



**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**  
**CAMPUS DE CURITIBA**  
**DEPARTAMENTO DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**  
**E DE MATERIAIS - PPGEM**

**MARCIO DOS SANTOS TROMBIN**

**DETERMINAÇÃO DE CONSTANTES ELÁSTICAS**  
**DE ESTRUTURA SANDUÍCHE**  
**COM NÚCLEO EM PAPEL CELULOSE**  
**E FACES EM NÃO-TECIDO COMPOSTO**

**CURITIBA**

**FEVEREIRO – 2012**

**MARCIO DOS SANTOS TROMBIN**

**DETERMINAÇÃO DE CONSTANTES ELÁSTICAS  
DE ESTRUTURA SANDUÍCHE  
COM NÚCLEO EM PAPEL CELULOSE  
E FACES EM NÃO-TECIDO COMPOSTO**

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia, do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Área de Concentração em Mecânica dos Sólidos e Vibrações, do Departamento de Pesquisa e Pós-Graduação, do Campus de Curitiba, da UTFPR.

**Orientador:** Prof. Marco A. Luersen, Dr. Eng.

**CURITIBA**

**FEVEREIRO – 2012**

**TERMO DE APROVAÇÃO**

MARCIO DOS SANTOS TROMBIN

**DETERMINAÇÃO DE CONSTANTES ELÁSTICAS  
DE ESTRUTURA SANDUÍCHE  
COM NÚCLEO EM PAPEL CELULOSE  
E FACES EM NÃO-TECIDO COMPOSTO**

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do título de mestre em engenharia, área de concentração em Mecânica dos Sólidos e Vibrações, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais.

---

Prof. Giuseppe Pintaúde, Dr. Eng.  
Coordenador de Curso

**Banca Examinadora**

---

Prof. Marco Antônio Luersen, Dr. Eng.  
(UTFPR)

---

Prof. Eduardo M. O. Lopes, PhD  
(UFPR)

---

Prof. Carlos Henrique da Silva, Dr. Eng.  
(UTFPR)

---

Prof. Ivan Moura Belo, Dr. Eng.  
(UTFPR)

Curitiba, 29 de Fevereiro de 2012

*Dedicado à minha esposa Magali e ao nosso filho Lucas.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus pela vida, pela saúde e por estar comigo durante mais essa etapa.

Aos meus familiares, cada um, a seu modo, merece um agradecimento especial pelo incentivo e por suportarem a minha ausência.

Ao professor Marco Antônio Luersen, pela dedicação e incentivo durante essa dissertação de mestrado e por ter sido meu orientador desde 2006 em diversos outros trabalhos, os quais despertaram cada vez mais meu interesse pela pesquisa científica.

Aos colegas de trabalho pelo compartilhamento de idéias, em especial ao colega Benno Stamp.

Aos professores do PPGEM por transmitirem seus conhecimentos.

Ao PPGEM e ao CITEC/LaMEs pela infraestrutura e administrações disponibilizadas.

À UTFPR, onde tive honra de ser aluno desde 1997.

Ao ARINT e ao CALEM pelo auxílio na realização dos intercâmbios.

À Daimler AG pelo recurso financeiro e pela infraestrutura disponibilizada.

TROMBIN, M.S., **Determinação de constantes elásticas de estrutura sanduíche com núcleo em papel celulose e faces em não-tecido composto**, 2012, Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 133 p.

## RESUMO

Estruturas sanduíche possuem aplicações em diferentes áreas, tais como as indústrias: automotiva, naval, aeronáutica e moveleira. As razões da sua utilização vão desde a elevada eficiência estrutural até o baixo custo. Na indústria automotiva, elas são usadas em veículos convencionais, bem como em esportivos de alto desempenho. Uma alternativa de baixo custo são estruturas sanduíche com núcleos feitos em papel celulose e faces em materiais compostos termoplásticos. Alguns automóveis utilizam esses materiais em componentes com forma plana ou pequenas curvaturas. Os principais objetivos de usá-los são a redução do peso, o aumento da reciclabilidade e o projeto multifuncional (funções ambiental, estética, acústica, térmica e estrutural, simultaneamente). No entanto, uma das dificuldades que surge no projeto destes componentes é a previsão do comportamento estrutural, uma vez que tais materiais são difíceis de caracterizar experimentalmente. Assim, neste trabalho, são apresentados alguns métodos para avaliar as propriedades elásticas de sanduíches com núcleo hexagonal (estrutura colméia) e senoidal em papel e faces em não-tecido de polipropileno com fibras de vidro. As propriedades elásticas equivalentes longitudinais do núcleo são obtidas através de um modelo de elementos finitos de viga, que é validado com um método analítico para células hexagonais. Quanto às propriedades transversais, é utilizado um procedimento experimental, onde os núcleos com células senoidais são testados em uma máquina de tração. Neste caso, as dimensões das células são alteradas, bem como as gramaturas dos papéis. As propriedades equivalentes das faces são obtidas através de um modelo de elementos finitos planos.

**Palavras-chave:** Estruturas sanduíche, Propriedades elásticas, Papel celulose, Compostos termoplásticos.

TROMBIN, M.S., **Assessment of elastic constants of sandwich structures with core of cellulose paper and faces of nonwoven composite**, 2012, Thesis (Master in Engineering) - Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 133 p.

## ABSTRACT

Sandwich structures are used in various areas of application such as the automotive, marine, aeronautical and furniture industries. The reasons for their use range from the high structural efficiency to low cost. In the automotive industry, they are used in conventional vehicles as well as in high-end sports cars. An alternative of low-cost structures is that of cores made of cellulose paper and faces of thermoplastic composites. Some vehicles already use these materials in parts with flat shape or with small curvatures. The main purposes of using them are the reduction of the total weight of the vehicle, the increase of recyclability and the multifunctional design (environmental, aesthetic, acoustic, thermal and structural functions simultaneously). However, one of the difficulties that arises in the design of these components is the prediction of their structural behavior, since such materials are difficult to characterize. So, this work presents some methods to assess the elastic properties of sandwich cores composed of hexagonal (honeycomb) and sinusoidal cells of Testliner paper and faces of polypropylene/fiberglass nonwoven. The in-plane equivalent elastic properties of the core are obtained through a numerical finite element beam model, which is validated with an analytical method for hexagonal cells. For the out-of-plane equivalent properties, an experimental procedure is carried on, where sinusoidal cell cores are tested on a traction machine. In this case, the dimensions of the cell are changed, as well as the grammages of the papers. The equivalent elastic properties of the face are obtained through a numerical plane finite element model.

**Keywords:** Sandwich structures, Elastic properties, Cellulose paper, Thermoplastic composite.

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS .....	<i>xi</i>
LISTA DE TABELAS .....	<i>xvii</i>
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS .....	<i>xviii</i>
LISTA DE SÍMBOLOS.....	<i>xix</i>
<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1. Algumas definições .....	1
1.1.1. Relações constitutivas.....	1
1.1.2. Estruturas sanduíche.....	1
1.2. Motivação do trabalho e aplicação do tema.....	3
1.2.1. Indústria automotiva como exemplo de aplicação .....	3
1.2.2. Requisitos de material na simulação numérica de estruturas sanduíche.....	5
1.3. Objetivos e foco do trabalho.....	5
1.4. Metodologia .....	5
1.5. Organização do texto .....	7
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>8</b>
2.1. Papel celulose .....	8
2.1.1. Algumas definições .....	8
2.1.2. Microestrutura.....	10
2.1.3. Algumas propriedades físicas normatizadas.....	14
2.1.4. Propriedades elásticas .....	15
2.2. Não-tecidos em polipropileno reforçado por fibras de vidro .....	15
2.2.1. Polipropileno.....	15
2.2.2. Fibras de vidro.....	21
2.2.3. Não-tecidos agulhados.....	22
2.3. Núcleos de interesse .....	24
2.3.1. Núcleo expandido (célula hexagonal) .....	25
2.3.2. Núcleo em papelão (célula senoidal) .....	26
2.4. Estrutura sanduíche de interesse.....	28
2.4.1. Montagem do sanduíche.....	28
2.4.2. Definição de grau de consolidação do não-tecido da face .....	29
2.5. Relações constitutivas elásticas.....	30
2.5.1. Sólido unidimensional.....	30
2.5.2. Sólido bidimensional ortotrópico .....	30
2.5.3. Sólido tridimensional ortotrópico .....	31
2.6. Micromecânica de materiais compostos com reforço unidirecional.....	33
2.6.1. Modelos analíticos.....	33
2.6.2. Modelos semiempíricos.....	34

2.7.	Propriedades elásticas equivalentes de núcleos sanduíche .....	34
2.7.1.	Células hexagonais .....	34
2.7.2.	Células senoidais .....	43
2.8.	Caracterização mecânica de núcleos sanduíche.....	43
2.9.	Método dos elementos finitos para materiais elásticos lineares.....	45
2.9.1.	Discretização do problema de contorno.....	45
2.9.2.	Elemento de viga de dois nós com três graus de liberdade por nó .....	45
2.9.3.	Elemento plano de três nós com dois graus de liberdade por nó .....	47
<b>3</b>	<b>APRESENTAÇÃO DOS MÉTODOS .....</b>	<b>49</b>
3.1.	Modelagem da lâmina de papel .....	49
3.1.1.	Restrições do tipo de papel .....	49
3.1.2.	Macroestrutura .....	49
3.1.3.	Homogeneização.....	49
3.1.4.	Comportamento elástico.....	50
3.1.5.	Ortotropia.....	50
3.1.6.	Temperatura e umidade controlada .....	50
3.2.	Representação das faces através de modelo da micromecânica .....	50
3.3.	Propriedades equivalentes do núcleo hexagonal – Métodos analíticos .....	52
3.3.1.	Plano longitudinal .....	52
3.3.2.	Planos transversais .....	56
3.4.	Propriedades transversais de núcleos senoidais – Método analítico .....	61
3.5.	Modelagem do núcleo por elementos finitos de viga .....	62
3.6.	Ensaio de caracterização de núcleos senoidais .....	64
3.7.	Determinação das propriedades equivalentes das faces por elementos finitos planos .....	66
3.7.1.	Hipóteses simplificadoras.....	66
3.7.2.	Propriedades elásticas equivalentes de uma placa homogênea.....	67
3.7.3.	Propriedades elásticas equivalentes das células.....	69
<b>4</b>	<b>APLICAÇÃO DOS MÉTODOS: RESULTADOS E DISCUSSÕES .....</b>	<b>70</b>
4.1.	Constantes elásticas da lâmina de papel celulose .....	70
4.2.	Constantes elásticas do não-tecido .....	78
4.2.1.	Cálculo do grau de consolidação .....	78
4.2.2.	Influência do grau de consolidação nas propriedades elásticas.....	80
4.3.	Constantes elásticas das faces.....	80
4.3.1.	Teste do algoritmo em VBA .....	81
4.4.	Constantes elásticas do núcleo hexagonal.....	82
4.4.1.	Comparação entre os métodos numérico e analítico.....	82
4.4.2.	Visualização da configuração deformada das células .....	84
4.4.3.	Algumas propriedades transversais consideradas desprezíveis .....	86
4.5.	Constantes elásticas do núcleo senoidal .....	87
4.5.1.	Propriedades transversais - Resultados experimentais.....	87
4.5.2.	Propriedades transversais – Método semiempírico .....	91

4.5.3. Comparação entre os métodos experimental e semiempírico.....	98
4.5.4. Propriedades longitudinais - Exemplo numérico.....	98
<b>5 CONCLUSÕES.....</b>	<b>100</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>102</b>
<b>APÊNDICE A – RELAÇÕES ELÁSTICAS CONSTITUTIVAS.....</b>	<b>110</b>
A.1 – Sólido unidimensional.....	110
A.2 – Sólido bidimensional ortotrópico e isotrópico.....	111
A.3 – Sólido tridimensional ortotrópico.....	120
<b>APÊNDICE B – MICROMECAÂNICA DE MATERIAIS COMPOSTOS COM REFORÇO UNIDIRECIONAL.....</b>	<b>124</b>
B.1 – Módulo de Young longitudinal ao reforço.....	124
B.2 – Módulo de Young transversal ao reforço.....	125
B.3 – Coeficiente de Poisson.....	126
B.4 – Módulo de cisalhamento.....	127
<b>APÊNDICE C – APLICATIVO DE ELEMENTOS FINITOS EM VBA.....</b>	<b>128</b>
C.1 – Interação do aplicativo com o usuário.....	128

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Exemplos de estruturas sanduíche: (a) fêmur (GUAGNELI, 2008) e (b) interior do <i>Smart Forvision</i> (SMART FORVISION, 2011).....	2
Figura 1.2 – Exemplos de núcleos: (a) Hexagonal em alumínio, (b) e (c) Senoidal e Quadrado em papel celulose, (d) <i>Faltwabe</i> e (e) <i>Nap core</i> em epóxi-aramida e (f) Tubular em polipropileno (STAMP, 2011).....	3
Figura 1.3 – Protótipos da tampa e do assoalho do bagageiro em núcleo senoidal em papel celulose e tubular em polipropileno respectivamente (CAPRIOLI, 2008)...	4
Figura 1.4 – Sistema de coordenadas adotado para modelar a estrutura sanduiche. (a) Hexagonal e (b) Senoidal. ....	6
Figura 1.5 – Metodologias utilizadas para determinação das propriedades elásticas.	7
Figura 2.1 – Micrografias de polpas de madeiras obtidas em microscópio eletrônico: (a) <i>pinus radiata</i> (CARRASCO, 2010) e (b) eucalipto (FOELKEL, 2007).....	9
Figura 2.2 – Micrografias de papeis de madeira <i>Pinus taeda</i> nas vistas: (a) superficial e (b) transversal (FOELKEL, 2007).....	10
Figura 2.3 - Microscopia superficial de polpa de <i>Pinus radiata</i> (CARRASCO, 2010). ....	11
Figura 2.4 - Modelo de Maxwell generalizado (adaptado de Keuerleber, 2006). ....	14
Figura 2.5 - Moléculas de PP: (a) atática, (b) isotática e (c) sindiotática. ....	16
Figura 2.6 – Modelo microestrutural de polímeros (adaptado de Callister, 2003). ....	18
Figura 2.7 - Deformação da esferulita. (a) Idealização (ALCOCK, 2005) e (b) Microscopias de um i-PP (MACHADO <i>et al.</i> , 2000). ....	18
Figura 2.8 - Demanda europeia de plásticos nos últimos anos (PEMRG, 2011).....	20
Figura 2.9 – Corpo de prova de tração (adaptado de DIN 527, 1996). ....	21
Figura 2.10 - Fabricação de não-tecido agulhado (adaptado de ALBRECHT <i>et al.</i> , 2000).....	23
Figura 2.11 – Corpo de prova de tração (adaptado de DIN 527, 1996). ....	24

Figura 2.12 – Fabricação de núcleo sanduíche hexagonal (STAMP, 2011). .....	25
Figura 2.13 - Direções preferenciais das lâminas de papel de núcleo hexagonal.....	26
Figura 2.14 - Núcleo hexagonal em <i>Testliner</i> com células de 7 mm.....	26
Figura 2.15 - Fabricação de núcleos senoidais (STAMP, 2011). .....	27
Figura 2.16 - Direções preferenciais das lâminas de papel de núcleo senoidal.....	27
Figura 2.17 - Núcleos senoidais dos tipos: (a) $K\sim$ , (b) $A\sim$ , (c) $C\sim$ e (d) $B\sim$ . .....	28
Figura 2.18 - Face em PP/FV30 de 400 $g/m^2$ com núcleo $A\sim$ em <i>Testliner</i> de 115 $g/m^2$ . (a) Microscopia 3D e (b) Corte transversal (adaptado de STAMP, 2011)..	29
Figura 2.19 – Segmento de placa com célula hexagonal.....	35
Figura 2.20 – Geometria da célula hexagonal. (a) Parede simples e (b) parede dupla. .....	35
Figura 2.21 – Diferentes definições de células do núcleo hexagonal.....	41
Figura 2.22 – Ensaios de núcleos sanduíche: (a) compressão e (b) cisalhamento (adaptado de DIN 53291 e DIN 53294, 1982).....	44
Figura 2.23 – Elemento de viga de dois nós com três graus de liberdade por nó.....	46
Figura 2.24 – Elemento plano de três nós com dois graus de liberdade por nó.....	47
Figura 3.1 – Modelo do conjunto fibra e matriz para tecido bidirecional.....	51
Figura 3.2 – Célula adotada para determinar $E1$ .....	53
Figura 3.3 – Modelo de viga para determinar $E1$ .....	53
Figura 3.4 – Modelo de viga para determinar $E2$ .....	54
Figura 3.5 – Célula adotada para determinar $G12$ .....	55
Figura 3.6 – Modelo de viga para determinar $G12$ .....	56
Figura 3.7 – Montagem dos ensaios: (a) compressão e (b) cisalhamento.....	65
Figura 3.8 – Tela do programa <i>Catman</i> mostrando um exemplo das curvas de força <i>versus</i> deslameento e deslocamento <i>versus</i> tempo. ....	65
Figura 3.9 – Modelo geométrico da célula da face. (a) Senoidal e (b) hexagonal.....	67

Figura 3.10 - Condições de contorno aplicadas à célula da face. ....	68
Figura 4.1 - <i>SCA Kraftliner</i> : espessura <i>versus</i> gramatura. ....	71
Figura 4.2 - <i>SCA Kraftliner</i> : módulo de Young <i>versus</i> gramatura.....	71
Figura 4.3 - <i>SCA Kraftliner</i> : módulo de cisalhamento <i>versus</i> gramatura.....	71
Figura 4.4 - <i>SCA Testliner 1</i> : espessura <i>versus</i> gramatura.....	72
Figura 4.5 - <i>SCA Testliner 1</i> : módulo de Young <i>versus</i> gramatura. ....	72
Figura 4.6 - <i>SCA Testliner 1</i> : módulo de cisalhamento <i>versus</i> gramatura. ....	72
Figura 4.7 - <i>SCA Testliner 3</i> : espessura <i>versus</i> gramatura.....	73
Figura 4.8 - <i>SCA Testliner 3</i> : módulo de Young <i>versus</i> gramatura. ....	73
Figura 4.9 - <i>SCA Testliner 3</i> : módulo de cisalhamento <i>versus</i> gramatura. ....	73
Figura 4.10 - <i>SCA Kraftliner</i> : diagrama polar do módulo de elasticidade. ....	75
Figura 4.11 - <i>SCA Kraftliner</i> : diagrama polar do módulo de cisalhamento.....	75
Figura 4.12 - <i>SCA Testliner 1</i> : diagrama polar do módulo de elasticidade.....	76
Figura 4.13 - <i>SCA Testliner 1</i> : diagrama polar do módulo de cisalhamento. ....	76
Figura 4.14 - <i>SCA Testliner 3</i> : diagrama polar do módulo de elasticidade.....	77
Figura 4.15 - <i>SCA Testliner 3</i> : diagrama polar do módulo de cisalhamento. ....	77
Figura 4.16 – Variação da espessura $t$ de não-tecidos em PP/FV com gramatura $g=400 \text{ g/m}^2$ para diferentes porcentagens de fibra em massa $\phi M_f$ e diferentes graus de consolidação $kCS$ .....	79
Figura 4.17 - Constantes elásticas de não-tecido PP/FV40 (adaptado de Stamp, 2011).....	80
Figura 4.18 – Deslocamentos nodais obtidos pelo algoritmo para placa hipotética. .	81
Figura 4.19 - Deslocamentos obtidos através do programa Hyperworks. ....	82
Figura 4.20 - Teste 2, carga $+q_1$ . (a) Malha de elementos finitos. (b) Célula.....	84
Figura 4.21 - Teste 2, carga $-q_1$ . (a) Malha de elementos finitos. (b) Célula.....	85
Figura 4.22 - Teste 2, carga $+q_2$ . a) Malha de elementos finitos. b) Célula.....	85

Figura 4.23 – Teste 2, carga $-q_2$ . a) Malha de elementos finitos. b) Célula. ....	85
Figura 4.24 – Diagrama polar do módulo de cisalhamento transversal do núcleo A~ em <i>Testliner</i> 3 com $90 \text{ g/m}^2$ e PVAc. ....	89
Figura 4.25 - Diagrama polar do módulo de cisalhamento transversal do núcleo A~ em <i>Testliner</i> 3 com $90 \text{ g/m}^2$ e silicato de sódio. ....	89
Figura 4.26 - Diagrama polar do módulo de cisalhamento transversal do núcleo A~ em <i>Testliner</i> 3 com $115 \text{ g/m}^2$ e PVAc. ....	89
Figura 4.27 - Diagrama polar do módulo de cisalhamento transversal do núcleo A~ em <i>Testliner</i> 3 com $115 \text{ g/m}^2$ e silicato de sódio. ....	90
Figura 4.28 - Diagrama polar do módulo de cisalhamento transversal do núcleo C~ em <i>Testliner</i> 3 com $115 \text{ g/m}^2$ e PVAc. ....	90
Figura 4.29 - Diagrama polar do módulo de cisalhamento transversal do núcleo C~ em <i>Testliner</i> 3 com $115 \text{ g/m}^2$ e silicato de sódio. ....	90
Figura 4.30 – Módulo de elasticidade transversal. Núcleo Tipo G~ em <i>Testliner</i> 3...	92
Figura 4.31 – Módulos de cisalhamento transversais. Núcleo Tipo G~ em <i>Testliner</i> 3. ....	92
Figura 4.32 – Módulo de elasticidade transversal. Núcleo Tipo F~ em <i>Testliner</i> 3. ...	93
Figura 4.33 – Módulos de cisalhamento transversais. Núcleo Tipo F~ em <i>Testliner</i> 3. ....	93
Figura 4.34 – Módulo de elasticidade transversal. Núcleo Tipo E~ em <i>Testliner</i> 3. ...	93
Figura 4.35 – Módulos de cisalhamento transversais. Núcleo Tipo E~ em <i>Testliner</i> 3. ....	94
Figura 4.36 – Módulo de elasticidade transversal. Núcleo Tipo D~ em <i>Testliner</i> 3...	94
Figura 4.37 – Módulos de cisalhamento transversais. Núcleo Tipo D~ em <i>Testliner</i> 3. ....	94
Figura 4.38 – Módulo de elasticidade transversal. Núcleo Tipo B~ em <i>Testliner</i> 3. ...	95
Figura 4.39 – Módulos de cisalhamento transversais. Núcleo Tipo B~ em <i>Testliner</i> 3. ....	95

Figura 4.40 – Módulo de elasticidade transversal. Núcleo Tipo C~ em <i>Testliner 3</i> ...	95
Figura 4.41 – Módulos de cisalhamento transversais. Núcleo Tipo C~ em <i>Testliner 3</i> . .....	96
Figura 4.42 – Módulo de elasticidade transversal. Núcleo Tipo A~ em <i>Testliner 3</i> ...	96
Figura 4.43 – Módulos de cisalhamento transversais. Núcleo Tipo A~ em <i>Testliner 3</i> . .....	96
Figura 4.44 – Módulo de elasticidade transversal. Núcleo Tipo K~ em <i>Testliner 3</i> ...	97
Figura 4.45 – Módulos de cisalhamento transversais. Núcleo Tipo K~ em <i>Testliner 3</i> . .....	97
Figura 4.46 – Análise por elementos finitos de uma célula senoidal sob carga – $q_2$ .	99
Figura A.1 - Representação do estado plano de deformações em um elemento....	111
Figura A.2 – Características dos elementos da matriz de flexibilidade. ....	114
Figura A.3 – Relação entre sistema local e global. ....	116
Figura A.4 – Tensões nos sistemas 102 e xOy, usado para obter $[T]$ .....	117
Figura A.5 – Vetores de deformação em um cubo infinitesimal. ....	121
Figura B.1 – Modelo unidimensional do conjunto fibra-matriz. ....	124
Figura B.2 – Modelos transversais do conjunto fibra-matriz. (a) 2D e (b) 1D.....	125
Figura B.3 – Modelo tridimensional do conjunto fibra-matriz para determinar $\nu_{12}$ ...	126
Figura C.1 – Planilha <b>Geo</b> .....	128
Figura C.2 – Planilha <b>Mesh</b> .....	129
Figura C.3 – Planilha <b>Mat</b> .....	130
Figura C.4 - Planilha <b>Load Step</b> . ....	130
Figura C.5 - Planilha <b>Solver</b> .....	132
Figura C.6 - Planilha <b>List Results</b> . ....	132
Figura C.7 - Planilha <b>Graphic Results</b> . ....	133

