal.com/boeing-locks-out-747-8-tail-fuel-tanks-on-flutter-concerns/103727.article>. Acesso em: 24 ago. 2024.

PCB PIEZOTRONICS. **Model 352C03**. Depew, USA, 2002.

PCB PIEZOTRONICS. **Model 086C03**. Depew, USA, 2007.

QAUMI, T.; HASHEMI, S. M. Experimental and numerical modal analysis of a composite rocket structure. **MDPI**, Sep 2023.

QUEIROZ, J. A. S. **Análise de estruturas flexíveis com aplicação de materiais viscoelásticos**. 2008. Universidade Estadual Paulista. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstreams/e85a80dd-67e3-4eef-98cc-db1915a8db23/download>. Acesso em: 24 ago. 2024.

RANI, S. An experimental investigation of cantilever beam using impulse modal analysis technique. **International journal of creative research thoughts**, v. 6, mar 2018. ISSN 2320-2882.

RAO, S. S. **Mechanical Vibrations**. USA: Pearson Education, Inc, 2018. v. 1. 596–699 p.

ROSSI, F. F. **Análise numérico-experimental do comportamento dinâmico de uma viga engastada-livre obtida por manufatura aditiva**. 2019. Universidade Federal de Uberlândia. Disponível em: <https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/24386>. Acesso em: 06 ago. 2024.

SALGADO, J.; MEIRELES, J. Study of the experimental modal analysis techniques applied to structural dynamics. **International Operational Modal Analysis Conference**, May 2013.

SOUZA, A. H. R.; SOUZA, L. S. M. **Análise modal numérica de uma estrutura do tipo baja**. 2019. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Disponível em: https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/27562/1/CP_COEME_2019_1_01.pdf. Acesso em: 06 ago. 2024.

TILLY, G. P. Dynamic behaviour and collapses of early suspension bridges. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers**, v. 1, n. 1, p. 75–80, May 2015.