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Tipos de células senoidais (adaptado de DIN 55468, 2004). .....	28
Tabela 3.1 – Características dos núcleos em <i>Testliner</i> experimentados. ....	64
Tabela 4.1 - Variáveis para os testes da rotina de elementos finitos. ....	82
Tabela 4.2 - Comparação entre os modelos numérico e analítico. ....	83
Tabela 4.3 – Coeficientes de Poisson transversais para célula de parede simples. .	86
Tabela 4.4 – Coeficientes de Poisson transversais para célula de parede dupla.....	86
Tabela 4.5 - Resultados dos ensaios do núcleo em <i>Testliner 3</i> . ....	87
Tabela 4.6 – Dimensões adotadas para análise das células senoidais. ....	91
Tabela 4.7 - Resultados dos ensaios do núcleo em <i>Testliner 3</i> . ....	98

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABS	Acrilonitrila butadieno estireno
a-PP	Polipropileno atático
ASTM	<i>American Society for Testing and Materials</i>
BMW	<i>Bayerische Motoren Werke</i>
CD	<i>Cross Direction</i>
DIN	<i>Deutsches Institut für Normung</i>
ECO	<i>European Containerboard Organization</i>
EPS	Poliestireno expansível
ETP	Termoplástico de engenharia
FV	Fibra de vidro
GMT	<i>Glass Mat Reinforced Thermoplastic Process</i>
HBM	<i>Hottinger Baldwin Messtechnik</i>
HM	Alto modulo
HPP	Polipropileno homopolímero
i-PP	Polipropileno isotático
IUPAC	<i>International Union of Pure and Applied Chemistry</i>
MD	<i>Machine Direction</i>
PA	Poliamida
PC	Policarbonato
PE	Polietileno
PE-HD	Polietileno de alta densidade
PE-LD	Polietileno de baixa densidade
PE-LLD	Polietileno de baixa densidade linear
PEMRG	<i>PlasticsEurope's Market Research and Statistics Group</i>
PET	Politereftalato de etileno
PMMA	Polimetil-metacrilato
PP	Polipropileno
PS	Poliestireno

PUR	Poliuretano
PVAc	Acetato de polivinila
PVC	Policloreto de vinila
SAN	Estireno acrilonitrila
SCA	<i>Svenska Cellulosa Aktiebolaget</i>
s-PP	Polipropileno sindiotático
VBA	<i>Visual Basic Application</i>
VW	<i>Volkswagen</i>
WCO	<i>World Containerboard Organisation</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Letras latinas

$A$	Área
$a$	Ponto localizado na extremidade de um segmento de reta que representa uma viga
$a^*$	Constante de material – Modelo de Sell's Jonas
$A\sim$	Nomenclatura da célula do núcleo senoidal de tamanho A
$a_n$	Parâmetro numérico para cálculo de módulo de cisalhamento
$b$	Ponto localizado na extremidade de um segmento de reta que representa uma viga
$b^*$	Parâmetro geométrico para cálculo de módulo de cisalhamento
$[B]$	Matriz de relação entre deformações e deslocamentos
$B\sim$	Nomenclatura da célula do núcleo senoidal de tamanho B
$c_i$	Diâmetro da circunferência inscrita em um hexágono regular
$c$	Cosseno de um ângulo
$C\sim$	Nomenclatura da célula do núcleo senoidal de tamanho C
$C_0$	Constante que define o tipo de propriedade específica
$CD$	<i>Cross Direction</i> , direção transversal de laminação do papel celulose
$C_g$	Fator geométrico do núcleo hexagonal para cálculo das propriedades elásticas equivalentes
$d$	Espessura do núcleo de estrutura sanduiche
$D$	Deslocamento medido no ensaio de caracterização do núcleo
$D\sim$	Nomenclatura da célula do núcleo senoidal de tamanho D
$E$	Módulo de elasticidade
$E_\theta$	Módulo de elasticidade de um material ortotrópico no plano 102 avaliado à $\theta$ graus em relação à direção 1
$E_e$	Módulo de elasticidade de um elemento finito
$E_m$	Módulo de elasticidade do material da matriz de material composto
$E_f$	Módulo de elasticidade do material da fibra de reforço de material composto
$E_{MD}$	Módulo de elasticidade do papel na direção MD
$E_{CD}$	Módulo de elasticidade do papel na direção CD

$E_{\sim}$	Nomenclatura da célula do núcleo senoidal de tamanho E
$E_s$	Módulo de elasticidade do material das paredes do núcleo da estrutura sanduíche
$F$	Força
$f$	Força nodal
$F_{\sim}$	Nomenclatura da célula do núcleo senoidal de tamanho F
$F_{12}$	Variável utilizada para o cálculo do módulo de cisalhamento longitudinal equivalente de núcleo hexagonal de parede espessa
$g$	Gramatura
$G$	Módulo de cisalhamento
$G_{\theta}$	Módulo de cisalhamento de um material ortotrópico no plano 102 avaliado a $\theta$ graus em relação à direção 1
$G_f$	Módulo de cisalhamento do material da fibra de reforço de material composto
$G_m$	Módulo de cisalhamento do material da matriz de material composto
$G_{MDCD}$	Módulo de cisalhamento do papel na direção MDCD
$G_{\sim}$	Nomenclatura da célula do núcleo senoidal de tamanho G
$G_s$	Módulo de cisalhamento do material da parede das células do núcleo de estrutura sanduíche
$h$	Comprimento da parede vertical de célula hexagonal
$h^*$	Constante de material – Modelo de Sell's Jonas
$H$	Amplitude da função seno que representa células senoidais
$H_m$	Variável utilizada em Chen <i>et al.</i> (2009)
$i$	Contador inteiro
$I_e$	Momento de inércia de um elemento finito
$j$	Contador inteiro
$[J]$	Matriz Jacobiana
$[K_e]$	Matriz de rigidez de elementos finitos
$K$	Constante de material – Modelo de Sell's Jonas
$k$	Coefficiente de proporcionalidade do método de Grediac
$ka_e$	Coefficiente de rigidez de elemento finito de viga
$kb_e$	Coefficiente de rigidez de elemento finito de viga
$kc_e$	Coefficiente de rigidez de elemento finito de viga

$k_{de}$	Coeficiente de rigidez de elemento finito de viga
$K_{\sim}$	Nomenclatura da célula do núcleo senoidal de tamanho K
$k_{CS}$	Coeficiente de consolidação de um não-tecido
$k_m$	Parâmetro numérico utilizado em Chen <i>et al.</i> , 2009
$K_s$	Propriedade elástica equivalente genérica do núcleo da estrutura sanduíche
$[\bar{K}]$	Matriz de rigidez
$l$	Dimensão da parede inclinada de célula hexagonal
$L$	Comprimento
$L^*$	Comprimento
$L_e$	Comprimento de um elemento finito de viga
$L_s$	Comprimento da curva seno
$L_1$	Dimensão lateral de uma placa paralela à direção 1
$L_2$	Dimensão lateral de uma placa paralela à direção 2
$M$	Momento fletor
MD	<i>Machine Direction</i> , direção de laminação do papel celulose
$m$	Constante de convergência, método descrito em Chen <i>et al.</i> (2009)
$m^*$	Constante de material – Modelo de Sell's Jonas
$n$	Contador inteiro
$nN$	Número total de graus de liberdade de um problema de elementos finitos
$p$	Indicação de um dado estado plano de deformações
$P$	Passo da função seno que representa células senoidais
PA	Relação entre o tamanho da matriz de rigidez semi-banda e completa
$[Q]$	Matriz de rigidez do material no sistema local 1O2O3
$[\bar{Q}]$	Matriz de rigidez do material no sistema global xOyOz
$q$	Força por unidade de comprimento
$[R]$	Matriz de transformação de deformações
$r$	Dimensão específica da célula hexagonal
RI	Índice de identificação de região específica de uma célula
RII	Índice de identificação de região específica de uma célula

$s$	Seno de $\theta$
$s^*$	Desvio padrão
$[S]$	Matriz de flexibilidade
$[T]$	Matriz de transformação de coordenadas
$t$	Espessura da parede da célula de sólidos celulares
$T$	Tempo
$t_{min}$	Espessura de consolidação máxima de um não-tecido
$U$	Energia de deformação
$u$	Deslocamento
$u_e$	Espessura de consolidação máxima de um não-tecido
$W$	Trabalho
$W^*$	Constante de material – Modelo de Sell's Jonas
$x$	Coordenada cartesiana
$y$	Coordenada cartesiana
$ZD$	<i>Z Direction</i> . Utilizado para definir a direção transversal ao plano da lâmina de papel celulose.
$z$	Coordenada cartesiana

#### Letras gregas

$\alpha$	Ângulo da parede inclinada de célula hexagonal
$\Delta$	Constante dependente exclusivamente de coeficientes de Poisson
$\delta$	Deslocamento vertical de viga sob flexão
$\varepsilon$	Deformação
$\dot{\varepsilon}$	Velocidade de deformação
$\gamma$	Ângulo de deformação
$\eta$	Viscosidade absoluta
$\varphi$	Porcentagem de fibra em volume presente em um laminado
$\varphi_{AR}$	Porcentagem de ar em volume de um material composto
$\varphi_{Mf}$	Porcentagem de fibra de reforço em massa de material composto
$\lambda$	Parâmetro numérico

$\nu$	Coeficiente de Poisson
$\nu_m$	Coeficiente de Poisson do material da matriz de material composto
$\nu_{MDCD}$	Coeficiente de Poisson equivalente do núcleo de estrutura sanduíche
$\nu_s$	Coeficiente de Poisson do material da parede das células do núcleo de estrutura sanduíche
$\theta$	Ângulo de rotação entre sistemas
$\rho_f$	Densidade da fibra de reforço em um material composto
$\rho_m$	Densidade da matriz em um material composto
$\sigma$	Tensão normal
$\tau$	Tensão cisalhante

# 1 INTRODUÇÃO

Esse capítulo apresenta uma definição de estruturas sanduíche e de relações constitutivas. Essas definições são focadas na estrutura estudada, bem como, nas relações elásticas utilizadas neste trabalho. Além disso, são apresentados: motivação, objetivo, foco, metodologia e organização do texto.

## 1.1. Algumas definições

### 1.1.1. Relações constitutivas

Relações constitutivas são razões entre duas grandezas físicas, as quais resultam em propriedades físicas de materiais ou substâncias. Elas podem ser expressas de forma matemática, bem como capazes de constituir leis físicas. As expressões ou leis têm a finalidade de determinar uma grandeza física através de outra, de posse da propriedade do material ou substância. Por exemplo, a primeira lei de Ohm relaciona a diferença de potencial elétrico com a intensidade de corrente elétrica em materiais condutores e resulta na capacidade de oposição à corrente elétrica dos mesmos. Ou ainda, em processos de difusão no estado estacionário, a primeira lei de Fick relaciona o fluxo de difusão com o gradiente de concentração de substâncias. Essa resulta na capacidade de difusão da substância analisada. No campo da mecânica dos sólidos homogêneos linearmente elásticos, a lei de Hooke, que relaciona a tensão com a deformação, é uma equação constitutiva. A lei de Hooke generalizada, que relaciona todas as tensões com as deformações em um ponto de um sólido, pode ser escrita em notação indicial como

$$\sigma_{ij} = Q_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad 1.1$$

onde  $Q_{ijkl}$  são constantes que representam as propriedades elásticas do material,  $\sigma_{ij}$  são as tensões e  $\varepsilon_{kl}$  as deformações no ponto.

### 1.1.2. Estruturas sanduíche

Estrutura sanduíche é um composto de duas regiões com propriedades físicas e/ou químicas diferentes, tal que uma delas, a face, envolve a outra, o núcleo. Além de utilizadas na engenharia também estão presentes na natureza e em geral

apresentam bons atributos térmicos, estruturais, acústicos e visuais. O fêmur (Figura 1.1(a)) é um exemplo, onde o núcleo em osso trabecular possui boa resistência ao impacto e a face em osso cortical que, além de oferecer boa rigidez à flexão ao conjunto, também acomoda vasos sanguíneos (GUAGNELI, 2008). Outro exemplo é o interior do veículo *Smart Forvision* (Figura 1.1(b)), apresentado no 64º edição do salão do automóvel de Frankfurt (IAA-2011, *Internationale Automobil Ausstellung*). O teto possui faces em policarbonato que permitem entrada de luz solar e núcleo que pode acomodar a tubulação do sistema de condicionamento de ar superior (DAIMLER AG, 2008). Os bancos de baixo peso têm faces em poliamida e núcleo em poliuretano expandido (SMART FORVISION, 2011).

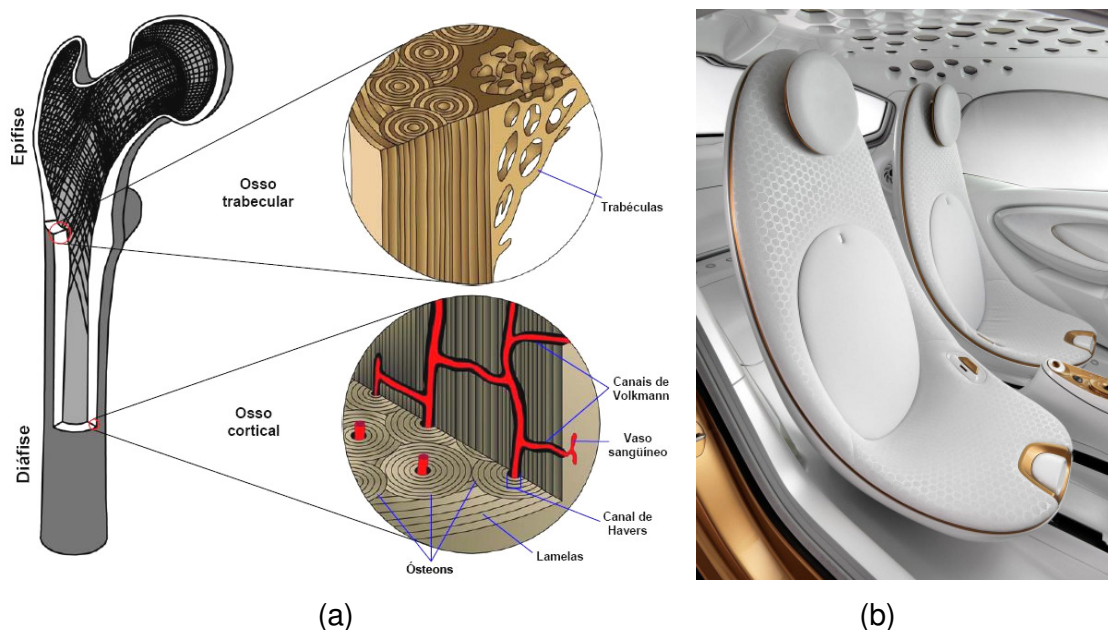


Figura 1.1 – Exemplos de estruturas sanduíche: (a) fêmur (GUAGNELI, 2008) e (b) interior do *Smart Forvision* (SMART FORVISION, 2011).

Quanto ao aspecto estrutural, em geral, o núcleo proporciona boa absorção de energia de impacto e as faces boa resistência e rigidez à tração e compressão sob carregamento de flexão. A espessura do núcleo deve possibilitar adequado espaçamento entre as faces a fim de proporcionar elevado momento de inércia para a estrutura. Além disso, em geral, o núcleo deve, sobretudo, oferecer adequada resistência e rigidez à compressão e cisalhamento no sentido transversal ao plano das faces.

As estruturas sanduíche usadas em engenharia podem ser compostas de diversos materiais, tais como: metais, plásticos, compostos laminados, papéis, entre outros. Também a geometria do núcleo pode apresentar diferentes configurações, formalmente composta da repetição de uma geometria básica, denominada célula. Por esta razão, também são denominadas sólidos celulares. A Figura 1.2 mostra algumas variações de núcleo com diferentes materiais e diferentes geometrias de células.

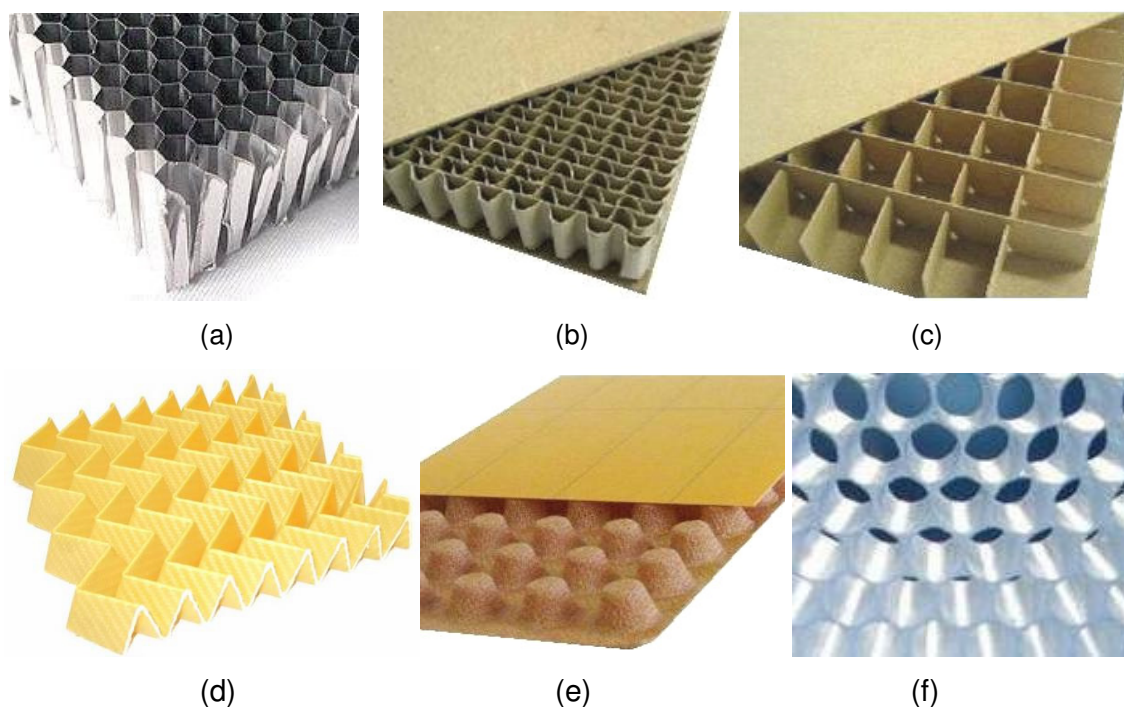


Figura 1.2 – Exemplos de núcleos: (a) Hexagonal em alumínio, (b) e (c) Senoidal e Quadrado em papel celulose, (d) *Faltwabe* e (e) *Nap core* em epóxi-aramida e (f) Tubular em polipropileno (STAMP, 2011).

## 1.2. Motivação do trabalho e aplicação do tema

### 1.2.1. Indústria automotiva como exemplo de aplicação

A utilização de materiais leves na indústria automotiva é uma tendência decorrente de dois principais fatores: as novas leis governamentais relacionadas com o limite de emissão de CO<sub>2</sub> e a presença crescente de veículos elétricos no mercado. A estrutura sanduíche de núcleo em papel celulose e faces em material composto termoplástico é um exemplo de material leve aplicável à área automotiva.

Atualmente as empresas fabricantes de veículos das marcas Mercedes Benz, BMW, Audi e VW avaliam a aplicabilidade de estruturas sanduíche com núcleos celulares senoidais em papel celulose e faces em compostos termoplásticos. Esse tipo de estrutura é utilizado na fabricação de componentes do interior do veículo com geometria quase plana, como a tampa e o assoalho do bagageiro. A Figura 1.3 traz exemplos de protótipos em núcleo tubular em polipropileno e senoidal em papel.

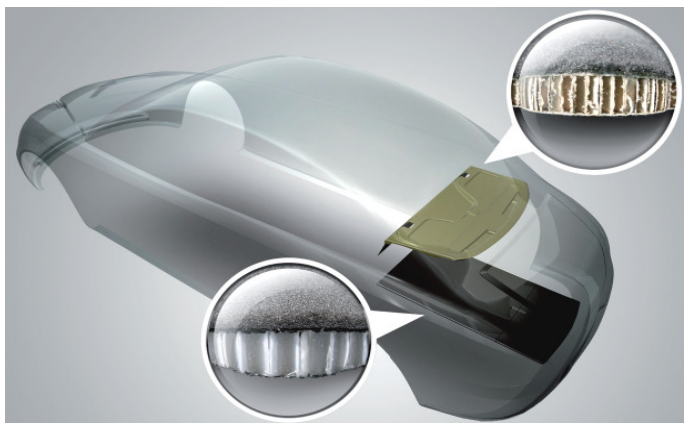


Figura 1.3 – Protótipos da tampa e do assoalho do bagageiro em núcleo senoidal em papel celulose e tubular em polipropileno respectivamente (CAPRIOLI, 2008).

As estruturas sanduíche com núcleo em papel celulose e faces em polipropileno reforçado com fibras de vidro são um exemplo de uso viável. São vários os motivos que fazem dessa estrutura com esses materiais específicos uma opção de projeto, tais como: baixo custo, baixa massa, alta rigidez, elevada absorção de energia de impacto, bem como processo de fabricação contínuo. Quanto à avaliação técnica independente do custo, uma das características mais importantes na análise inicial de viabilidade de componentes do interior do veículo, como os exemplos da Figura 1.3, é a rigidez à flexão. Um dos fatores que pode inviabilizar a avaliação da rigidez do componente durante a fase de projeto é o desconhecimento das propriedades constitutivas da face e do núcleo. Isso pode reprovar um protótipo, tendo em vista que a avaliação/simulação estrutural no ramo automotivo é indispensável durante o processo de desenvolvimento de produto, e, atualmente, têm-se ainda poucas publicações de estudos realizados para a caracterização desses materiais.

### 1.2.2. Requisitos de material na simulação numérica de estruturas sanduíche

É possível realizar o cálculo da rigidez à flexão de estruturas sanduíche com núcleo celular através de diferentes tipos de modelos de elementos finitos. Entre eles, existem dois tipos largamente utilizados. O mais refinado é constituído de elementos de casca para representar tanto as paredes do núcleo como as faces, enquanto o outro possui elementos sólidos para o núcleo e elementos de casca para as faces. O segundo modelo é uma aproximação do primeiro, pois considera propriedades equivalentes para modelar o núcleo. Mesmo assim, traz bons resultados quando comparado com o primeiro e a vantagem de apresentar baixo custo computacional. Neste segundo modelo, as propriedades constitutivas equivalentes da face e do núcleo são dados de entrada do modelo numérico e necessitam ser conhecidas. A determinação dessas propriedades é o principal objetivo deste trabalho, como detalhado na Seção 1.3.

### 1.3. Objetivos e foco do trabalho

O objetivo principal do presente trabalho é apresentar e aplicar métodos analíticos, numéricos e experimentais para determinar as propriedades elásticas equivalentes das faces e do núcleo de uma estrutura sanduíche.

As propriedades elásticas analisadas são os módulos de elasticidade longitudinal e de cisalhamento, e o coeficiente de Poisson equivalente das faces e do núcleo, separadamente.

As faces são feitas em não-tecido agulhado, ou *needled nonwoven* em inglês, composto por matriz em polipropileno homopolímero isotático, reforçada por fibras de vidro tipo E. Os núcleos são feitos em papel celulose do tipo *Testliner* ou *Kraftliner*, com células do tipo hexagonal e senoidal.

### 1.4. Metodologia

Com base na revisão bibliográfica, principalmente em relação aos materiais e aos processos de fabricação presentes nas estruturas sanduíche estudada, decidiu-se modelar a face como uma lâmina e o núcleo como uma estrutura tridimensional, ambos de material elástico linear ortotrópico. Para isso foi adotado o sistema de coordenadas ilustrado na Figura 1.4.

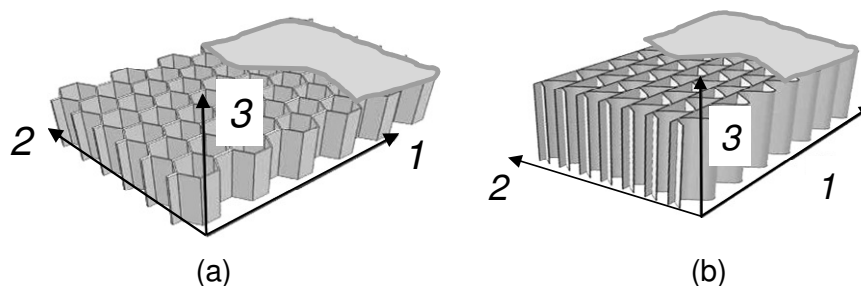


Figura 1.4 – Sistema de coordenadas adotado para modelar a estrutura sanduiche.  
(a) Hexagonal e (b) Senoidal.

A partir destas hipóteses, do sistema de coordenadas adotado e da lei de Hooke generalizada expressa pela Equação 1.1, tem-se que as matrizes de rigidez dos materiais das faces e do núcleo podem ser escritas em função de determinadas propriedades elásticas equivalentes, tal que

$$Q_{ijkl}|_{face} = f(E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}) \quad 1.2$$

e

$$Q_{ijkl}|_{nucleo} = f(E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{13}, G_{23}, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}) \quad 1.3$$

As Equações 1.2 e 1.3 são obtidas no Apêndice A, seções A.1 e A2 respectivamente. As propriedades escritas no plano 12, foram chamadas de longitudinais. Propriedades transversais são aquelas escritas nos planos 13 ou 23.

Foram adotados diferentes métodos para determinar cada propriedade equivalentes, como mostra o quadro da Figura 1.5. Em alguns caso, foram utilizados mais do que um método, e os resultados comparados.

As propriedades da face foram obtidas a partir de um código de elementos finitos planos escrito no programa VBA (*Visual Basic Application*). As propriedades longitudinais do núcleo, são elas:  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$  e  $\nu_{12}$ ; foram determinadas através de um código de elementos finitos de viga escrito em VBA, bem como, de equações analíticas obtidas a partir da teoria de viga de Euler-Bernoulli. As propriedades transversais  $E_3$ ,  $G_{13}$  e  $G_{23}$ , referentes aos núcleos senoidais foram obtidas através de ensaios experimentais. Tanto para os núcleos senoidais quanto para os núcleos hexagonais, tais propriedades, bem como os coeficientes de Poisson  $\nu_{13}$  e  $\nu_{23}$ , também foram determinadas através de equações analíticas deduzidas com base em métodos energéticos e conceitos da teoria de elasticidade.

<b>Região</b>	<b>Propriedade</b>	<b>Método</b>	
<b>Núcleo</b>	<b>Transversais</b> (Planos 13 e 23)	$E_3, G_{13}, G_{23}$	<b>Experimental</b> (apenas núcleos senoidais)
		$G_{13}, G_{23}$	<b>Analíticos</b> Métodos energéticos
		$E_3, \nu_{13}, \nu_{23}$	
	<b>Longitudinais</b> (Plano 12)	$E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}$	Teoria da elasticidade
		$E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}$	<b>Numéricos</b> MEF Viga
<b>Faces</b>	$E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}$	MEF Planos	

Figura 1.5 – Metodologias utilizadas para determinação das propriedades elásticas.

### 1.5. Organização do texto

O texto possui cinco capítulos: introdução, revisão bibliográfica, desenvolvimento, resultados e conclusões. A introdução traz o contexto no qual o trabalho está inserido e os fatores que motivaram a realização do mesmo, bem como estabelece o foco e expõe algumas definições sobre o tema. A revisão bibliográfica apresenta os materiais e os processos de fabricação referentes à estrutura de interesse, métodos para obtenção de propriedades elásticas de estruturas sanduíche, propriedades constitutivas para diferentes modelos de materiais elásticos e formulações de elementos finitos utilizados durante o desenvolvimento do trabalho. O capítulo de desenvolvimento mostra os métodos sugeridos para obtenção das propriedades elásticas das estruturas de interesse e como foram utilizados. O penúltimo capítulo traz os resultados obtidos através da aplicação dos métodos propostos e discute as características dos mesmos. O último capítulo traz as conclusões do trabalho, suas implicações e sugestões para trabalhos futuros.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1. Papel celulose

#### 2.1.1. Algumas definições

##### 2.1.1.1. Celulose

A celulose  $(C_6H_{10}O_5)_n$  é um polímero natural (polissacarídeo) semicristalino formado pela glicose  $(C_6H_{12}O_6)$ , um monômero natural (monossacarídeo) (FIDALE, 2010). O conjunto de cadeias de moléculas de celulose forma a microfibrila e o conjunto de microfibrilas forma a fibra de celulose, a qual é o principal constituinte das paredes das células das madeiras (GRUBER, 2011).

##### 2.1.1.2. Polpa

Além da fibra de celulose, a madeira é constituída por elementos como: hemicelulose, lignina, óleos, gorduras, minerais, parênquimas, entre outros. As fibras de celulose são envoltas pela hemicelulose, as quais são envoltas pela lignina. Mediante reações químicas, processos mecânicos e aquecimento, as fibras podem ser parcialmente separadas desses elementos. A massa fibrosa resultante é denominada polpa de celulose. A polpa contém essencialmente as fibras e em menor quantidade os finos e os elementos de vasos capilares da madeira, assim como resíduos de hemicelulose, lignina e outros. Os finos são compostos de parênquimas e fragmentos de fibras de celulose (FOELKEL, 2007). A Figura 2.1 (a) mostra a estrutura superficial da polpa de celulose de *Pinus radiata*. Uma fibra de celulose de *Pinus* em geral tem diâmetro externo de aproximadamente  $30 \mu m$  (GRUBER, 2011). A imagem mostra basicamente a superfície de algumas fibras formadas pelas microfibrilas (CARRASCO, 2010). Em maior escala, a Figura 2.1 (b) mostra uma polpa de celulose de madeira de eucalipto, onde é possível observar as fibras, fragmentos de fibras e um elemento de vaso no centro da figura (FOELKEL, 2007).

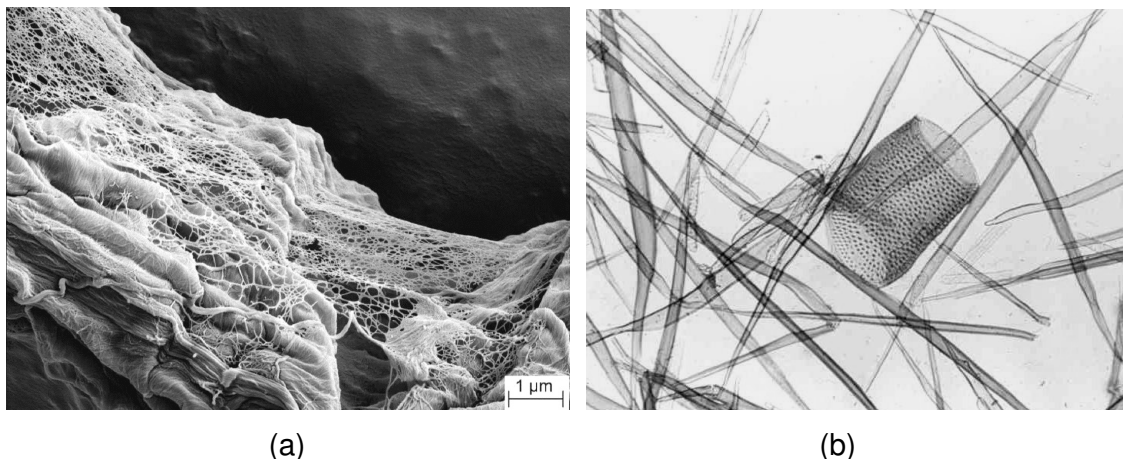


Figura 2.1 – Micrografias de polpas de madeiras obtidas em microscópio eletrônico: (a) *pinus radiata* (CARRASCO, 2010) e (b) eucalipto (FOELKEL, 2007).

### 2.1.1.3. Papel

Uma lâmina de papel é obtida através da drenagem, secagem e compressão da polpa de celulose (DIN 6730, 2011). O processo de obtenção da polpa ou polpação mais utilizado no mundo é o *Kraft*. Este funciona através de reações químicas com as espécies reativas  $\text{OH}^-$ ,  $\text{S}^{2-}$  e  $\text{HS}^-$ , em torno de  $165^\circ\text{C}$  (FOELKEL, 2007). Dois tipos de papel obtidos por esse processo são o *Kraftliner* e o *Testliner*. O primeiro é proveniente essencialmente de polpa de origem primária e o segundo completamente reciclado. Esses tipos de papel possuem propriedades mecânicas similares o bastante para serem geralmente usados nas mesmas aplicações, como capas de papéis corrugados para embalagens (SCA, 2011). Também são esses os papéis geralmente utilizados na fabricação de núcleos de estruturas sanduíche para a indústria automotiva. Segundo as associações *European Containerboard Organization* (ECO) e *European Association of Makers of Corrugated Base Papers* (*Ondulé Groupement*), o *Testliner* é classificado por classes 1, 2 ou 3, do melhor para o pior papel (WCO, 2011). Essas são determinadas com base na resistência ao arrebentamento e à compressão no sentido transversal de laminação. A resistência ao arrebentamento ou estouro é definida como a pressão máxima suportada por uma lâmina de papel, transmitida por um diafragma elástico de área circular e aplicada uniformemente crescente (BEUTH VERLAG GMBH DIN 53141, 1979).

No Brasil, a maioria dos papéis são fabricados a partir de polpas de madeira de eucalipto ou pinus. No mundo, existem aproximadamente setecentas espécies de

eucalipto e mais de cem espécies de pinus. Além disso, grandes fabricantes utilizam árvores de plantação própria. Na maioria dos casos, o *Kraftliner* e o *Testliner* são fabricados a partir da celulose da madeira de pinus (GRUBER, 2011).

Existem outros tipos de papéis utilizados na fabricação de núcleo de estruturas sanduíche. Um exemplo é o material usado como sacos de papel de polpa *Kraft*, denominado como *Sack Paper*, o qual possui em geral no mínimo 80% de polpa virgem. Outro exemplo é o papel utilizado como núcleo de papel corrugado, denominado como *Fluting*, o qual é 100% reciclado de polpas mistas. Ambos são papéis para uso como embalagens (STAMP, 2011).

## 2.1.2. Microestrutura

### 2.1.2.1. Heterogeneidade

As Figuras 2.2 (a) e (b) mostram, respectivamente, imagens microscópicas da superfície e do plano transversal à uma folha de papel de celulose de *Pinus taeda* (FOELKEL, 2007). Uma folha de papel possui fibras de celulose sobrepostas, entrelaçadas e espaçadas entre si. As fibras são porosas e ocas, como tubos de parede esponjosa, o que se vê na Figura 2.3 (CARRASCO, 2010).

Durante o processo de laminação é possível que uma face da lâmina sofra maior pressão de contato com o rolo de laminação que a outra (GRUBER, 2011). Por isso, a compactação e a conseqüente homogeneidade do conjunto de fibras varia ao longo da espessura.

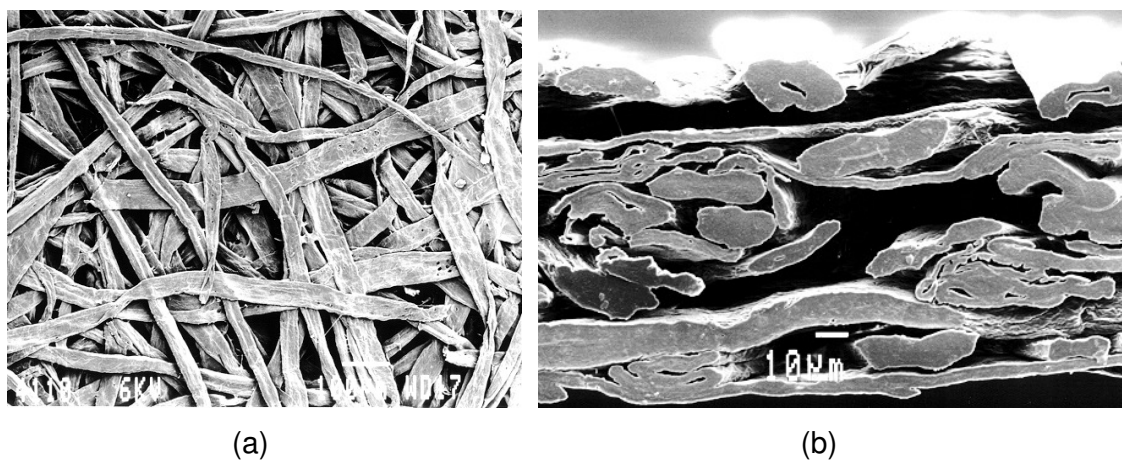


Figura 2.2 – Micrografias de papéis de madeira *Pinus taeda* nas vistas: (a) superficial e (b) transversal (FOELKEL, 2007).

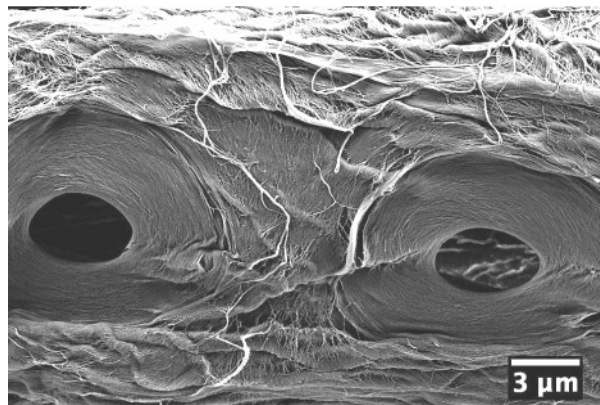


Figura 2.3 - Microscopia superficial de polpa de *Pinus radiata* (CARRASCO, 2010).

### 2.1.2.2. Geometria das fibras

As propriedades mecânicas do papel dependem dos elementos constituintes da polpa. No entanto, o mecanismo de resistência e rigidez do papel depende essencialmente das características das fibras e suas ligações. Essas características são função da geometria, composição química e quantidade de fibras.

Uma fibra pode ser representada por um tubo poroso, portanto são parâmetros geométricos: comprimento, diâmetro externo, espessura da parede e porosidade. A partir desses parâmetros são determinadas algumas propriedades, como: *coarseness*, coeficiente de Peteri, índice de Runkel e coeficiente de rigidez.

A porosidade pode ser avaliada através da massa por comprimento ou densidade linear, propriedade denominada *coarseness*. O coeficiente de Peteri ou índice de esbeltez é dado pela razão entre o diâmetro externo e o comprimento. O índice de Runkel é escrito como o dobro da razão entre a espessura da parede e o diâmetro do lúmen. O coeficiente de rigidez é o dobro da razão entre a espessura da parede e o diâmetro externo (ESPINOSA *et al.*, 2004).

Como exemplo, a fibra de pinus possui aproximadamente 3 mm de comprimento, 30 µm de diâmetro externo, 8 µm de espessura de parede e 200 a 300 µg/m de *coarseness* (GRUBER, 2011).

### 2.1.2.3. Composição química das fibras

As principais características de composição química das fibras são: porcentagem de celulose e de outros elementos restantes do processo de polpação, grau de polimerização da celulose, tipo e disposição da hemicelulose. Dentre as propriedades influenciadas por essas características está o comportamento

mecânico e a facilidade de branqueamento. O aumento da porcentagem e do grau de polimerização da celulose aumenta a rigidez e resistência mecânica do papel. A facilidade de branqueamento diminui essencialmente na presença de lignina, a qual é avaliada de acordo com o número Kappa, medido através da oxidação da lignina na aplicação de permanganato de potássio ( $\text{KMnO}_4$ ) na polpa de papel (método T 236 (TAPPI, 2006)). A lignina presente no papel oxida em contato com o ar e adquire coloração amarelada. Além disso, a lignina diminui a resistência à tração, ao estouro e ao rasgo, porém aumenta a viscosidade do papel (ROSA, 2003). A composição química aproximada de papéis branqueados em geral é de 80 a 95% de celulose, 10 a 15% de hemicelulose e menos de 1% de resinas, óleos e lignina. O *Kraftliner* e o *Testliner* possuem maior teor de lignina pois em geral não são branqueados (GRUBER, 2011).

#### **2.1.2.4. Ligações entre as fibras**

As ligações entre as fibras ocorrem de forma química (ligações de hidrogênio) ou mecânica (GRUBER, 2011). A elevada quantidade de ligações causa diminuição da maciez e aumento da aspereza superficial da lâmina de papel, porém aumentam tanto a rigidez quanto a resistência mecânica da mesma.

A área e o número de regiões de contato superficial entre as fibras favorecem a formação de ligações de hidrogênio. Essas áreas aumentam com a capacidade de conformação e com o diâmetro externo das fibras. Se as fibras são longas ou a quantidade por volume de polpa é alta, então a probabilidade do surgimento de regiões de contato é grande. O número de ligações é maior na presença de hemicelulose, fragmentos de fibra de celulose, células de parênquima e elementos de vasos (GRUBER, 2011; FOELKEL, 2007).

Durante o processo de compactação das fibras, a porosidade e o diâmetro externo médio diminuem com a compressão radial. Se as paredes colapsam, as ligações de hidrogênio na superfície interna da fibra são favorecidas (FOELKEL, 2007).

#### **2.1.2.5. Anisotropia**

Tanto a polpa de celulose quanto o feltro de fibras obtido após a drenagem e secagem da polpa possuem fibras com orientação aleatória. No entanto, as fibras tendem a adotar parcialmente a direção de laminação durante a formação da lâmina,

a qual, por este motivo, é geralmente considerada ortotrópica. A direção de laminação é denominada como MD, *Machine Direction*, sua perpendicular, no plano da lâmina, como CD, *Cross Direction*, e a direção perpendicular ao plano da lâmina como ZD, *Z Direction*, (DIN 6730, 2011).

#### 2.1.2.6. Higroscopia e Higrotermia

As propriedades físicas de uma folha de papel celulose dependem da temperatura e da umidade do ambiente. Essa dependência é inerente à sua microestrutura, principalmente pela morfologia porosa e o consequente efeito de capilaridade da fibra de celulose (higroscopia). Além disso, para diferentes níveis de umidade acumulada, o papel possui diferentes propriedades térmicas (higrotermia). Esses efeitos são mais evidentes em papéis de elevada heterogeneidade, com alto teor de hemicelulose ou com fibras de lúmen relativamente grande (GRUBER, 2011).

#### 2.1.2.7. Viscoelasticidade

Materiais formados por cadeias poliméricas como o papel celulose possuem a capacidade de armazenar e dissipar energia mecânica quando carregados, num efeito simultâneo de elasticidade e viscosidade. Esse comportamento é função da resposta da microestrutura durante o processo de deformação, explicado essencialmente pelo rearranjo molecular. Tal reorganização ocorre devido à tendência de minimização da entalpia causada pela alteração das ligações de hidrogênio nas regiões amorfas do polímero onde a instabilidade atômica é maior (NISSAN e STERNSTEIN, 1962).

Existem atualmente vários modelos teóricos e empíricos que descrevem a relação de tensão com deformação considerando o efeito de viscoelasticidade aplicáveis aos diferentes tipos de papéis celulose. O modelo reológico de Maxwell é um dos mais simples aplicados aos polímeros (KEUERLEBER, 2006). No sistema unidirecional tal modelo relaciona a tensão  $\sigma$  com a velocidade de deformação  $\dot{\epsilon}$  num tempo  $t$  através da ligação em série de uma mola de Hooke de rigidez  $E$  e um pistão de Newton de viscosidade absoluta  $\eta$ , tal que

$$\sigma = \dot{\epsilon}\eta \left( 1 - e^{-\frac{tE}{\eta}} \right). \quad 2.1$$

O modelo de Maxwell generalizado é mais preciso, porém tem como variáveis uma série de módulos elásticos e coeficientes viscosos (vide Figura 2.4).

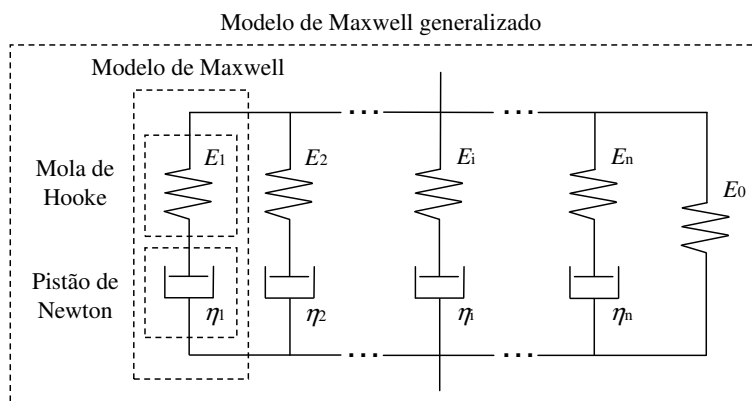


Figura 2.4 - Modelo de Maxwell generalizado (adaptado de Keuerleber, 2006).

### 2.1.3. Algumas propriedades físicas normalizadas

O sistema de normas DIN EN ISO é um dos mais utilizados para definir e medir as propriedades físicas dos papéis celulose. A gramatura, a espessura e a rigidez à tração são propriedades usadas para obter as constantes elásticas do papel.

#### 2.1.3.1. Gramatura

A gramatura é uma propriedade física que classifica o papel comercialmente e geralmente serve de parâmetro de análise de outras propriedades. Pode ser designada por  $g$ , dado em  $g/m^2$ . Um método de medição é mostrado na norma DIN EN ISO 536 (1995), que prevê a pesagem de no mínimo cinco amostras, cada uma composta por vinte folhas de  $500\text{ cm}^2$ .

#### 2.1.3.2. Espessura

A geometria do papel pode ser representada por uma lâmina, portanto tem como parâmetro geométrico a espessura,  $t$ , dada em  $mm$ . Uma forma de medição é especificada pela norma DIN EN ISO 534 (2005) e definida como sendo a distância entre dois estampos de faces paralelas entre si de  $200\text{ mm}^2$ , que se movem em ZD a máximo  $3\text{ mm/s}$  e pressionam o papel com cerca de  $100\text{ kPa}$ .

#### 2.1.3.3. Rigidez à tração

Em TAPPI (2005) a rigidez à tração do papel celulose é dada em  $kN/m$  e definida como a razão da taxa de aplicação de força pela taxa de deformação e pela largura do corpo de prova em ensaios de tração. Pode ser obtida conforme as

normas DIN EN ISO 1924-2 (2008) e DIN EN ISO 1924-3 (2008). São previstas no mínimo dez amostras com largura de 15 mm, comprimento tracionado de 180 e 100 mm, realizado a 20 e 100 mm/min respectivamente. O resultado é calculado à partir do início da curva de carga *versus* deslocamento.

#### 2.1.4. Propriedades elásticas

Geralmente o papel celulose é modelado como lâmina ortotrópica e as constantes elásticas são definidas como os módulos de elasticidade  $E_{MD}$  e  $E_{CD}$ , módulo de cisalhamento  $G_{MDCD}$  e coeficiente de Poisson  $\nu_{MDCD}$ . Para uma lâmina quadrada As duas primeiras podem ser obtidas pela razão entre a rigidez à tração e a espessura. As demais em geral não são obtidas por ensaios mecânicos, mas com uso de ultrassom. Um exemplo é a técnica descrita em Baum *et al.* (1981), onde foram relatados ensaios de diferentes papéis de polpa *Kraft* que apresentaram  $\nu_{MDCD} = 0,293$  com variação de  $\pm 0,023$ . Alguns autores apresentam modelos que descrevem o módulo de cisalhamento apenas em função dos módulos de elasticidade. Em Baum *et al.* (1981), é sugerida uma relação empírica dada por

$$G_{MDCD} \approx 0,387\sqrt{E_{MD}E_{CD}} . \quad 2.2$$

## 2.2. Não-tecidos em polipropileno reforçado por fibras de vidro

Esta seção traz algumas definições dos materiais presentes na face da estrutura sanduíche estudada, feita em propileno reforçado por fibra de vidro. São apresentadas algumas características químicas e microestruturais, essencialmente com o intuito de descrever o comportamento mecânico.

### 2.2.1. Polipropileno

#### 2.2.1.1. Algumas definições

O polipropileno (polipropeno) é um polímero termoplástico, semicristalino e inorgânico, com fórmula molecular  $(C_3H_6)_n$  (EYERER *et al.*, 2008). É abreviado como PP, conforme nomenclatura utilizada pela IUPAC, *International Union of Pure and Applied Chemistry* (IUPAC, 1974). Pertence ao grupo das poliolefinas, polialcenos ou polialquenos. É formado essencialmente pelo monômero da olefina propileno ou propeno (PASQUINI, 2005). Neste caso é classificado como um homopolímero, abreviado como HPP, o qual na presença de outros monômeros, como por exemplo,

o etileno, torna-se um copolímero (KARIAN, 1999). O PP pode ser obtido através de catalizadores estereoespecíficos, como Ziegler e metallocenos (MAIER e KALAFUT, 1999). O primeiro foi descoberto por Karl Ziegler e Giulio Natta, ganhadores do prêmio Nobel de Química de 1963 (ZIEGLER, 1965).

### 2.2.1.2. Morfologia molecular

Uma molécula de olefina apresenta ao menos uma ligação dupla de carbono no centro com outras ligações laterais. A olefina propileno tem os grupos laterais de metil ( $\text{CH}_3$ ) e hidrogênio, os quais se ordenam de diferentes formas. A propriedade que caracteriza a ordem dos grupos metil é denominada estereoregularidade ou taticidade. Quanto a isso, uma molécula de PP é classificada como atática (a-PP), isotática (i-PP) ou sindiotática (s-PP), caracterizando moléculas assimétricas, simétricas ou enantiomorfas, respectivamente, (vide Figura 2.5). O polipropileno de engenharia é composto por i-PP com a presença de estereodefeitos (BURGT, 2002).

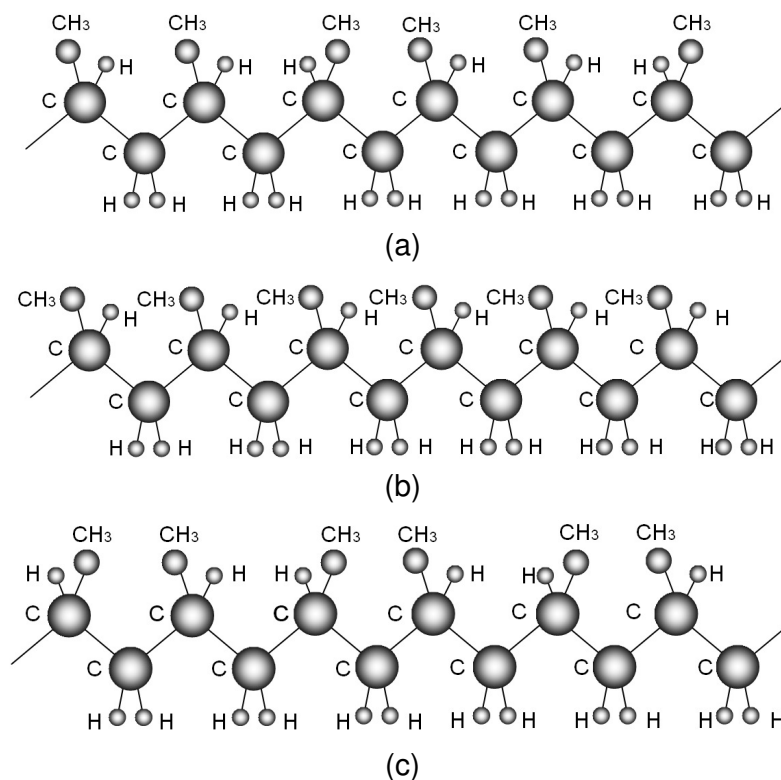


Figura 2.5 - Moléculas de PP: (a) atática, (b) isotática e (c) sindiotática.

### 2.2.1.3. Microestrutura

As moléculas de polipropileno têm forma helicoidal, pois o metil está disposto ao longo do comprimento da molécula formando uma hélice. Em moléculas

isotáticas, existem três formas de organização ou fases em sistemas cristalinos. São elas: alfa, beta e gama (PINTO, 1998). A mais estável e mais comum é a fase alfa que possui estrutura monoclinica. Geralmente as demais fases são obtidas através de processos de polimerização não convencionais (PINTO, 1998; BURGT, 2002).

Existem diferentes modelos geométricos que definem as partes amorfas (estrutura vítrea) e cristalinas da microestrutura dos polímeros. Para a região amorfa o modelo da espiral randômica com cadeias interpenetráveis de mesma dimensão é um dos mais conhecidos. Esse modelo foi proposto por Paul John Flory, ganhador do prêmio Nobel de Química de 1974. Em Pinto (1998), é mostrada uma lista de diferentes modelos que descrevem a região amorfa. Para região cristalina os modelos mais conhecidos são micela franjada e cadeias dobradas, aplicáveis aos polímeros de baixa e alta cristalinidade, respectivamente. O modelo da micela franjada foi proposto em 1930, por Hermann Staudinger, ganhador do prêmio Nobel de Química em 1953 (ZUGENMAIER, 2009). O modelo de cadeias dobradas foi proposto primeiramente por Andrew Keller em 1957 e foi base da criação da teoria de Hoffman-Lauritzen publicada em 1960, a qual descreve o processo de cristalização de polímeros (KELLER, 1957).

A microestrutura do polipropileno pode ser explicada pela formação de cadeias dobradas e esferulitas lamelares durante a polimerização, com base na teoria de Hoffman-Lauritzen (vide Figura 2.6). As moléculas de polipropileno adquirem as formas sinuosa e enovelada nas regiões cristalina e amorfa respectivamente. Os arranjos sinuosos, em geral essencialmente fases alfa, geram lâminas compridas e estreitas, denominadas cristalitos lamelares de cadeias de moléculas dobradas. Essas lâminas são empilhadas e ligadas entre si por regiões amorfas, chamadas de moléculas de amarração. Os empilhamentos estreitos e compridos têm forma de bastões e são dispostos espacialmente como os raios de esferas, denominadas esferulitas (KHAURY, 1966; BURGT, 2002).

O empilhamento das cadeias dobradas com moléculas de amarração pode ser classificado como uma superestrutura e descrito por modelos de paracristalinidade (WILKE, 1981; ELIAS, 2001). Este tipo de modelo foi proposto inicialmente por Rolf Hosemann em 1950 e é aplicável para o polipropileno (HOSEMAN, 1975).

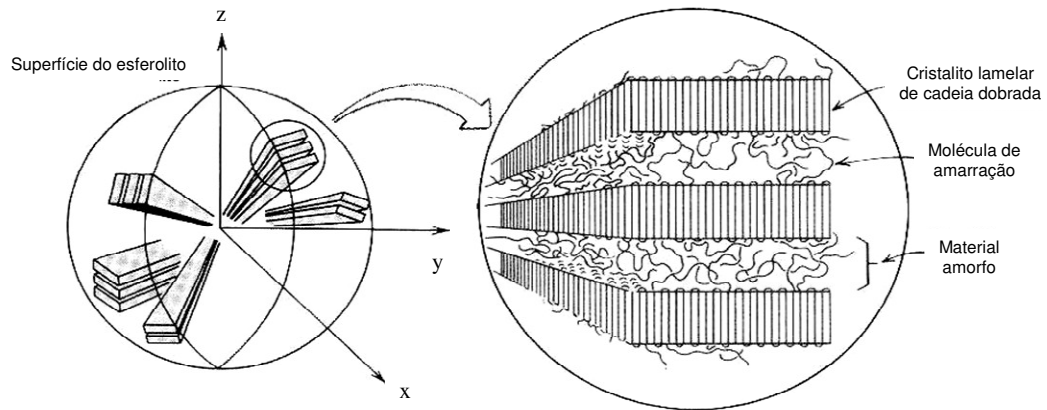


Figura 2.6 – Modelo microestrutural de polímeros (adaptado de Callister, 2003).

#### 2.2.1.4. Relação entre microestrutura e propriedades elásticas

É possível relacionar as características físico-químicas da microestrutura do PP com suas propriedades elásticas equivalentes em diferentes escalas, supondo estados de deformação e analisando seus efeitos. Durante a deformação, a microestrutura é reorientada e as lamelas das esferulitas tendem a se tornar paralelas entre si (vide Figura 2.7). Isso mostra que processos de fabricação de plásticos que promovem deformação em direções específicas faz com que o componente em polipropileno perca sua propriedade de isotropia.

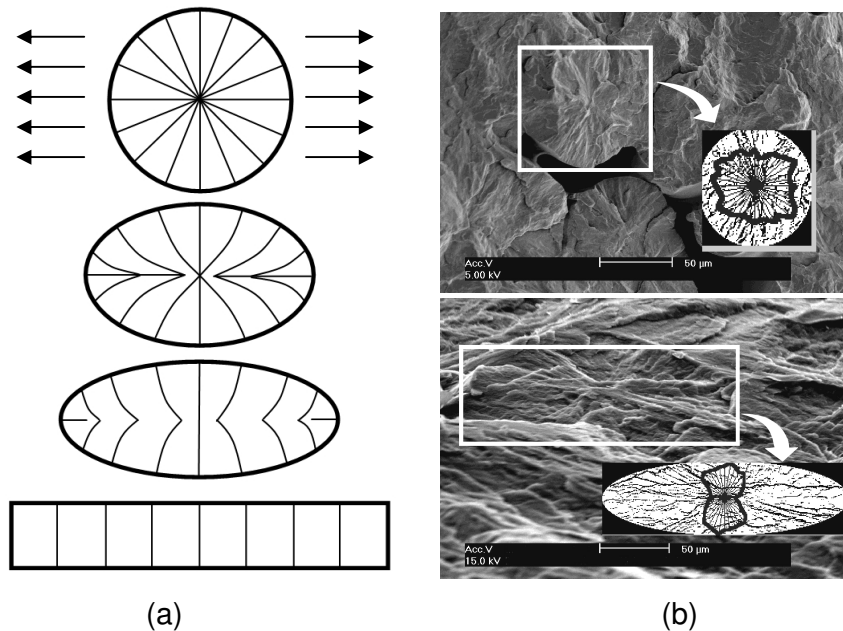


Figura 2.7 - Deformação da esferulita. (a) Idealização (ALCOCK, 2005) e (b) Microscópios de um i-PP (MACHADO *et al.*, 2000).

Existem modelos matemáticos que descrevem o módulo elástico dos polímeros com base nas fases amorfa e cristalina da microestrutura, como o modelo de Takayanagi (BISWAS *et al.*, 1982; ALCOCK, 2005). Esses modelos são importantes no estudo qualitativo das propriedades elásticas em relação às características da microestrutura, com o grau de cristalinidade do polímero como principal variável de análise. Existem outros estudos que utilizam modelos de micromecânica para as esferulitas com o objetivo de determinar as propriedades constitutivas do polímero. Em Dommelen *et al.* (2003), o PE (polietileno) é tomado como exemplo e tratado como material elástico, plástico e viscoso simultaneamente. Em Bédoui *et al.* (2006) são propostos modelos de micromecânica para diferentes tipos de termoplásticos, sendo eles: PP, PE e PET (politereftalato de etileno). Para aplicação desses modelos, é requerida a matriz de rigidez da região cristalina. Em Tashiro *et al.* (1992), a matriz elástica tridimensional anisotrópica da molécula de PP-isotático é obtida de forma teórica. A anisotropia apresentada em modelos moleculares e de micromecânica não é observada em escala macroscópica.

Quanto ao efeito viscoelástico, segundo Keuerleber (2006), o modelo de Maxwell generalizado pode ser indicado para análise do PP em uma determinada faixa de temperatura. Alguns modelos aplicados ao conjunto das poliolefinas como PP e PE, considerando o efeito de temperatura e velocidade de deformação, são apresentados em Schoßig (2011).

#### **2.2.1.5. Plástico de engenharia**

O PP apresenta densidade aproximadamente entre 0,90 e 0,95  $g/cm^3$ , a qual é relativamente baixa em relação aos demais tipos de plásticos (CALLISTER, 2003). É disponibilizado no mercado como plástico de engenharia em diferentes geometrias, tais como: granulado, tarugo, placa, filme, fibra ou filamento, entre outras (WIEBECK e HARADA, 2005). Por ser um termoplástico, o polipropileno admite vários tipos de processos de fabricação, em geral de baixo custo, como: injeção, termoformagem, extrusão, laminação, entre outros (WIEBECK e HARADA, 2005). Além de outras qualidades, a baixa massa específica, a reciclabilidade, o baixo custo e a facilidade de fabricação tornam o polipropileno um plástico com aplicação versátil e de utilização em grande escala em todo mundo. Segundo o PEMRG, *Plastics Europe's*

Market Research and Statistics Group, em 2009 e 2010, o PP foi o segundo plástico de maior demanda na Europa, abaixo apenas do polietileno, PE (vide Figura 2.8).

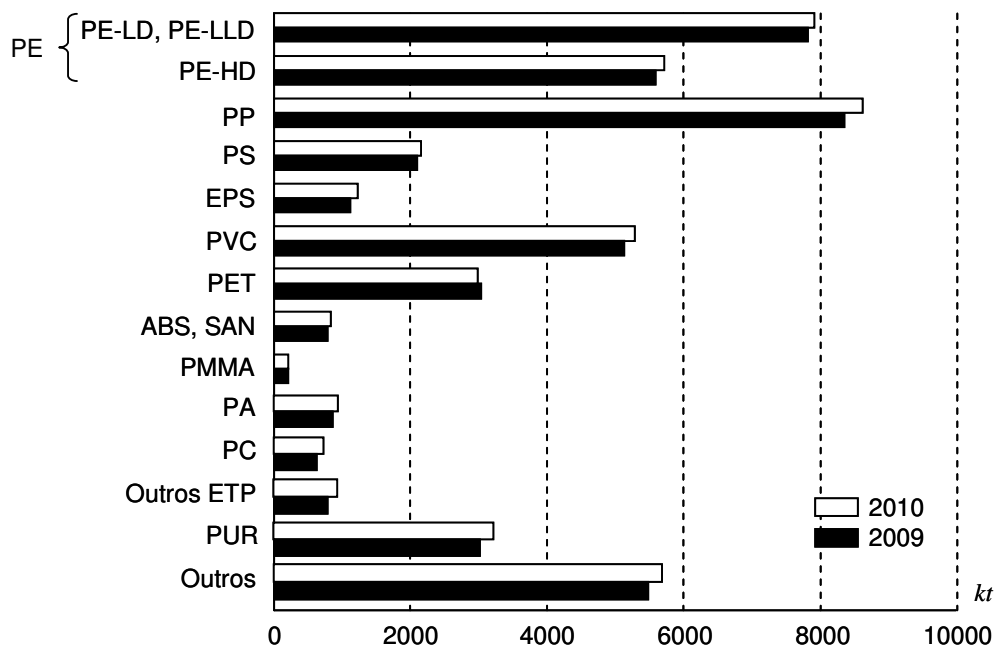


Figura 2.8 - Demanda europeia de plásticos nos últimos anos (PEMRG, 2011).

Conforme o processo de fabricação, componentes em PP podem conter anisotropia. Durante a injeção, se o resfriamento não é homogêneo, então a microestrutura adquire formas distintas por região. Sob extrusão ou laminação, as esferulitas e as cadeias de moléculas da zona amorfa do polipropileno são preferencialmente orientadas, o que gera característica anisotrópica. No entanto, em geral a distribuição de esferulitas deve ser quase homogênea e o polipropileno é considerado isotrópico (EYERER *et al.*, 2008).

**2.2.1.6. Módulo de elasticidade**

A norma DIN EN ISO 527 (1996) descreve a determinação do módulo de elasticidade de diferentes tipos de plásticos através de ensaio de tração com velocidades de 1 a 500 *mm/min*. São previstos no mínimo cinco corpos de prova com geometria mostrada na Figura 2.9. O módulo é calculado a partir das tensões referentes às deformações específicas de 0,0005 e 0,0025. Segundo Schmiedel (1992), o módulo de elasticidade do PP é aproximadamente 1,6 *MPa*.

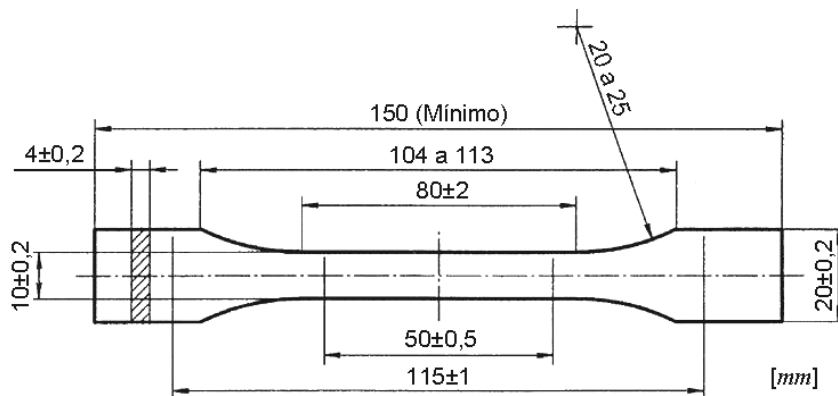


Figura 2.9 – Corpo de prova de tração (adaptado de DIN 527, 1996).

### 2.2.2. Fibras de vidro

Apesar de existirem atualmente diferentes formas de classificar o vidro quanto à estrutura molecular, esse pode ser denominado como sólido amorfo (VAN VLACK, 1973). Tanto o vidro quanto o quartzo contêm a sílica como principal constituinte, a qual possui fórmula molecular  $\text{SiO}_2$ , com estrutura tetraédrica com três moléculas de oxigênios nos vértices e uma de silício no centro. Essa estrutura é capaz de formar uma rede cristalina, a qual corresponde ao quartzo. Na estrutura do vidro, além da sílica estão presentes alguns óxidos, como: óxido de sódio ( $\text{Na}_2\text{O}$ ), cal ou óxido de cálcio ( $\text{CaO}$ ), alumina ou óxido de alumínio ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ), trióxido de diboro ou apenas óxido de boro ( $\text{B}_2\text{O}_3$ ), óxido de ítrio ( $\text{Y}_2\text{O}_3$ ), entre outros. Por causa disso, geralmente a descrição da composição de um vidro não é expressa com fórmula molecular, mas através das quantidades relativas de óxidos (WALLENBERGER e BINGHAM, 2010).

Um exemplo de aplicação do vidro em diferentes composições é a fibra de vidro para reforço em materiais compostos. Essas fibras podem ser constituídas desde aproximadamente 4% até 80% de  $\text{SiO}_2$ , como as fibras do tipo E e HM respectivamente (ASTM D578, 2011). Fibras do tipo E possuem baixo custo em relação aos demais tipos e são as mais utilizadas em compostos com matriz em polímeros termoplásticos, por exemplo, o PP. O tipo mais comum de fibra E possui 13% de alumina e 6,6% de óxido de boro, bem como densidade de aproximadamente  $2,6 \text{ g/cm}^3$ . Ensaio de tração mostram que essas fibras podem ser consideradas linearmente elásticas e isotrópicas, tal que geralmente  $E = 76 \text{ GPa}$  e  $\nu = 0,18$  (WALLENBERGER e BINGHAM, 2010).

### 2.2.3. Não-tecidos agulhados

Uma definição de não-tecido é dada na norma NBR-13370 (2002) e é similar à definição mostrada pela norma DIN EN 29062 (1992). *Nonwoven* e *Vliesstoffe* são as nomenclaturas utilizadas em inglês e alemão respectivamente para não-tecido. Trata-se de mantas de fibras longas arranjadas aleatoriamente e agregadas entre si, que podem ser obtidas a partir de diferentes processos de fabricação. As características que diferenciam os não-tecidos estão associadas à constituição e ao processo de fabricação dos mesmos. Um não-tecido em fibras de materiais diferentes é um material composto e um dos parâmetros de material é a porcentagem em massa de fibras de reforço,  $\phi_{Mf}$ . Para abordar os parâmetros de material abreviadamente o não-tecido em polipropileno e fibras de vidro pode ser denominado como PP/FV  $\phi_{Mf}$ .

O material, a quantidade, o diâmetro e o comprimento das fibras são características de constituição do não-tecido. Quanto aos materiais, podem ser citados como exemplo os compostos de fibras sintéticas, como o vidro, ou fibras naturais, como o sisal, combinadas com fibras em polímeros termofixos ou termoplásticos, como o polipropileno. Nestes exemplos as fibras geralmente são denominadas fibras de comprimento infinito. A disposição das mesmas influi na anisotropia do composto e está relacionada com o processo de fabricação.

#### 2.2.3.1. Processo de fabricação

O processo de fabricação de não-tecidos agulhados é ilustrado na Figura 2.10 e pode ser separado em três fases principais: mistura, cardagem e agulhagem. Na fase de mistura as fibras de vidro e de polipropileno são alojadas em uma região comum, porém não são entrelaçadas. O processo de cardagem tem como objetivo desenrolar e alinhar as fibras. O alinhamento não é completo e a cardagem promove ao conjunto uma tendência de distribuição homogênea das fibras. A agulhagem é realizada para junção das fibras entre si, tal que o conjunto se torne mais denso e parcialmente orientado no sentido transversal à espessura (ALBRECHT *et al.*, 2000).

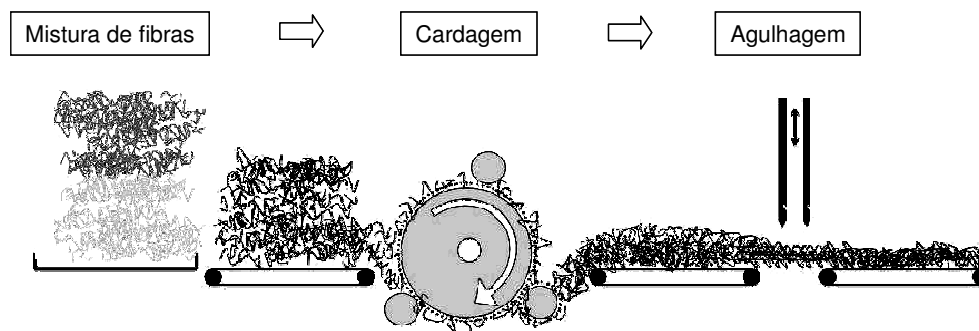


Figura 2.10 - Fabricação de não-tecido agulhado (adaptado de ALBRECHT *et al.*, 2000).

O produto obtido por este processo é um conjunto de fibras de polipropileno com fibras de vidro entrelaçadas. Nesta fase, não há ainda um composto de matriz polimérica reforçada por fibra. Para obtenção do composto, o não-tecido é compactado por termoformagem com temperatura e pressão suficientes para tornar o polipropileno fluido, visando a consolidação sem a presença de ar.

### 2.2.3.2. Anisotropia

As propriedades mecânicas do não-tecido variam com a distribuição das fibras. O perfil de distribuição varia conforme as características do processo utilizado pelo fabricante. Se o não-tecido possui distribuição aleatória das fibras, então em geral ele é considerado isotrópico. No entanto, a aleatoriedade da orientação das fibras nem sempre é desejada, como no caso em que as fibras são predominantemente orientadas nas direções longitudinal e/ou transversal ao fluxo de material, MD e CD respectivamente. Nessa condição, o não-tecido é considerado ortotrópico.

### 2.2.3.3. Viscoelasticidade

A viscoelasticidade do não-tecido é proveniente essencialmente do polipropileno (PP). A forma como as fibras de vidro estão dispersas na matriz de PP também modifica a característica viscosa do composto. Esta forma depende de parâmetros do processo de fabricação do composto. Por isso, é indicado o uso de modelos de viscoelasticidade específico para cada material (SCHOBIG, 2011).

Além da viscoelasticidade, alguns modelos consideram ainda efeitos de viscoplasticidade e de endurecimento por deformação plástica. A extremidade das fibras é uma região suscetível à concentração de tensões e pode haver plastificação na matriz polimérica muito antes da falha do composto, o que gera comportamento

plástico no material como um todo. Esse efeito pode ser observado principalmente em compostos de fibras curtas, da ordem de 1 *mm* de comprimento.

Um exemplo de modelo semiempírico denominado G'Sell Jonas é descrito em Schoßig (2011) e pode ser aplicado para poliolefinas reforçadas por fibras de vidro curtas. Esse modelo relaciona a tensão  $\sigma$ , com a temperatura  $T$ , a deformação  $\varepsilon$  e a velocidade de deformação  $\dot{\varepsilon}$ , tal que

$$\sigma = K \dot{\varepsilon}^{m^*} e^{h^* \varepsilon^2} \left(1 - e^{-W^* \varepsilon}\right) e^{\frac{a^*}{T}} \quad 2.3$$

onde  $K$ ,  $m^*$ ,  $h^*$ ,  $W^*$  e  $a^*$  são constantes do material e  $e^{h^* \varepsilon^2}$ ,  $(1 - e^{-W^* \varepsilon})$  e  $e^{\frac{a^*}{T}}$  correspondem, respectivamente, aos efeitos de endurecimento por deformação plástica, viscoelasticidade e temperatura.

#### 2.2.3.4. Módulo de elasticidade

A determinação do módulo de elasticidade de materiais compostos também é prevista pela norma DIN EN ISO 527 (1996), citada na subseção 2.2.1.6. Para compostos com fibras curtas, o corpo de prova possui forma similar ao da Figura 2.9. No entanto, para não-tecidos, é indicada a geometria mostrada na Figura 2.11. O corpo de prova de largura constante é indicado para esse tipo de composto, tendo em vista que as fibras longas podem gerar alta concentração de tensões na região da mudança de largura.

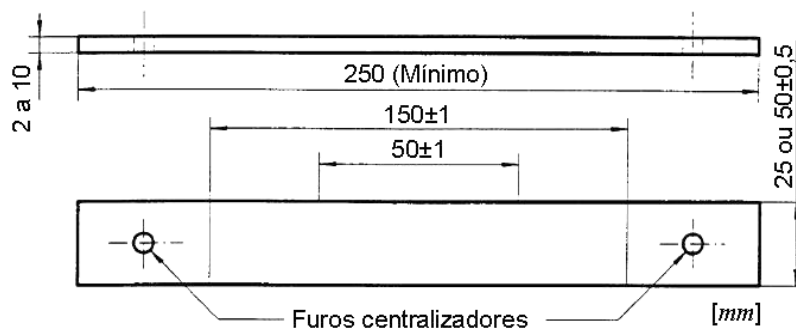


Figura 2.11 – Corpo de prova de tração (adaptado de DIN 527, 1996).

### 2.3. Núcleos de interesse

Esta seção descreve os métodos mais utilizados para fabricar núcleos sanduíche hexagonais e senoidais em papel celulose e suas geometrias. Os

produtos obtidos com esses processos são conhecidos como núcleo expandido e ondulado a partir de papelão de uma face. As lâminas de papel são coladas através de adesivos líquidos geralmente de dois tipos, o acetato de polivinila ou PVAc (cola branca) e o silicato de sódio (vidro d'água) (WABENFABRIK, 2011). A influência dos adesivos nas propriedades elásticas dos núcleos não são consideradas nesse trabalho.

### 2.3.1. Núcleo expandido (célula hexagonal)

#### 2.3.1.1. Processo de fabricação

O núcleo expandido possui células em formato de hexágono regular. A Figura 2.12 ilustra o processo de fabricação da esquerda para a direita. As lâminas de papel celulose são desenroladas e devidamente direcionadas através de cilindros de laminação. O número de cilindros pode variar e geralmente não passa de doze (STAMP, 2011). Sobre cada lâmina são direcionados jatos de adesivo fluido com temperatura e pressão específicas. Tais jatos formam faixas adesivas paralelas de largura e distância entre si controladas. Em seguida, as lâminas passam entre dois cilindros, onde são coladas entre si, formando um laminado. O laminado recebe jatos de adesivo sobre a face superior e é cortado em tiras por uma guilhotina, conforme a espessura de núcleo desejada. Tendo em vista que uma tira possui adesivo em sua face superior, essa pode ser colada em uma tira subsequente. O processo de expansão é realizado com aumento da umidade do papel e secagem posterior.

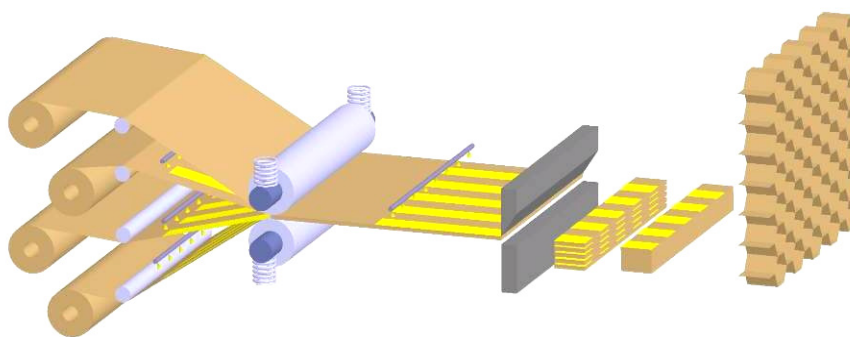


Figura 2.12 – Fabricação de núcleo sanduíche hexagonal (STAMP, 2011).

#### 2.3.1.2. Orientação do papel

As direções preferenciais de fabricação da lâmina de papel celulose são mostradas na Figura 2.13. A direção ZD é perpendicular às lâminas, e portanto não está representada.

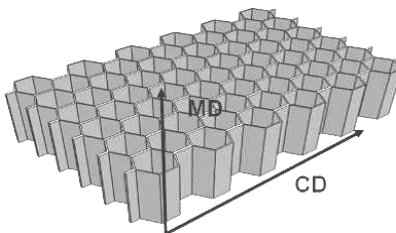


Figura 2.13 - Direções preferenciais das lâminas de papel de núcleo hexagonal.

### 2.3.1.3. Geometria

Os núcleos hexagonais regulares são os mais utilizados, estando disponíveis comercialmente em diversos tamanhos. Quanto menor a célula, mais denso, rígido e resistente é o núcleo. A Figura 2.14 mostra um núcleo com células de 7 mm em *Testliner* de 115 g/m<sup>2</sup>.



Figura 2.14 - Núcleo hexagonal em *Testliner* com células de 7 mm.

### 2.3.2. Núcleo em papelão (célula senoidal)

Núcleos de estruturas sanduíche em papel ondulado ou papelão também são conhecidos como núcleos senoidais ou de célula senoidal, devido à forma de sua geometria. A Figura 2.15 mostra, da esquerda para a direita, as três principais etapas de fabricação. São elas: formação do papelão de uma face, montagem do bloco de papelão e corte dos núcleos sanduíche. A primeira etapa é realizada em fábricas de papelão e as demais em fábricas de núcleo sanduíche.

#### 2.3.2.1. Processo de fabricação

O papelão de uma face é a junção de uma lâmina de papel plana e outra ondulada. As lâminas são transferidas para a zona de junção por cilindros aquecidos entre 85 e 95°C. Em seguida, o papel recebe jatos de vapor com umidade e temperatura controladas. A conformação do papel em forma de ondas e a colagem

da face são realizadas por cilindros à cerca de 180°C. Após a união, o conjunto é seco sobre uma esteira e armazenado em rolos. Os fabricantes de núcleo adquirem os rolos e os cortam em forma de placas. Os picos da região ondulada são mergulhados em um reservatório com adesivo líquido. A placa com adesivo é empilhada sobre outras placas e o conjunto é pressionado formando um bloco de papelão, o qual é serrado em fatias (STAMP, 2011).

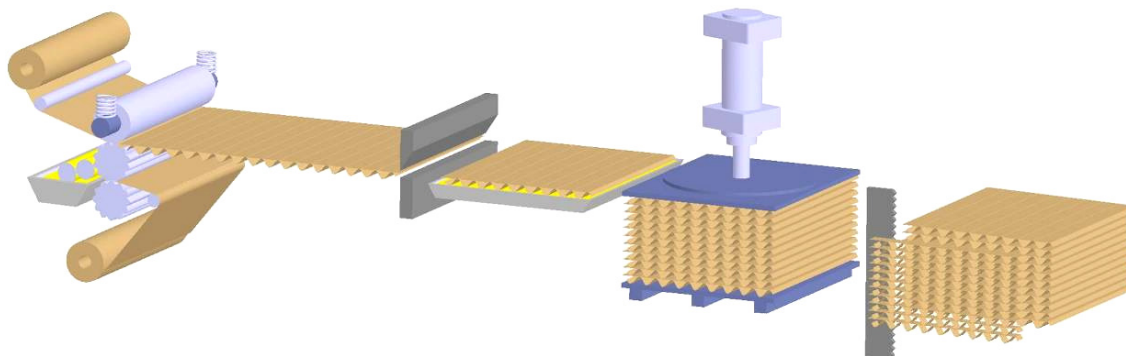


Figura 2.15 - Fabricação de núcleos senoidais (STAMP, 2011).

### 2.3.2.2. Orientação do papel

As direções preferenciais de fabricação da lâmina de papel celulose após o processo de fabricação do núcleo são mostradas na Figura 2.16. Observa-se que elas são distintas das direções referentes ao núcleo hexagonal. A direção ZD é perpendicular às lâminas, e portanto não está representada.

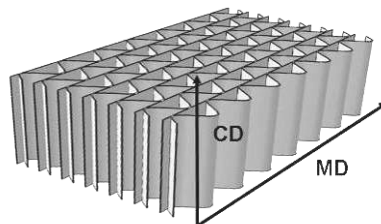


Figura 2.16 - Direções preferenciais das lâminas de papel de núcleo senoidal.

### 2.3.2.3. Geometria

Os tamanhos das células senoidais segundo a norma DIN 55468 (2004) são mostrados na Tabela 2.1.  $H$  e  $P$  representam, respectivamente, a amplitude e o passo da função seno, onde o tipo  $A\sim$  é o mais utilizado. A Figura 2.17 mostra exemplos de núcleos de espessura 10 mm em *Testliner* de 115 g/m<sup>2</sup>.

Tabela 2.1 – Tipos de células senoidais (adaptado de DIN 55468, 2004).

Tipo	$H$ [mm]		$P$ [mm]	
	Mín.	Máx.	Mín.	Máx.
G~	-	0,55	-	1,8
F~	0,6	0,9	1,9	2,6
E~	1	1,8	3	3,5
D~	1,9	2,1	3,8	4,8
B~	2,2	3	5,5	6,5
C~	3,1	3,9	6,8	7,9
A~	4	4,9	8	9,5
K~	5	-	10	-

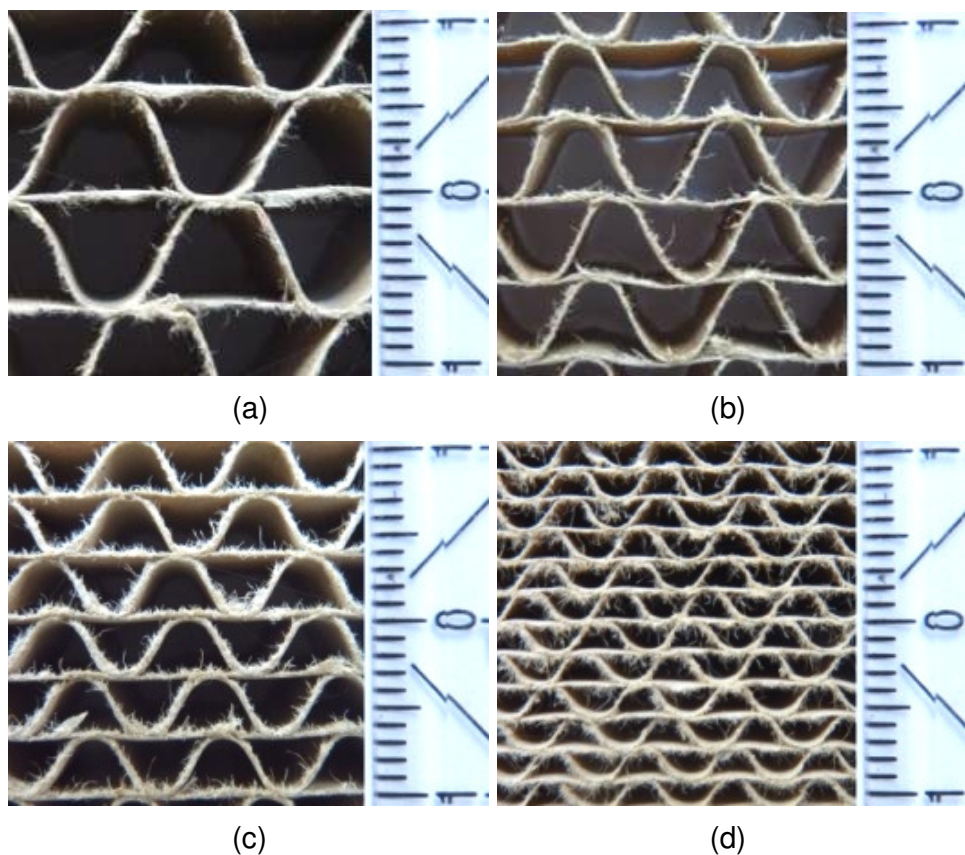


Figura 2.17 - Núcleos senoidais dos tipos: (a) K~, (b) A~, (c) C~ e (d) B~.

## 2.4. Estrutura sanduíche de interesse

### 2.4.1. Montagem do sanduíche

O não-tecido da face da estrutura sanduíche estudada é consolidado por termoformagem. O sanduíche é montado e pressionado transversalmente com cerca

de 14 *kPa* por uma matriz de prensagem, com cavidades a aproximadamente 220 °C em aço, alumínio ou cerâmica, entre 40 a 240 *s*, dependendo dos materiais da face (STAMP, 2011). O polipropileno em contato com o papel celulose forma a união entre as partes do sanduíche. A pressão de compressão é limitada pela pressão de colapso das células do núcleo. Isso implica a consolidação incompleta da manta após o processo de termoformagem. Além disso, o que pressiona a manta são as paredes das células do núcleo, portanto, o grau de consolidação varia ao longo da manta. A variação de consolidação pode ser vista através da espessura da face, como mostra o exemplo da Figura 2.18.

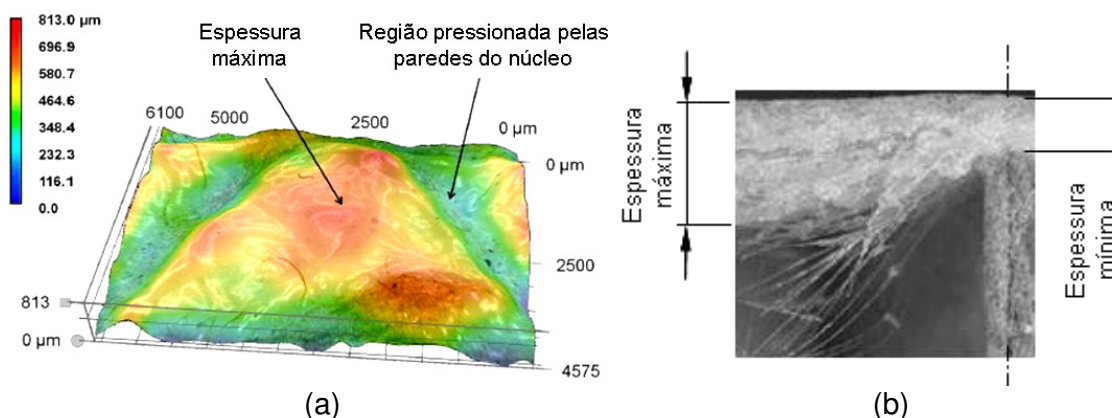


Figura 2.18 - Face em PP/FV30 de 400 *g/m*<sup>2</sup> com núcleo A~ em *Testliner* de 115 *g/m*<sup>2</sup>. (a) Microscopia 3D e (b) Corte transversal (adaptado de STAMP, 2011).

Geralmente, a consolidação de não-tecidos termoplásticos é feita através do processo GMT, *Glass Mat Reinforced Thermoplastic Process* (ERHARD, 1993). A manta é aquecida por infravermelho e em seguida pressionada contra cavidades aquecidas tal que a lâmina resultante se torna completamente consolidada.

#### 2.4.2. Definição de grau de consolidação do não-tecido da face

Tendo em vista a consolidação incompleta do não-tecido da face do sanduíche durante a termoformagem, em Stamp (2011) foi proposta como variável de processo o grau de consolidação,  $k_{CS}$ . Trata-se da razão entre a espessura mínima,  $t_{min}$ , e a espessura obtida após o processo de termoformagem,  $t$ , e pode ser escrito como

$$k_{CS} = \frac{t_{min}}{t} . \quad 2.4$$

Assim, a porcentagem de ar em volume,  $\varphi_{AR}$ , é dada por

$$\varphi_{AR} = 1 - k_{CS} . \quad 2.5$$

Se a espessura obtida é mínima, então a manta está totalmente consolidada, tal que  $k_{CS}$  é máximo e igual a um. Fazendo  $\varphi_{AR}$  tender a zero, é deduzida uma expressão matemática para a espessura mínima, a qual depende das densidades da fibra e da matriz,  $\rho_f$  e  $\rho_m$ , respectivamente, bem como da porcentagem de reforço em massa,  $\varphi_{Mf}$ , e da gramatura da manta,  $g$ . Assim, é escrito que

$$t_{\min} = g \left[ \frac{\varphi_{Mf}}{\rho_f} + \frac{(1 - \varphi_{Mf})}{\rho_m} \right] . \quad 2.6$$

Geralmente, a porcentagem de fibras de não-tecido é medida em massa. Uma relação entre a porcentagem em volume,  $\varphi$ , e em massa,  $\varphi_{Mf}$ , pode ser deduzida a partir das densidades da fibra,  $\rho_f$ , e da matriz,  $\rho_m$ , tal que

$$\varphi = \frac{\varphi_{Mf} \rho_m}{\varphi_{Mf} \rho_m + (1 - \varphi_{Mf}) \rho_f} . \quad 2.7$$

## 2.5. Relações constitutivas elásticas

As relações apresentadas nesta seção foram obtidas conforme Vinson (1999) e Jones (1999). As deduções das equações são mostradas no Apêndice A.

### 2.5.1. Sólido unidimensional

Um sólido unidirecional pode ser representado por um cilindro de diâmetro infinitesimal e comprimento infinito. Com base na lei de Hooke, a relação constitutiva elástica (relação entre tensão  $\sigma$  e deformação  $\varepsilon$ ) desse cilindro é escrita como

$$\sigma = E\varepsilon , \quad 2.8$$

onde  $E$  é o módulo de Young do material.

### 2.5.2. Sólido bidimensional ortotrópico

Um sólido bidimensional pode ser representado por uma lâmina plana de dimensões infinitesimais. Se o material é ortotrópico, adotando os sistemas de coordenadas  $1O2$  e  $xOy$  para o material e a lâmina respectivamente, com o eixo 1 rotacionado de um ângulo  $\theta$  em relação ao eixo  $x$  (ver Apêndice A, Figura A.3),

então a relação elástica constitutiva da lâmina, com base na lei de Hooke generalizada, é escrita em função da matriz de rigidez  $[\bar{Q}]$  (JONES, 1999), tal que

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad 2.9$$

onde os índices  $x$ ,  $y$  e  $xy$  indicam as direções das tensões  $\sigma$  e deformações  $\varepsilon$  e

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{33})s^2c^2 + Q_{22}s^4, \quad 2.10$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{33})s^2c^2 + Q_{22}c^4, \quad 2.11$$

$$\bar{Q}_{33} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{33})s^2c^2 + Q_{33}(s^4 + c^4), \quad 2.12$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{33})s^2c^2 + Q_{12}(s^4 + c^4), \quad 2.13$$

$$\bar{Q}_{13} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{33})sc^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{33})s^3c \quad 2.14$$

e

$$\bar{Q}_{23} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{33})s^3c + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{33})sc^3, \quad 2.15$$

sendo

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}. \quad 2.16$$

Acima,  $G$  e  $\nu$  representam o módulo de cisalhamento e o coeficiente de Poisson, respectivamente, bem como  $c = \cos(\theta)$  e  $s = \sin(\theta)$ . As matrizes  $[Q]$  e  $[\bar{Q}]$  são deduzidas no Apêndice A.

### 2.5.3. Sólido tridimensional ortotrópico

Um sólido tridimensional pode ser representado por um cubo de dimensões infinitesimais. Se os sistemas 1O2O3 e xOyOz são adotados para o material e o cubo respectivamente, tal que 1 é rotacionado de um ângulo  $\theta$  em relação a  $x$  (vide Figura A.3) e 3 é coincidente com  $z$ , então um cubo de material ortotrópico com simetria em 13 e 23 terá relação elástica constitutiva escrita como

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ & & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 & \bar{Q}_{36} \\ & & & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ & & & & \bar{Q}_{55} & 0 \\ & & & & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad 2.17$$

onde

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{22}s^4, \quad 2.18$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}(s^4 + c^4), \quad 2.19$$

$$\bar{Q}_{13} = Q_{12}c^2 + Q_{23}s^2, \quad 2.20$$

$$\bar{Q}_{16} = -s^3cQ_{22} + sc^3Q_{11} - sc(c^2 - s^2)(Q_{12} + 2Q_{66}), \quad 2.21$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{22}c^4, \quad 2.22$$

$$\bar{Q}_{23} = Q_{13}s^2 + Q_{23}c^2, \quad 2.23$$

$$\bar{Q}_{33} = Q_{33}, \quad 2.24$$

$$\bar{Q}_{26} = -sc^3Q_{22} + s^3cQ_{11} + sc(c^2 - s^2)(Q_{12} + 2Q_{66}), \quad 2.25$$

$$\bar{Q}_{36} = (Q_{13} - Q_{23})sc, \quad 2.26$$

$$\bar{Q}_{44} = Q_{44}c^2 + Q_{55}s^2, \quad 2.27$$

$$\bar{Q}_{45} = (Q_{55} - Q_{44})sc, \quad 2.28$$

$$\bar{Q}_{55} = Q_{55}c^2 + Q_{44}s^2 \quad 2.29$$

e

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12})s^2c^2 + Q_{66}(c^2 - s^2)^2, \quad 2.30$$

sendo

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{E_1(1 - \nu_{23}\nu_{32})}{\Delta} & \frac{E_1(\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23})}{\Delta} & \frac{E_1(\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32})}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_2(\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13})}{\Delta} & \frac{E_2(1 - \nu_{13}\nu_{31})}{\Delta} & \frac{E_2(\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31})}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_3(\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23})}{\Delta} & \frac{E_3(\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13})}{\Delta} & \frac{E_3(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}, \quad 2.31$$

com

$$\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}. \quad 2.32$$

## 2.6. Micromecânica de materiais compostos com reforço unidirecional

As equações constitutivas apresentadas na Seção 2.5 são adequadas para materiais homogêneos. Para aplicá-las em materiais compostos, é necessário determinar as propriedades equivalentes do composto. A micromecânica é uma forma de criar modelos matemáticos que relacionam essas propriedades com as propriedades elásticas da matriz e das fibras através de modelos geométricos teóricos, que representam uma parcela do composto que se repete ao longo do mesmo, como uma célula.

### 2.6.1. Modelos analíticos

Nesta seção, são mostrados alguns modelos matemáticos apresentados em Schürmann (2007), sendo que o Apêndice B mostra as deduções dos mesmos. Os modelos mais utilizados baseados na micromecânica fornecem as seguintes expressões para a propriedades elásticas de compostos de matriz isotrópica com reforço unidirecional ortotrópico:

$$E_1 = E_m(1 - \varphi) + E_{f1}\varphi, \quad 2.33$$

$$E_2 = E_m \frac{1}{(1 - \varphi) + \frac{E_m}{E_{f2}}\varphi}, \quad 2.34$$

$$\nu_{12} = \nu_m(1 - \varphi) + \nu_{f12}\varphi \quad 2.35$$

e

$$G_{12} = G_m \frac{1}{(1 - \varphi) + \frac{G_m}{G_f}\varphi}. \quad 2.36$$

Acima, os índices  $m$  e  $f$  indicam as propriedades da matriz e da fibra, respectivamente.

Em Schürmann (2007), foi proposto um modelo para o cálculo do módulo de elasticidade transversal às fibras que considera a contração transversal da matriz. Trata-se de uma alternativa para a Equação 2.34, sendo

$$E_2 = \left( \frac{E_m}{1-\nu_m^2} \right) \frac{1}{(1-\varphi) + \left( \frac{E_m}{1-\nu_m^2} \right) \frac{\varphi}{E_{f2}}}. \quad 2.37$$

### 2.6.2. Modelos semiempíricos

Com base nas Equações 2.36 e 2.37 e em resultados experimentais, foram criados modelos semiempíricos para um composto de resina epóxi reforçada por fibras de vidro tipo E, tais que

$$E_2 = \left( \frac{E_m}{1-\nu_m^2} \right) \frac{1+0,85\varphi^2}{(1-\varphi)^{1,25} + \left( \frac{E_m}{1-\nu_m^2} \right) \frac{\varphi}{E_{f2}}}. \quad 2.38$$

e

$$G_{12} = G_m \frac{1+0,8\varphi^{0,5}}{(1-\varphi)^{1,25} + \frac{G_m\varphi}{E_{f2}}}. \quad 2.39$$

Em Schürmann (2007), baseado na Equação 2.36 e em um modelo de elementos finitos, é apresentado um modelo semiempírico para o mesmo composto. Trata-se de uma alternativa para a Equação 2.39, sendo

$$G_{12} = G_m \frac{1+0,4\varphi^{0,5}}{(1-\varphi)^{1,45} + \frac{G_m\varphi}{E_{f2}}}. \quad 2.40$$

## 2.7. Propriedades elásticas equivalentes de núcleos sanduíche

O núcleo da estrutura sanduíche de interesse é heterogêneo e suas propriedades elásticas podem ser consideradas equivalentes às propriedades de uma célula, região que se repete ao longo do seu domínio. Nesta seção, são mostradas diferentes formas de se obter as propriedades elásticas das células hexagonais e senoidais.

### 2.7.1. Células hexagonais

As variáveis geométricas de um segmento de placa com células hexagonais, bem como seu sistema de coordenadas, são mostradas na Figura 2.19. A célula deve representar as características elásticas da placa, para isso os comprimentos  $L_1$

e  $L_2$  são, por hipótese, muito maiores que as dimensões da célula. A placa é considerada ortotrópica, pois possui três planos de simetria, mutuamente perpendiculares em relação às propriedades elásticas.

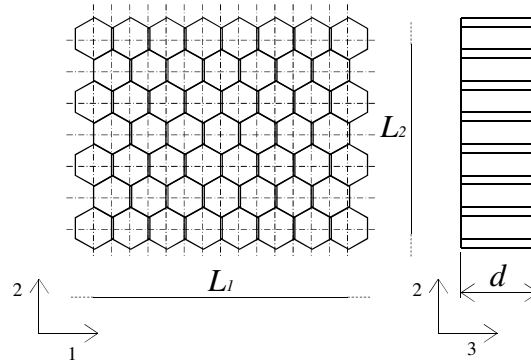


Figura 2.19 – Segmento de placa com célula hexagonal.

Para analisar as propriedades elásticas no plano 102, podem ser adotados modelos bidimensionais em 102. Neste caso, as variáveis que influenciam as propriedades elásticas da célula são a geometria da célula e as propriedades elásticas do material base da célula no plano 102. As variáveis geométricas são mostradas na Figura 2.20 para dois tipos de configurações. A parede simples (Figura 2.20 (a)) é comum para núcleos em material polimérico. A parede dupla (Figura 2.20 (b)) é o tipo mais utilizado e geralmente é formada por folhas de materiais metálicos, compostos laminados ou papéis. Para casos em que o hexágono é regular, tem-se que  $\alpha = 30^\circ$  e  $l = h$ , tal que as únicas variáveis independentes são  $ci$  e  $t$ . No caso geral, as variáveis independentes são  $\alpha$ ,  $l$ ,  $h$  e  $t$ .

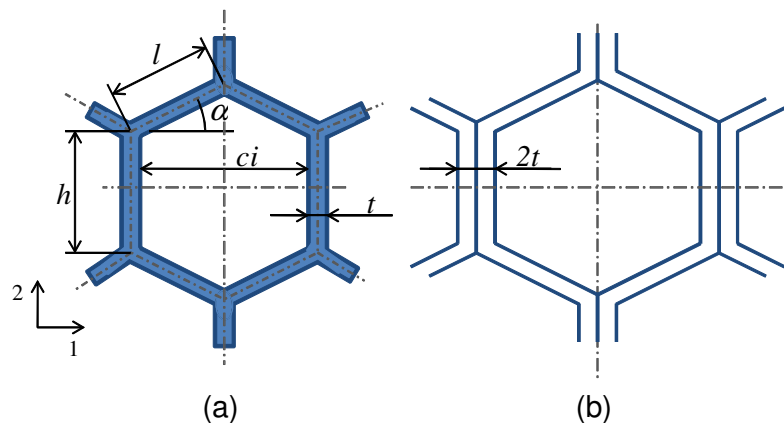


Figura 2.20 – Geometria da célula hexagonal. (a) Parede simples e (b) parede dupla.

Em Gibson e Ashby (1997), as propriedades no plano longitudinal e nos planos transversais, para células hexagonais de espessura constante  $t$ , em materiais isotrópicos lineares elásticos, são deduzidas a partir da teoria de viga de Euler-Bernoulli e princípios energéticos. Nesses modelos,  $\alpha_{s33}$ ,  $\tau_{s13}$ ,  $\tau_{s23}$ ,  $\nu_{s13}$  e  $\nu_{s23}$  são considerados nulos. O índice  $s$  é referente às propriedades do material da parede da célula do núcleo. Além disso,  $t$  e  $2t$  são consideradas pequenas em relação à  $l$  e  $h$ , por isso o cisalhamento transversal da parede ao longo da espessura, ou seja,  $\tau_{s12}$  pode ser desprezado.

Uma forma sucinta de escrever as equações mostradas em Gibson e Ashby (1997) é apresentada em Trombin e Luersen (2011) através da expressão de uma propriedade elástica equivalente genérica  $K$ , dada por

$$K = C_0 C_g^m K_s. \quad 2.41$$

As propriedades elásticas do núcleo dependem da geometria da célula e das propriedades do material. Assim, foi definido  $C_g$  como fator geométrico igual a  $t/ci$ ;  $m$  como grau de influência do fator geométrico;  $K_s$  como propriedade elástica genérica do material; e  $C_0$  é uma constante. O coeficiente de Poisson  $\nu_{13}$  é nulo,  $E_{11} = E_{22}$  e  $\nu_{13} = \nu_{23}$ . Fazendo  $K = \{E_{11}; G_{12}; E_{33}; G_{13}; G_{23}; \nu_{12}\}$ , então  $C_0 = \{12; 24; 8/3; 1; 5/3; 9/2\}$ ,  $m = \{3; 3; 1; 1; 1; 2\}$  e  $K_s = \{E_s; E_s; E_s; G_s; G_s; \nu_s\}$ .

Se as paredes das células são espessas, então o efeito de cisalhamento transversal não é desprezível. Nesse caso, são utilizados modelos de viga de Timoshenko. Em Gibson e Ashby (1997), são mostradas soluções analíticas para paredes em materiais isotrópicos, escritas como

$$E_1 = E_s \left(\frac{t}{l}\right)^3 \frac{\cos(\alpha)}{\left(\left(\frac{h}{l}\right) + \sin(\alpha)\right) \sin^2(\alpha) \left(1 + (2,4 + 1,5\nu_s + \cot^2(\alpha)) \left(\frac{t}{l}\right)^2\right)}, \quad 2.42$$

$$E_2 = E_s \left(\frac{t}{l}\right)^3 \frac{\left(\left(\frac{h}{l}\right) + \sin(\alpha)\right)}{\cos^3(\alpha) \left(1 + (2,4 + 1,5\nu_s + \tan^2(\alpha) + \frac{2\left(\frac{h}{l}\right)}{\cos^2(\alpha)} \left(\frac{t}{l}\right)^2\right)}, \quad 2.43$$

$$v_{12} = \frac{\cos^2(\alpha) \left( 1 + (1,4 + 1,5v_s) \left( \frac{t}{l} \right)^2 \right)}{\left( \left( \frac{h}{l} \right) + \text{sen}(\alpha) \right) \text{sen}(\alpha) \left( 1 + (2,4 + 1,5v_s + \cot^2(\alpha)) \left( \frac{t}{l} \right)^2 \right)} \quad 2.44$$

e

$$G_{12} = E_s \left( \frac{t}{l} \right)^3 \frac{\left( \left( \frac{h}{l} \right) + \text{sen}(\alpha) \right)}{\left( \frac{h}{l} \right)^2 \cos(\alpha)} \frac{1}{F_{12}}; \quad 2.45$$

onde

$$F_{12} = 1 + 2 \left( \frac{h}{l} \right) + \left( \frac{t}{l} \right)^2 \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{(2,4 + 1,5v_s) \left[ 2 + \left( \frac{h}{l} \right) + \text{sen}(\alpha) \right]}{\left( \frac{h}{l} \right)} + \right. \\ \left. + \frac{\left[ \left( \frac{h}{l} \right) + \text{sen}(\alpha) \right]}{\left( \frac{h}{l} \right)^2} \left[ \left[ \left( \frac{h}{l} \right) + \text{sen}(\alpha) \right] \tan^2(\alpha) + \text{sen}(\alpha) \right] \right] \end{array} \right\}. \quad 2.46$$

Apesar da presença do efeito de contração transversal do material da parede nessas formulações, a influência do mesmo em relação à deformação na direção da espessura do núcleo é desprezada. Um exemplo de modelo que considera essa influência no cálculo de  $E_1$  e  $G_{12}$  é apresentado em Chen *et al.* (2009). Este modelo mostra que se  $v_s \neq 0$ , então  $d$  (espessura do núcleo) influi nas propriedades elásticas no plano 1O2. Primeiramente, é suposto um estado plano de deformações na parede inclinada, indicado com o subscrito  $p$ . O módulo de elasticidade sob essa condição é dado por

$$E_1|_p = E_s \left( \frac{t}{l} \right)^3 \frac{\cos(\alpha)}{(1 - v_s^2) \left( \left( \frac{h}{l} \right) + \text{sen}(\alpha) \right) \text{sen}^2(\alpha) \left( 1 + \left( \frac{2}{1 - v_s} + \cot^2(\alpha) \right) \left( \frac{t}{l} \right)^2 \right)}. \quad 2.47$$

Em seguida, a condição forçada é retirada e o resultado do equilíbrio do trabalho realizado é analisado, podendo ser escrito que

$$\frac{1}{E_1} = \frac{1}{E_1|_p} + \frac{\nu_s^2 \left[ \left( \frac{h}{l} \right) + \text{sen}(\alpha) \right]}{E_s \left( \frac{t}{l} \right)} \left\{ \cos(\alpha) + \frac{6(1-\nu_s^2) \text{sen}^2(\alpha)}{\pi^3 \left( \frac{t}{l} \right)^2 \left( \frac{d}{l} \right)} \cos(\alpha) \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{H_{m1}}{m^3} \right) \right\}, \quad 2.48$$

onde

$$H_{m1} = \frac{2 \text{senh}^2(k_{m1})}{(1-\nu_s)[(3+\nu_s) \text{senh}(k_{m1}) \cosh(k_{m1}) - (1-\nu_s)k_{m1}]} \quad 2.49$$

e

$$k_{m1} = \frac{m\pi d}{l}. \quad 2.50$$

Segundo Chen *et al* (2009), a série é convergente para  $m = 10$  e o módulo de cisalhamento  $G_{12}$  pode ser obtido pelas expressões

$$\frac{1}{G_{12}|_p} = \frac{(1-\nu_s^2)}{E_s} \left\{ \frac{\cos(\alpha) \left[ 2 \left( \frac{h}{t_2} \right)^3 + \left( \frac{l}{t} \right) \left( \frac{h}{t} \right)^2 \right]}{\left[ \left( \frac{h}{l} \right) + \text{sen}(\alpha) \right]} + \frac{2 \cos(\alpha) \left[ 2 \left( \frac{h}{t_2} \right) + \left( \frac{l}{t} \right) \left( \frac{h}{l} \right) \right]}{(1-\nu_s) \left[ \left( \frac{h}{l} \right) + \text{sen}(\alpha) \right]} + \frac{\left( \frac{l}{t} \right) \left[ 1 + \left( \frac{h}{l} \right) \text{sen}(\alpha) \right]^2}{\cos(\alpha) \left[ \left( \frac{h}{l} \right) + \text{sen}(\alpha) \right]} \right\} \quad 2.51$$

e

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{1}{G_{12}|_p} + \frac{\nu_s^2}{E_s \cos(\alpha) \left[ \left( \frac{h}{l} \right) + \text{sen}(\alpha) \right]} \times \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{h}{l} \right) \text{sen}(\alpha) \right]^2 \left( \frac{l}{t} \right) + \frac{6(1-\nu_s^2) \cos^2(\alpha)}{\pi^3} \left( \frac{h}{d} \right) \left( \frac{l}{t} \right)^2 \left( \frac{h}{t} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{H_{m1}}{m^3} \right) + 2 \left( \frac{h}{t} \right)^3 \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{H_{m2}}{m^3} \right) \right\} \quad 2.52$$

onde

$$H_{m2} = \frac{2 \text{senh}^2(k_{m2})}{(1-\nu_s)[(3+\nu_s) \text{senh}(k_{m2}) \cosh(k_{m2}) - (1-\nu_s)k_{m2}]} \quad 2.53$$

e

$$k_{m2} = \frac{m\pi d}{h}. \quad 2.54$$

Para testes realizados com  $\nu_s = 0,3$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $0,25 \leq l/h \leq 2$ , e  $0,01 \leq t/l \leq 0,1$ , tanto para  $E_1$  como para  $G_{12}$ , essas formulações asseguram aproximadamente

menos de 1% de diferença em relação a resultados obtidos com modelos de elementos finitos em programas comerciais (CHEN *et al.*, 2009).

Se o núcleo é fixo às faces, suas propriedades elásticas equivalentes se modificam (XU e QIAO, 2002; BECKER, 1998; CHEN *et al.*, 2009). Sob carregamento, as faces e o núcleo devem ter a mesma deformação na região de união entre eles. O núcleo é muito mais flexível que a face, por isso as regiões do núcleo perto da união se deformam como as faces. No entanto, regiões do núcleo distantes da união se deformam como se o núcleo estivesse isolado. Em uma estrutura sanduíche de espessura teórica infinita, o centro do núcleo se deforma como se não houvesse faces fixas. Se a espessura do sanduíche é infinitamente pequena, o núcleo se deforma igual às faces. Para espessuras finitas, existe superposição dos efeitos, tal que a deformação do núcleo ao longo da espessura é variável. Por isso, existem modelos que definem as propriedades elásticas equivalentes do núcleo considerando a presença das faces. Estes modelos podem ser obtidos a partir de métodos energéticos, tal que as propriedades são determinadas com a minimização da energia específica de deformação em uma célula.

Em Becker (1998), é apresentado um modelo tridimensional aplicável para núcleos hexagonais regulares de parede vertical simples em material isotrópico linearmente elástico. A matriz de rigidez no plano longitudinal é obtida através de um método energético, negligenciando as tensões na direção da espessura, tal que

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \end{Bmatrix}, \quad 2.55$$

onde

$$Q_{11} = \frac{\sqrt{3}}{5} E_s \left( \frac{t}{l} \right) \left[ 1 + \frac{1}{4\lambda d} \tanh\left(\lambda \frac{d}{2}\right) + \frac{1}{8 \cosh^2\left(\lambda \frac{d}{2}\right)} \right] + \frac{1}{160\sqrt{3}} G_s t \lambda \left( \frac{1}{d} \right) \left[ 2 \tanh\left(\lambda \frac{d}{2}\right) - \lambda d \frac{1}{\cosh^2\left(\lambda \frac{d}{2}\right)} \right], \quad 2.56$$

$$Q_{12} = \frac{\sqrt{3}}{5} E_s \left( \frac{t}{l} \right) \left[ 1 - \frac{7}{12\lambda d} \tanh\left(\lambda \frac{d}{2}\right) - \frac{7}{24 \cosh^2\left(\lambda \frac{d}{2}\right)} \right] -$$

$$- \frac{7}{480\sqrt{3}} G_s t \lambda \left( \frac{1}{d} \right) \left[ 2 \tanh\left(\lambda \frac{d}{2}\right) - \lambda d \frac{1}{\cosh^2\left(\lambda \frac{d}{2}\right)} \right]$$
2.57

e

$$Q_{22} = \frac{\sqrt{3}}{5} E_s \left( \frac{t}{l} \right) \left[ 1 + \frac{49}{36\lambda d} \tanh\left(\lambda \frac{d}{2}\right) + \frac{49}{72 \cosh^2\left(\lambda \frac{d}{2}\right)} \right] +$$

$$+ \frac{49}{1440\sqrt{3}} G_s t \lambda \left( \frac{1}{d} \right) \left[ 2 \tanh\left(\lambda \frac{d}{2}\right) - \lambda d \frac{1}{\cosh^2\left(\lambda \frac{d}{2}\right)} \right]$$
2.58

O parâmetro numérico  $\lambda$  é relacionado à energia de deformação da célula, dada por

$$U = 2E_s t \left[ ld \frac{9}{80} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})^2 + \frac{1}{\lambda} \tanh\left(\lambda \frac{d}{2}\right) \frac{45\varepsilon_{11}^2 - 210\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + 245\varepsilon_{22}^2}{1600} + \right.$$

$$\left. + ld \frac{1}{\cosh^2\left(\lambda \frac{d}{2}\right)} \frac{(3\varepsilon_{11} - 7\varepsilon_{22})^2}{640} \right] +$$

$$+ 2G_s t \left[ 2l^3 \lambda \tanh\left(\lambda \frac{d}{2}\right) - l^3 d \lambda^2 \frac{1}{\cosh^2\left(\lambda \frac{d}{2}\right)} \right] \frac{(3\varepsilon_{11} - 7\varepsilon_{22})^2}{7680}$$
2.59

Utilizando o princípio da mínima energia potencial,  $\lambda$  deve gerar  $U$  mínimo.  $\lambda$  e as deformações  $\varepsilon_{11}$  e  $\varepsilon_{22}$  da célula estão relacionadas entre si, portanto são supostos dois estados de deformação. No primeiro,  $\varepsilon_{11} \neq 0$  e  $\varepsilon_{22} = 0$ . Ao minimizar  $U$ ,  $\lambda$  é determinado e com isso  $Q_{11}$  e  $Q_{12}$  são calculados, onde  $Q_{12}$  é denominado  $Q_{12}|_{\varepsilon_{11}}$ . No segundo,  $\varepsilon_{22} \neq 0$  e  $\varepsilon_{11} = 0$ . Ao minimizar  $U$ ,  $\lambda$  é determinado e com isso  $Q_{22}$  e  $Q_{12}$  são calculados, onde  $Q_{12}$  é denominado  $Q_{12}|_{\varepsilon_{22}}$ . Por fim, o cálculo de  $Q_{12}$  para um estado qualquer de deformações no plano 102 é dado por

$$Q_{12} = \frac{1}{2}(Q_{12}|_{\epsilon_{11}} + Q_{12}|_{\epsilon_{22}}). \quad 2.60$$

Em Becker (2008), o *Golden Search* foi o método de otimização não-linear utilizado para minimizar  $U$ .

Segundo o modelo de Xu e Qiao (2002),  $G_{13}$  varia com a espessura do núcleo. Para sua obtenção, é utilizada uma técnica de homogeneização de dois passos, tendo como referência inicial as propriedades elásticas das regiões  $R = \{I;II\}$  (vide Figura 2.21). O primeiro desconsidera as faces e no segundo as mesmas são consideradas infinitamente rígidas.

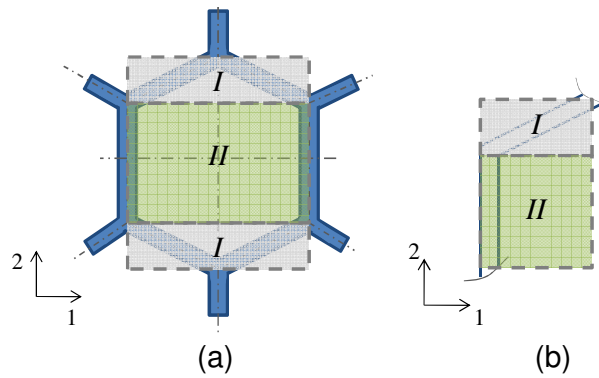


Figura 2.21 – Diferentes definições de células do núcleo hexagonal.

Para descrever a função de deslocamento gerada pelo cisalhamento no núcleo, é utilizada uma série de Fourier que satisfaz as condições de contorno de simetria celular. Com isso, é obtido um modelo matemático em forma de série, tal que

$$G_{13} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{R=I}^{II} \left\{ G_{13R} \frac{4(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2 \pi^2} \left[ r_R + \frac{\pi n a_{nR}}{b^*} \operatorname{senh} \left( \frac{b r_R \lambda_{nR}}{2} \right) \right] \right\}. \quad 2.61$$

As dimensões  $r_R$  dependem das propriedades geométricas do hexágono no plano 102 e são dados por

$$r_R = \{r_I; r_{II}\} = \left\{ \frac{l \operatorname{sen}(\alpha)}{h + l \operatorname{sen}(\alpha)}; \frac{h}{h + l \operatorname{sen}(\alpha)} \right\} \quad 2.62$$

enquanto  $b^*$  relaciona também a espessura do núcleo, sendo dada por

$$b^* = \frac{h + l \operatorname{sen}(\alpha)}{d}. \quad 2.63$$

Os  $\lambda_R$  são coeficientes da série de Fourier dependentes exclusivamente das propriedades elásticas de cada região, dados por

$$\lambda_R = \pi n \sqrt{\frac{E_3(1-\nu_{12}\nu_{21})}{G_{13}(1-\Delta)}} \Big|_R, \quad 2.64$$

onde

$$\Delta_R = (\nu_{12}\nu_{21} + \nu_{13}\nu_{31} + \nu_{23}\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} + \nu_{13}\nu_{21}\nu_{32}) \Big|_R. \quad 2.65$$

$a_R$  também são coeficientes da série de Fourier, dados por

$$a_{nI} = \frac{4(G_{13I} - G_{13II}) \sinh\left(\lambda_{nI} b * \frac{r_I}{2}\right)}{\pi \left[ -G_{13II} \lambda_{nII} \cosh\left(\lambda_{nII} b * \frac{r_I}{2}\right) \sinh\left(\lambda_{nI} b * \frac{r_{II}}{2}\right) + G_{13I} \lambda_{nI} \cosh\left(\lambda_{nI} b * \frac{r_{II}}{2}\right) \sinh\left(\lambda_{nII} b * \frac{r_I}{2}\right) \right]} \quad 2.66$$

e

$$a_{nII} = \frac{4(G_{13II} - G_{13I}) \sinh\left(\lambda_{nII} b * \frac{r_{II}}{2}\right)}{\pi \left[ -G_{13II} \lambda_{nII} \cosh\left(\lambda_{nII} b * \frac{r_I}{2}\right) \sinh\left(\lambda_{nI} b * \frac{r_{II}}{2}\right) + G_{13I} \lambda_{nI} \cosh\left(\lambda_{nI} b * \frac{r_{II}}{2}\right) \sinh\left(\lambda_{nII} b * \frac{r_I}{2}\right) \right]} \quad 2.67$$

As propriedades elásticas para o cálculo de  $\lambda_R$  e  $a_R$  no primeiro passo da homogeneização são mostradas em Masters e Evans (1996), tal que

$$\nu_{12I} = \tan^2(\alpha) \frac{1 - \left(\frac{t}{l}\right)^2}{1 + \tan^2(\alpha) \left(\frac{t}{l}\right)^2}, \quad 2.68$$

$$\nu_{21I} = \cot^2(\alpha) \frac{1 - \left(\frac{t}{l}\right)^2}{1 + \cot^2(\alpha) \left(\frac{t}{l}\right)^2}, \quad 2.69$$

$$\nu_{12II} \approx \nu_{21II} \approx 0, \quad 2.70$$

$$\nu_{13I} = \frac{\sin^3(\alpha)}{\cos^2(\alpha) \left[ 1 + \tan^2(\alpha) \left(\frac{t}{l}\right)^2 \right]} \left(\frac{t}{l}\right)^2 \nu_s, \quad 2.71$$

$$\nu_{23I} = \frac{\cos^3(\alpha)}{\sin^2(\alpha) \left[ 1 + \cot^2(\alpha) \left(\frac{t}{l}\right)^2 \right]} \left(\frac{t}{l}\right)^2 \nu_s, \quad 2.72$$

$$\nu_{13II} = \nu_s, \quad 2.73$$

$$\nu_{23II} \approx 0, \quad 2.74$$

$$E_{3I} = \frac{1}{\text{sen}(\alpha) \cos(\alpha)} \left( \frac{t_2}{l} \right) E_s, \quad 2.75$$

$$E_{3II} = \frac{1}{2 \cos(\alpha)} \left( \frac{t_2}{l} \right) E_s, \quad 2.76$$

$$G_{13I} = \tan(\alpha) \left( \frac{t}{l} \right) G_s \quad 2.77$$

e

$$G_{13II} = \frac{1}{2 \cos(\alpha)} \left( \frac{t_2}{l} \right) G_s. \quad 2.78$$

Os coeficientes de Poisson  $\nu_{31R}$  são obtidos através de  $\nu_{13R}$ ,  $E_{3R}$  e  $E_{1R}$ . Os coeficientes  $\nu_{32R}$  são nulos com base em  $\nu_{23R}$ , conforme a Equação 2.74.

### 2.7.2. Células senoidais

Para obtenção das propriedades elásticas de células senoidais nos planos 13 e 23, também pode ser utilizado método similar ao exposto por Gibson e Ashby (1997).

Assim como para células hexagonais, o módulo de elasticidade na direção 3 pode ser escrito como uma proporção direta do módulo de elasticidade da parede da célula em 3. A constante de proporcionalidade entre os módulos é a área ocupada pelas paredes no plano 1O2. Portanto, pode ser escrito que

$$E_3 = \left( \frac{1}{H} \right) (tE_2)_{\text{RETA}} + \left( \frac{L_s}{PH} \right) (tE_2)_{\text{CURVA}}, \quad 2.79$$

onde  $H$  é a amplitude,  $P$  o passo da função seno (cf. definido na Subseção 2.3.2.3) e  $L_s$  é a metade do comprimento da curva seno.

Em Xu e Qiao (2002), são deduzidas expressões dos módulos de cisalhamento transversais das células senoidais através de métodos energéticos, tal que

$$G_{13} = \left( \frac{1}{H} \right) (tG_{12})_{\text{RETA}} + \left( \frac{P}{2HL_s} \right) (tG_{12})_{\text{CURVA}} \quad 2.80$$

e

$$G_{23} = \left( \frac{2H}{PL_s} \right) (tG_{12})_{\text{CURVA}}. \quad 2.81$$

## 2.8. Caracterização mecânica de núcleos sanduíche

Os módulos de elasticidade e de cisalhamento transversais são as propriedades elásticas do núcleo de maior relevância para avaliar a rigidez de uma

estrutura sanduíche. Por isso, geralmente essas são as propriedades com ensaios normatizados em normas do tipo DIN e ASTM. As normas ASTM C365 (1994) e DIN 53291 (1982) (Figura 2.22 (a)) descrevem o método experimental de obtenção de  $E_3$  através da compressão transversal do núcleo. Os ensaios para obtenção dos módulos de cisalhamento transversais  $G_{13}$  e  $G_{23}$  são apresentados pelas normas ASTM C273 (2007) e DIN 53294 (1982) (Figura 2.22 (b)).

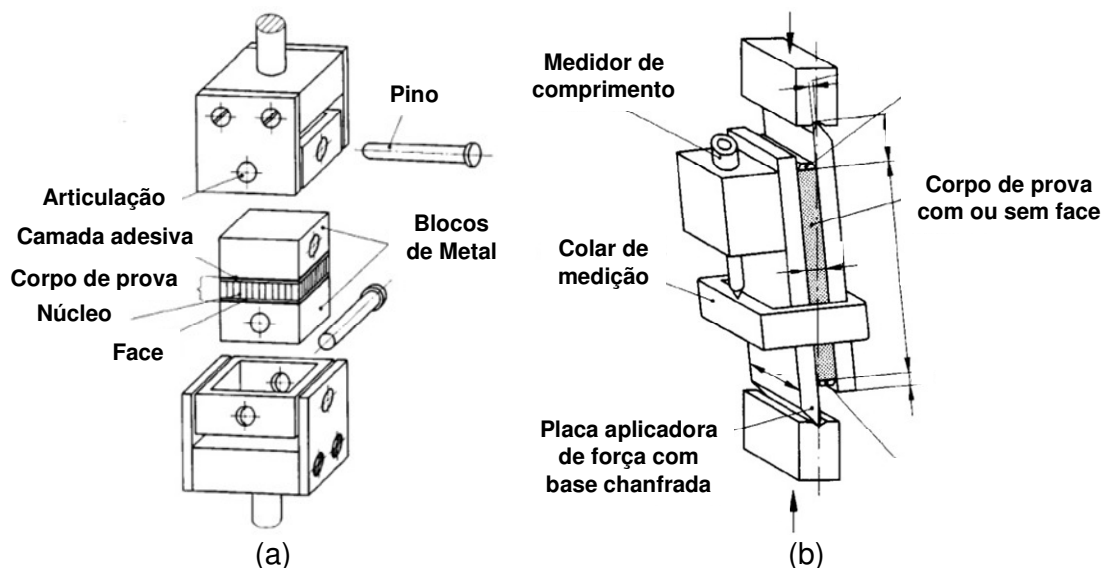


Figura 2.22 – Ensaios de núcleos sanduíche: (a) compressão e (b) cisalhamento (adaptado de DIN 53291 e DIN 53294, 1982).

Segundo as normas DIN 53291 (1982) e DIN 53294 (1982), os corpos de prova são placas de espessura  $d$ , largura  $L_1$ , e comprimento  $L_2$ , respectivamente iguais a 10, 50 e 200 mm e 10, 50 e 50, com tolerância linear de 1%. O número mínimo de corpos de prova por tipo de ensaio é de três para cisalhamento e cinco para compressão. As normas preveem que se o material do núcleo é higrotérmico, então as amostras devem permanecer a 23°C e 50% de umidade relativa do ar por um tempo suficiente para que suas massas não sofram variações maiores que 0,5%. A variação de massa ocorre devido o acúmulo de umidade. As propriedades elásticas módulos de elasticidade e cisalhamento são calculadas com base na curva força *versus* deslocamento e escritos como

$$\text{Propriedade elástica} \equiv \frac{d}{L_1 L_2} \frac{\Delta F}{\Delta D}, \quad 2.82$$

onde  $\Delta D$  representa uma variação de deslocamento para uma variação de força  $\Delta F$ .

## 2.9. Método dos elementos finitos para materiais elásticos lineares

Esta seção traz uma breve revisão dos conceitos do método dos elementos finitos proposto no Capítulo 3 como meio de determinação das propriedades elásticas equivalentes do núcleo e da face.

### 2.9.1. Discretização do problema de contorno

O método dos elementos finitos consiste em solucionar, de forma aproximada e discreta, problemas de valor no contorno descritos por equações diferenciais. Em uma dada região espacial o domínio de um corpo contínuo é discretizado por um número finito de elementos de geometrias específicas. Cada elemento é formado por um conjunto de nós onde as variáveis do problema de valor no contorno são definidas. Cada nó pode possuir movimentos em diferentes direções, em número correspondente ao seu número de graus de liberdade. O conjunto de nós que representa a estrutura possui  $n$  graus de liberdade. Para materiais elásticos lineares, os esforços  $f_i$  são função dos deslocamentos nodais  $u_i$  (em que  $i$  varia de 1 a  $n$ ) bem como da rigidez da estrutura, descrita pela matriz de rigidez global  $[K]$ , tal que

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1j} & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \\ K_{i1} & & K_{ij} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ K_{n1} & & & & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}. \quad 2.83$$

A matriz  $[K]$  depende do material e da geometria da estrutura. Após a imposição das condições de contorno, essa matriz será não singular, portanto admite inversa e existe a solução para o vetor  $u$ .

### 2.9.2. Elemento de viga de dois nós com três graus de liberdade por nó

O elemento de viga é utilizado para discretizar corpos contínuos unidimensionais submetidos a cargas axiais e de flexão e é representado por uma seção de linha reta com nós nas extremidades. No plano, cada nó possui três graus de liberdade, podendo experimentar duas translações, definidas como  $u_x$  e  $u_y$ , e uma rotação, dada por  $\theta_z$ , como mostra a Figura 2.23.

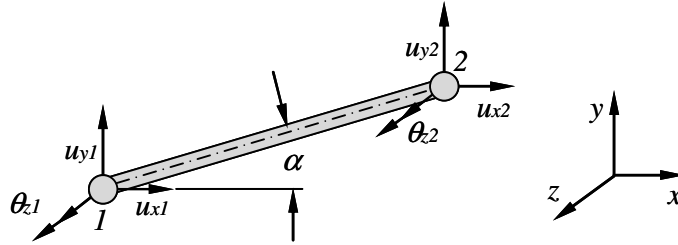


Figura 2.23 – Elemento de viga de dois nós com três graus de liberdade por nó.

As funções de interpolação, que aproximam a função de deslocamento, podem ser lineares para a translação no eixo axial e polinômios cúbicos para as translações transversais e rotações. Segundo Cook *et al.* (1989), a matriz de rigidez do elemento no sistema local  $[\bar{K}_e]$  depende da geometria e do material do mesmo e pode ser escrita através da superposição dos efeitos de barra e viga, tal que

$$[\bar{K}_e] = \begin{bmatrix} ka_e & 0 & 0 & -ka_e & 0 & 0 \\ & kd_e & kc_e & 0 & -kd_e & kc_e \\ & & 4kb_e & 0 & -kc_e & 2kb_e \\ & & & ka_e & 0 & 0 \\ & & & & kd_e & -kc_e \\ & & & & & 4kb_e \end{bmatrix}, \quad 2.84$$

onde

$$ka_e = E_e A_e / L_e, \quad kb_e = E_e I_e / L_e, \quad kc_e = 6 E_e I_e / L_e^2 \text{ e } kd_e = 12 E_e I_e / L_e^3. \quad 2.85$$

Esta matriz relaciona os carregamentos e os deslocamentos no sistema de coordenadas do elemento.

Para a relação no sistema de coordenadas globais, é aplicada uma transformação de coordenadas, em que a orientação de cada elemento é dada pelo ângulo  $\alpha$  (vide Figura 2.23). A matriz de transformação pode ser escrita como

$$[T_e] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad 2.86$$

onde  $c = \cos(\alpha)$  e  $s = \text{sen}(\alpha)$ . A relação entre deslocamentos e carregamentos no sistema global é dada por

$$[T_e]_{6 \times 6}^T [\bar{K}_e]_{6 \times 6} [T_e]_{6 \times 6} \{u_e\}_{6 \times 1} = \{F_e\}_{6 \times 1} \quad 2.87$$

No sistema de coordenadas globais, é escrito que

$$[K_e] \{u_e\} = \{F_e\}, \quad 2.88$$

onde  $\{F_e\}$  contém forças nas direções x e y, bem como momentos na direção z (momentos fletores).

Para um conjunto de elementos com  $nN$  nós, tem-se que

$$[K]_{3nN \times 3nN} \{u\}_{3nN \times 1} = \{F\}_{3nN \times 1}, \quad 2.89$$

onde os vetores de deslocamentos e carregamentos nodais são escritos como  $\{u_{x1} \ u_{y1} \ \theta_{z1} \ \dots \ u_{xnN} \ u_{ynN} \ \theta_{znN}\}_{3nN \times 1}$  e  $\{F_{x1} \ F_{y1} \ M_{z1} \ \dots \ F_{xnN} \ F_{ynN} \ M_{znN}\}_{3nN \times 1}$ .

Os deslocamentos nodais são obtidos através da resolução do sistema linear de equações.

### 2.9.3. Elemento plano de três nós com dois graus de liberdade por nó

O elemento de elasticidade plana é utilizado para discretizar corpos contínuos em duas dimensões e pode ser representado por um triângulo com um nó em cada vértice (vide Figura 2.24).

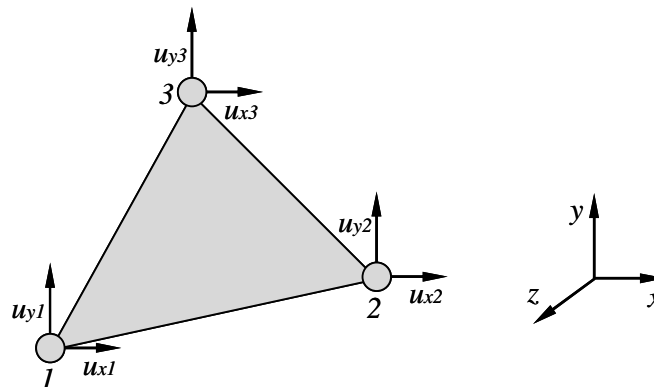


Figura 2.24 – Elemento plano de três nós com dois graus de liberdade por nó.

Cada nó possui dois graus de liberdade,  $u_x$  e  $u_y$ , obtidos através de funções de interpolação lineares. A matriz de rigidez do elemento depende do material e da

geometria do mesmo. É possível escrevê-la em função das matrizes de rigidez do material  $[C]$ , jacobiana  $[J]$  e de relação entre deformações e deslocamentos  $[B]$ . Segundo Cook *et al.* (1989), pode ser escrito que

$$[K_e] = t \frac{\det[J]}{2} [B]^T [C] [B], \quad 2.90$$

onde  $t$  representa a espessura do elemento. Se o material é ortotrópico, então  $[C]$  é equivalente a  $[\bar{Q}]$  (vide Subseção 2.5.2). Numerando os nós de um a três no sentido anti-horário e denominando  $\Delta x_{ij}$  e  $\Delta y_{ij}$  como as diferenças entre as coordenadas dos nós  $i$  e  $j$  nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, pode ser escrito, segundo Cook *et al.* (1989), que

$$[J] = \begin{bmatrix} \Delta x_{21} & \Delta y_{21} \\ \Delta x_{31} & \Delta y_{31} \end{bmatrix} \quad 2.91$$

e

$$[B] = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \Delta y_{23} & 0 & \Delta y_{31} & 0 & \Delta y_{12} & 0 \\ 0 & \Delta x_{32} & 0 & \Delta x_{13} & 0 & \Delta x_{21} \\ \Delta x_{32} & \Delta y_{23} & \Delta x_{13} & \Delta y_{31} & \Delta x_{21} & \Delta y_{12} \end{bmatrix}. \quad 2.92$$

### 3 APRESENTAÇÃO DOS MÉTODOS

Este capítulo descreve os modelos teóricos, numéricos e experimentais utilizados para determinar as propriedades elásticas equivalentes de núcleos e faces da estrutura sanduíche estudada. Tais modelos são baseados em fundamentos teóricos apresentados na bibliografia e descritos no Capítulo 2, e se aplicam à estrutura sanduíche de interesse.

#### 3.1. Modelagem da lâmina de papel

Para obter um modelo matemático que descrevesse o comportamento mecânico dos papéis analisados, foram consideradas algumas simplificações referentes à macroestrutura, homogeneidade, comportamento elástico, ortotropia, temperatura e umidade.

##### 3.1.1. Restrições do tipo de papel

Os tipos de papéis mais utilizados para fabricação de núcleos sanduíche são *Kraftliner* e *Testliner*. Neste trabalho, foram considerados os papéis *Kraftliner*, *Testliner 1* e *Testliner 3*. Os papéis que constituem os núcleos analisados foram fabricados pela empresa *Svenska Cellulosa Aktiebolaget S.A.* e possuem as seguintes nomenclaturas comerciais: *SCA Kraftliner*, *SCA Testliner 1* e *SCA Testliner 3*.

##### 3.1.2. Macroestrutura

Tendo em vista a restrição do papel e do fabricante, os tipos de madeira, celulose, polpas e processo de fabricação utilizados na obtenção dos papéis são fixos. No entanto, os detalhes relacionados com esses fatores não são conhecidos. Com isso, um modelo de escala microscópica que leva em consideração a heterogeneidade, geometria e composição das fibras, bem como a ligação entre fibras é inviável.

##### 3.1.3. Homogeneização

Se a heterogeneidade é desconsiderada, então o papel pode ser modelado como lâmina homogênea de espessura e gramatura constantes. Neste caso, suas propriedades mecânicas constitutivas na direção ZD podem ser desconsideradas.

Além disso, se o processo de laminação gera dois planos de simetria perpendiculares ao plano da lâmina de papel, então ele possui comportamento ortotrópico (SZEWCZYK *et al.*, 2006).

#### 3.1.4. Comportamento elástico

Existem diferentes modelos reológicos para avaliação da viscoelasticidade do papel celulose, como mostrado em Nissan e Sternstein (1962). Tais modelos têm como dados algumas propriedades do papel de difícil obtenção. Após a análise dos resultados dos ensaios de caracterização dos núcleos, foi observado que seu comportamento mecânico é aproximadamente linear elástico. A partir disso, o papel foi considerado linear elástico. Essa aproximação é razoável para baixos níveis de tensões e deformações. A rigidez à tração é fornecida pelo fabricante, sendo obtida experimentalmente segundo a norma DIN EN ISO 1924-3 (2008).

#### 3.1.5. Ortotropia

Adotando um modelo de material sólido homogêneo linear elástico e ortotrópico sob as direções MD e CD, as propriedades elásticas em diferentes direções são descritas em função de  $E_{MD}$ ,  $E_{CD}$ ,  $G_{MDCD}$  e  $\nu_{MDCD}$ . As duas primeiras foram definidas como sendo a razão entre a rigidez à tração e a espessura, com dados conforme exposto SCA (2011). O coeficiente  $\nu_{MDCD}$  foi definido como 0,293 e o módulo de cisalhamento determinado a partir da Equação 2.2 (BAUM *et al.*, 1981).

#### 3.1.6. Temperatura e umidade controlada

Existem métodos analíticos, numéricos e experimentais para avaliar a influência da umidade nas propriedades físicas dos papéis dos tipos estudados (ROMANS, 2008). No entanto, o modelo adotado é elaborado sem a influência da temperatura e umidade. Esse modelo é indicado para temperatura de 23°C e umidade de 50% equivalentes às previstas nos ensaios laboratoriais utilizados para obtenção das propriedades elásticas do papel.

### 3.2. Representação das faces através de modelo da micromecânica

Foi proposto um modelo baseado na micromecânica para representar o não-tecido. Tal modelo utiliza como base alguns conceitos mostrados no Apêndice B sobre a micromecânica de materiais compostos com reforço unidirecional.

Inicialmente, é determinado um modelo para uma lâmina de um não-tecido bidirecional hipotético.

A Figura 3.1 (a) mostra uma célula tridimensional que representa o composto reforçado por fibras em duas direções. Já a Figura 3.1 (b) mostra um modelo bidimensional que equivale a dois modelos unidirecionais identificados como sistemas s1 e s2.

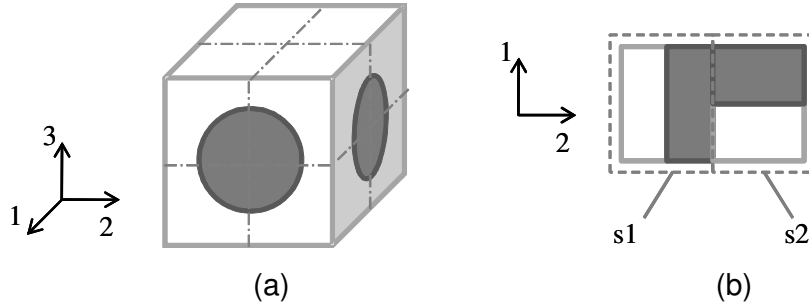


Figura 3.1 – Modelo do conjunto fibra e matriz para tecido bidirecional.

É necessário identificar as quantidades de fibras em cada sistema ou direção, aqui chamadas de  $n_{s1}$  e  $n_{s2}$ . Por exemplo,  $n_{s2}/n_{s1}$  é a quantidade de fibra na direção 2 em relação à quantidade na direção 1. Assim,

$$\varphi_{s1} = \left( \frac{n_{s1}}{n_{s1} + n_{s2}} \right) \varphi \tag{3.1}$$

e

$$\varphi_{s2} = \left( \frac{n_{s2}}{n_{s1} + n_{s2}} \right) \varphi. \tag{3.2}$$

Os sistemas ocupam o mesmo volume, com isso pode ser escrito que

$$E_1 = \frac{1}{2} (E_{1s1} + E_{2s2}) \tag{3.3}$$

e

$$\frac{1}{E_2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{E_{2s1}} + \frac{1}{E_{1s2}} \right), \tag{3.4}$$

onde

$$E_{1s1} = E_m (1 - \varphi_{s1}) + E_{f1} \varphi_{s1}, \tag{3.5}$$

$$E_{1s2} = E_m (1 - \varphi_{s2}) + E_{f1} \varphi_{s2}, \tag{3.6}$$

$$\frac{1}{E_{2s1}} = \frac{1}{E_m} (1 - \varphi_{s1}) + \frac{1}{E_{f2}} \varphi_{s1} \tag{3.7}$$

e

$$\frac{1}{E_{2s2}} = \frac{1}{E_m}(1 - \varphi_{s2}) + \frac{1}{E_{f2}}\varphi_{s2}. \quad 3.8$$

Para o módulo de cisalhamento, vem que

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{G_{12s1}} + \frac{1}{G_{12s2}} \right), \quad 3.9$$

onde

$$\frac{1}{G_{12s1}} = \frac{1}{G_m}(1 - \varphi_{s1}) + \frac{1}{G_{f12}}\varphi_{s1} \quad 3.10$$

e

$$\frac{1}{G_{12s2}} = \frac{1}{G_m}(1 - \varphi_{s2}) + \frac{1}{G_{f12}}\varphi_{s2}. \quad 3.11$$

Para o coeficiente de Poisson, tem-se que

$$\nu_{12} = \frac{1}{2}(\nu_{12s1} + \nu_{12s2}), \quad 3.12$$

onde

$$\nu_{12s1} = \nu_m(1 - \varphi_{s1}) + \nu_{f12}\varphi_{s1} \quad 3.13$$

e

$$\nu_{12s2} = \nu_m(1 - \varphi_{s2}) + \nu_{f12}\varphi_{s2}. \quad 3.14$$

Se o tipo de fibra é o mesmo para os dois sistemas, então as expressões das propriedades elásticas equivalentes podem ser simplificadas.

### 3.3. Propriedades equivalentes do núcleo hexagonal – Métodos analíticos

A partir de um carregamento conhecido em uma dada direção, obtém-se os deslocamentos, em seguida calculam-se tensões e deformações e, através da relação entre essas duas últimas, obtém-se as propriedades elásticas. Este processo é mostrado nesta seção tanto para o plano longitudinal quanto para os planos transversais.

#### 3.3.1. Plano longitudinal

Uma célula hexagonal possui simetrias, por isso, na determinação das propriedades elásticas equivalentes é conveniente adotar regiões parciais do hexágono como célula. A Figura 3.2 mostra a célula adotada para determinar o módulo de elasticidade na direção 1,  $E_l$ , sob uma condições de contorno hipotéticas.

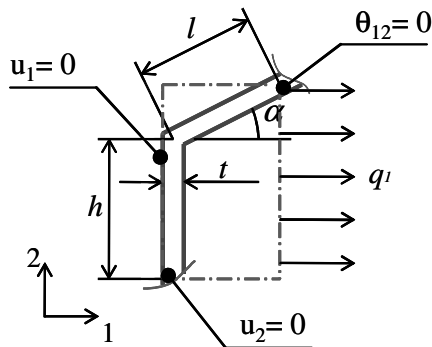


Figura 3.2 – Célula adotada para determinar  $E_I$ .

É aplicada uma força por unidade de comprimento  $q_l$  em  $L_1$ . A parede vertical é restrita em 1, portanto o deslocamento devido à deformação da célula na direção 1 depende exclusivamente da deformação da parede inclinada. Por isso, esse modelo também é válido para núcleos com parede dupla. Devido ao espaço vazio do lado direito da célula, a força se concentra na parte superior da parede inclinada, sendo dada por

$$F_1 = q_l [h + l \text{sen}(\alpha)]. \tag{3.15}$$

A parede vertical não sofre rotação, por isso são gerados momentos nas extremidades das paredes inclinadas. O problema pode ser descrito como uma viga sujeita às condições de contorno mostradas na Figura 3.3. Os eixos  $s$  referem-se à lâmina ortotrópica que representa a parede.

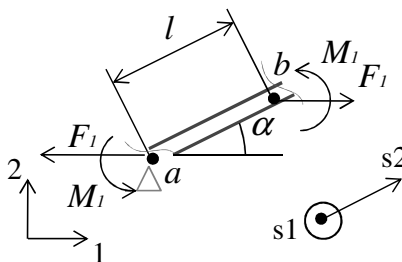


Figura 3.3 – Modelo de viga para determinar  $E_I$ .

O momento fletor pode ser escrito como

$$M_1 = F_1 \left( \frac{l \text{sen}(\alpha)}{2} \right). \tag{3.16}$$

Através do modelo clássico de viga (teoria de Euler-Bernoulli), a deflexão em  $b$  na direção 1, escrita como  $\delta_1$ , é obtida pela integração da equação da linha elástica e aplicação das condições de contorno em  $a$  e  $b$ . Assim,

$$\delta_1 = \frac{M_1}{E_{s2}I} \left( \frac{l^2}{6} \right), \quad 3.17$$

onde  $I$  é o momento de inércia da viga, dado por

$$I = \frac{dt^3}{12}, \quad 3.18$$

tal que  $d$  representa a espessura do núcleo (vide Figura 2.19). A deformação normal da célula da Figura 3.2 na direção 1 é então dada por

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta \sin(\alpha)}{l \cos(\alpha)}. \quad 3.19$$

Utilizando a lei de Hooke para estado uniaxial de tensões, o módulo de elasticidade na direção 1 é dado por

$$E_1 = \frac{\left( \frac{q_1}{d} \right)}{\varepsilon_1}. \quad 3.20$$

A expressão entre parênteses é uma força por unidade de área, a partir da qual e substituindo as equações pertinentes, é obtido que

$$E_1 = E_{s2} \left( \frac{t}{l} \right)^3 \frac{\cos(\alpha)}{\left( \left( \frac{h}{l} \right) + \sin(\alpha) \right) \sin^2(\alpha)}. \quad 3.21$$

Esta equação é válida para ambas as configurações de hexágonos, pois  $t$ , nas expressões acima, é referente à parede inclinada.

Para determinar o módulo de elasticidade na direção 2, é adotado o mesmo modelo de viga, com condições de contorno mostradas na Figura 3.4.

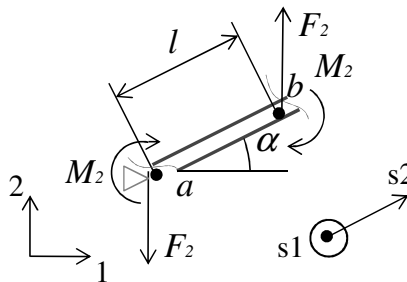


Figura 3.4 – Modelo de viga para determinar  $E_2$ .

Adotando procedimento análogo ao utilizado para determinar  $E_1$ , segue que

$$F_2 = q_2 l \cos(\alpha), \quad 3.22$$

$$M_2 = F_2 \left( \frac{l \cos(\alpha)}{2} \right), \quad 3.23$$

$$\delta_2 = \frac{M_2}{E_{s2} I} \left( \frac{l^2}{6} \right), \quad 3.24$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\delta_2 \cos(\alpha)}{h + l \sin(\alpha)} \quad 3.25$$

e

$$E_2 = \frac{\left( \frac{q_2}{d} \right)}{\varepsilon_2}. \quad 3.26$$

A expressão entre parênteses é uma força por unidade de área, a partir da qual, substituindo as equações pertinentes, é obtido que

$$E_2 = E_{s2} \left( \frac{t}{l} \right)^3 \frac{\left( \left( \frac{h}{l} \right) + \sin(\alpha) \right)}{\cos^3(\alpha)}. \quad 3.27$$

Esta expressão é válida para ambas as configurações de hexágonos apresentados.

O coeficiente de Poisson  $\nu_{12}$  é função das deformações em 1 e 2, tal que

$$\nu_{12} = \frac{\cos^2(\alpha)}{\left( \left( \frac{h}{l} \right) + \sin(\alpha) \right) \sin(\alpha)}. \quad 3.28$$

O módulo de cisalhamento  $G_{12}$  não é o mesmo para os casos de parede simples e dupla. Isso porque a parede vertical também sofre deformação cisalhante. Uma célula adequada para essa análise é mostrada na Figura 3.5, a qual é similar à célula de paredes simples utilizada em Gibson e Ashby (1997).

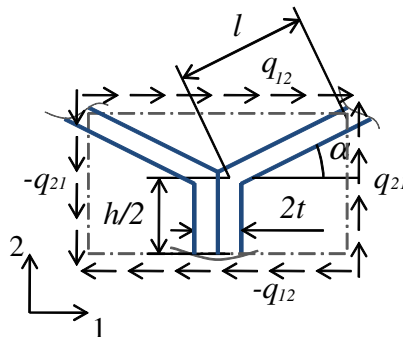


Figura 3.5 – Célula adotada para determinar  $G_{12}$ .

Devido às simetrias, a deformação cisalhante da parede vertical e da célula são iguais. Assim, é adotado um modelo de viga como mostra a Figura 3.6.

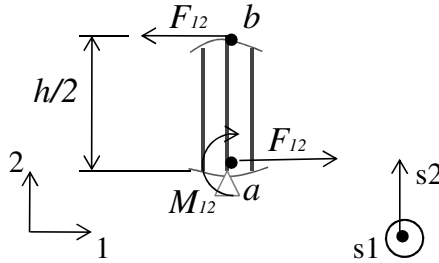


Figura 3.6 – Modelo de viga para determinar  $G_{12}$ .

Análogo à obtenção dos módulos de elasticidade, tem-se que

$$G_{12} = E_{s2} \left( \frac{t_2}{l} \right)^3 \frac{\left[ \left( \frac{h}{l} \right) + \text{sen}(\alpha) \right]}{\left( \frac{h}{l} \right)^2 \left[ 1 + 2 \left( \frac{h}{l} \right) \right] \cos(\alpha)}. \quad 3.29$$

A espessura  $t_2$  é referente à parede vertical, de tal forma que nas configurações para paredes simples e dupla,  $t_2 = t$  e  $t_2 = 2t$ , respectivamente.

### 3.3.2. Planos transversais

As propriedades elásticas de engenharia nos planos 103 e 203 (vide Figura 2.19) são:  $E_3, G_{13}, G_{23}, \nu_{13}, \nu_{23}, \nu_{31}$  e  $\nu_{32}$ . Em geral, as paredes do núcleo são alinhadas com o eixo 3. Com isto, na presença de tração ou compressão nesta direção, para pequenas deformações, o módulo de elasticidade  $E_3$  é diretamente proporcional à  $E_{s3}$  (GIBSON e ASHBY, 1997). Se as paredes possuem material isotrópico, então  $E_3 \propto E_s$ . Para paredes em material ortotrópico, sabendo que  $E_{s3} = E_{s1}$ , então  $E_3 \propto E_{s1}$ . A constante de proporcionalidade é a parcela de material ocupado pelas paredes no plano 102. Por isso,  $E_3$  é diferente para as configurações de parede vertical simples e dupla. Com base na geometria de uma célula, é obtida a expressão

$$E_3 = \left[ \frac{2lt + ht_2}{2l \cos(\alpha)(h + l \text{sen}(\alpha))} \right] E_{s1}. \quad 3.30$$

O módulo  $E_3$  é diferente entre as regiões com paredes verticais e inclinadas, regiões *I* e *II* respectivamente (ver Figura 2.21) (XU e QIAO, 2002). No entanto, a Equação 3.30 considera que as bordas das paredes das duas regiões se deformam igualmente sob um carregamento na direção 3. Portanto,  $E_3$  obtido a partir da Equação 3.30 é o módulo de elasticidade equivalente entre as regiões. Isso pode ser considerado como uma homogeneização dentro da célula. Esse nível de homogeneização está implícito nas equações da seção anterior para determinação de propriedades no plano 102.

Os coeficientes de Poisson  $\nu_{31}$  e  $\nu_{32}$  também diferem por região (MASTERS e EVANS, 1996). Tomando a Figura 2.21 (b) como referência, esses podem ser escritos para paredes em material isotrópico como

$$\nu_{31I} = \cos(\alpha)\nu_s, \quad \mathbf{3.31}$$

$$\nu_{31II} = \nu_s, \quad \mathbf{3.32}$$

$$\nu_{32I} = \sin(\alpha)\nu_s \quad \mathbf{3.33}$$

e

$$\nu_{32II} \approx 0. \quad \mathbf{3.34}$$

Segundo Gibson e Ashby (1997), os coeficientes homogeneizados para a célula e ainda homogeneizados para todo o núcleo são dados por

$$\nu_{31} = \nu_{32} = \nu_s. \quad \mathbf{3.35}$$

Os coeficientes  $\nu_{13}$  e  $\nu_{23}$  são, em geral, considerados nulos, pois o módulo de elasticidade na direção 3 normalmente é muito maior que  $E_1$  e  $E_2$ .

A distribuição de tensões e deformações na célula sob cisalhamento referente à direção 3 não é uniforme. Por isso, uma forma indicada para analisar  $G_{13}$  e  $G_{23}$  é utilizar métodos energéticos (GIBSON e ASHBY, 1997).

É considerado o modelo unidimensional apresentado no Apêndice A. Como o material é linearmente elástico, o deslocamento é uma função linear da força. Com isso, o trabalho realizado pela força é dado por

$$W = \frac{1}{2} Fu . \quad 3.36$$

Escrevendo em função da tensão e deformação, tem-se que

$$W = \frac{1}{2} \sigma A \epsilon l \Rightarrow W = \frac{1}{2} \sigma \epsilon V , \quad 3.37$$

onde  $V$  representa volume. Com base na relação constitutiva, o trabalho pode ser escrito em função da tensão e da deformação separadamente. Aplicando a lei de Hooke uniaxial, tem-se que

$$W = \frac{1}{2} E \epsilon^2 V \quad 3.38$$

e que

$$W = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} V . \quad 3.39$$

Essas equações podem ser aplicadas para o caso tridimensional para materiais isotrópicos. Supondo um carregamentos de cisalhamento, o trabalho total pode ser escrito por

$$W = \frac{1}{2} G \gamma^2 V \quad 3.40$$

e por

$$W = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} V , \quad 3.41$$

onde  $V$  é o volume de material cisalhado. As equações 3.40 e 3.41 também podem ser aplicadas para materiais ortotrópicos, como a célula da Figura 2.21(b). Para esse caso, tem-se que  $\gamma = \{\gamma_{23}; \gamma_{13}\}$ ,  $G = \{G_{23}; G_{13}\}$ ,  $\tau = \{\tau_{23}; \tau_{13}\}$  e o volume pode ser escrito como

$$V = 2d \cos(\alpha) l [h + \text{sen}(\alpha) l] . \quad 3.42$$

Com base nos teoremas das mínimas energias potencial e complementar, o trabalho total realizado pela célula durante a deformação deve ser menor ou igual à soma dos trabalhos realizados pelas paredes de cada região. Se a parede é uma lâmina ortotrópica, o trabalho em cada parede é realizado apenas por  $\tau_{s12}$  ou por  $\gamma_{s12}$ , por isso escrito como  $W_{s12}$ . Conforme Gibson e Ashby (1997), a aplicação dos teoremas implica em uma relação entre o trabalho da célula e das paredes por região, escrita como

$$W \leq \sum_{R=I}^{II} W_{s12R} . \quad 3.43$$

Os lados esquerdo e direito da relação da expressão anterior referem-se à célula e às paredes por região, respectivamente. Para determinar  $W_{s12R}$ , as Equações 3.40 e 3.41 são escritas no sistema da parede por região, onde  $G = G_{s12}$ ,  $\gamma = \gamma_{s12R}$  e  $\tau = \tau_{s12R}$ . Assim, vem que

$$\sum_{R=I}^{II} W_{s12R} = \frac{1}{2} G_{12} (2\gamma_{12I}^2 V_I + \gamma_{12II}^2 V_{II}) \Big|_s \quad 3.44$$

e

$$\sum_{R=I}^{II} W_{s12R} = \frac{1}{2} \frac{(2\tau_{12I}^2 V_I + \tau_{12II}^2 V_{II})}{G_{12}} \Big|_s , \quad 3.45$$

onde

$$V_{sI} = dlt \quad 3.46$$

e

$$V_{sII} = dht_2 . \quad 3.47$$

As deformações nas paredes podem ser escritas em função das deformações na célula. Para isso, são supostos dois estados de deformação. Para o primeiro estado, é suposto que  $\gamma_{23} = 0$ . Com isso,

$$\gamma_{s12I} = \gamma_{13} \cos \alpha \quad 3.48$$

e

$$\gamma_{s12II} = 0 . \quad 3.49$$

Para o segundo estado, é suposto que  $\gamma_{13} = 0$ . A partir disso, vem que

$$\gamma_{s12I} = \gamma_{23} \text{sen} \alpha \quad 3.50$$

e

$$\gamma_{s12II} = \gamma_{23} . \quad 3.51$$

As tensões nas paredes podem ser escritas em função das tensões equivalentes da célula. Para isso, são supostos dois estados de tensão em equilíbrio estático. Para um estado, é suposto  $\tau_{23} = 0$ . Com isso, é realizado somatório de forças na direção 1, plano 3. Isso também pode ser escrito em função das tensões, tal que

$$2 \cos(\alpha)l[h + \text{sen}(\alpha)l]\tau_{13} = 2 \cos(\alpha)lt\tau_{s12I} + ht_2\tau_{s12II} . \quad 3.52$$

Com base na Equação 3.49, tem-se que

$$\tau_{s12II} = 0 . \quad 3.53$$

Substituindo na Equação 3.52 e isolando  $\tau_{s12I}$ , decorre que

$$\tau_{s12I} = \left[ \frac{h + \text{sen}(\alpha)l}{t} \right] \tau_{13} . \quad 3.54$$

Para o segundo estado é suposto  $\tau_{13} = 0$  e é realizado o somatório de forças em 23, direção 2 plano 3. Escrevendo a soma em função das tensões, tem-se que

$$2 \cos(\alpha)l[h + \text{sen}(\alpha)l]\tau_{23} = 2 \text{sen}(\alpha)lt\tau_{s12I} + ht_2\tau_{s12II} . \quad 3.55$$

As tensões entre as regiões estão interrelacionadas e a relação é obtida através do equilíbrio de forças na união entre as paredes. Em função das tensões, vem que

$$2\tau_{s12I} = \tau_{s12II} . \quad 3.56$$

A partir da Equação 3.55, substituindo 3.56 e isolando  $\tau_{s12I}$  e  $\tau_{s12II}$ , resulta que

$$\tau_{s12I} = \cos(\alpha)l \left[ \frac{h + \text{sen}(\alpha)l}{ht_2 + \text{sen}(\alpha)lt} \right] \tau_{23} . \quad 3.57$$

e

$$\tau_{s12II} = 2 \cos(\alpha)l \left[ \frac{h + \text{sen}(\alpha)l}{ht_2 + \text{sen}(\alpha)lt} \right] \tau_{23} . \quad 3.58$$

Os limites de  $G_{13}$  são determinados a partir de 3.40 ou 3.41. Em 3.40, são substituídas 3.42 a 3.44 e 3.47 a 3.49. Em 3.41, são substituídas 3.42, 3.43, 3.45 a 3.47, 3.53 e 3.54. Para ambos os casos, são obtidos os mesmos resultados. Assim, conclui-se que os limites são equivalentes e que  $G_{13}$  possui um valor único, tal que

$$G_{13} = \left[ \frac{\cos(\alpha)t}{h + \text{sen}(\alpha)l} \right] G_{12s} . \quad 3.59$$

Essa equação é válida para células de paredes verticais simples ou duplas.

Os limites de  $G_{23}$  também são determinados a partir de 3.40 ou 3.41. Substituindo 3.42 a 3.44, 3.46, 3.47, 3.50 e 3.51 em 3.40, vem que

$$G_{23} \leq \left\{ \frac{h \frac{t_2}{2} + \text{sen}^2(\alpha)lt}{\cos(\alpha)l[h + \text{sen}(\alpha)l]} \right\} G_{12s} = G_{23\text{máx}}. \quad 3.60$$

Substituindo 3.42, 3.43, 3.45 a 3.47, 3.57 e 3.58 em 3.41, tem-se que

$$G_{23} \geq \left\{ \frac{[ht_2 + \text{sen}(\alpha)lt]^2}{\cos(\alpha)l[h + \text{sen}(\alpha)l][2ht_2 + lt]} \right\} G_{12s} = G_{23\text{mín}} \quad 3.61$$

Esses limites não são necessariamente coincidentes. Alguns modelos mostram que uma melhor aproximação é dependente da espessura do núcleo. O modelo de Grediac, mostrado em Gibson e Ashby (1997) estabelece uma soma ponderada entre os limites, tal que

$$G_{23} = kG_{23\text{máx}} + (1-k)G_{23\text{mín}}, \quad 0 \leq k \leq 1. \quad 3.62$$

Os valores de  $k$  foram determinados através de modelos de elementos finitos, onde  $t/l = 0,08$ ;  $h/l = 1$ ;  $t_2 = t$  e  $0 < \alpha < 30^\circ$  (GIBSON e ASHBY, 1997). Nesse caso,  $k$  é variável apenas com a relação  $d/l$ , sendo dado por

$$k = 0,787 \left( \frac{d}{l} \right)^{-1}. \quad 3.63$$

### 3.4. Propriedades transversais de núcleos senoidais – Método analítico

As Equações 2.79 a 2.81 podem ser simplificadas tendo em vista que a espessura e o material das lâminas em  $s_1$  e  $s_2$  são iguais. Reescrevendo-as em função das propriedades do papel celulose no sistema MD CD, tem-se que

$$E_3 = \left( \frac{P+S}{PH} \right) t E_{MD} \quad 3.64$$

$$G_{13} = \left( \frac{2S+P}{2HS} \right) t G_{MDCD} \quad 3.65$$

e

$$G_{23} = \left( \frac{2H}{PS} \right) t G_{MDCD}. \quad 3.66$$

Os materiais de interesse são provenientes de polpa do tipo *Kraft*, assim como os materiais utilizados para determinar a Equação 2.2. Portanto, por hipótese, os módulos de elasticidade equivalentes podem ser reescritos como

$$G_{13} = 0,387 \left( \frac{2S + P}{2HS} \right) t \sqrt{E_{MD} E_{CD}} \quad 3.67$$

e

$$G_{23} = 0,387 \left( \frac{2H}{PS} \right) t \sqrt{E_{MD} E_{CD}} \quad 3.68$$

### 3.5. Modelagem do núcleo por elementos finitos de viga

A fim de obter um modelo que possa calcular as propriedades elásticas equivalentes no plano 102 para diferentes geometrias de células, foi implementada uma rotina de elementos finitos de viga em *Microsoft Excel*, com número de elementos de 1 a n.

O cálculo dos deslocamentos é feito aplicando diferentes condições de contorno, como mostrado nas Figuras 3.3, 3.4 e 3.6. Em todos os casos, os nós 1 e 11 correspondem, respectivamente, aos pontos *a* e *b*. Para o caso da Figura 3.3,

$$u_{x1} = u_{y1} = u_{xy1} = 0 \quad 3.69$$

e

$$u_{xyn} = 0. \quad 3.70$$

A condição de carregamento é então dada por

$$F_{xn} = F_1. \quad 3.71$$

Para o caso da Figura 3.4,

$$u_{x1} = u_{y1} = u_{xy1} = 0, \quad 3.72$$

$$u_{xyn} = 0 \quad 3.73$$

e

$$F_{yn} = F_2. \quad 3.74$$

Para o caso da Figura 3.6,

$$u_{x1} = u_{y1} = u_{xy1} = 0 \quad 3.75$$

e

$$F_{xn} = F_{12}. \quad 3.76$$

As propriedades elásticas equivalentes podem ser escritas em função do deslocamento relativo entre o nó 1 e o nó n. O deslocamento em 1 é nulo, portanto a

partir da resolução do sistema de equações lineares para obter  $u_n$ , as propriedades elásticas equivalentes das células podem ser calculadas. Para ambas as configurações de hexágono, pode ser escrito que

$$E_1 = \frac{\left(\frac{q_1}{d}\right)}{\left(\frac{u_{xn}}{x_1}\right)} \mid q_2 = q_{12} = 0 \wedge q_1 \neq 0, \quad 3.77$$

$$E_2 = \frac{\left(\frac{q_2}{d}\right)}{\left(\frac{u_{yn}}{y_n + h}\right)} \mid q_1 = q_{12} = 0 \wedge q_2 \neq 0, \quad 3.78$$

$$\nu_{12} = -\frac{\left(\frac{u_{yn}}{y_n + h}\right)}{\left(\frac{u_{xn}}{x_{11}}\right)} \mid q_2 = q_{12} = 0 \wedge q_1 \neq 0, \quad 3.79$$

$$\nu_{21} = -\frac{\left(\frac{u_{xn}}{x_n}\right)}{\left(\frac{u_{yn}}{y_n + h}\right)} \mid q_1 = q_{12} = 0 \wedge q_2 \neq 0. \quad 3.80$$

e

$$G_{12} = \frac{\left(\frac{q_{12}}{d}\right)}{\left(\frac{2u_{xyn}}{2y_n + l \operatorname{sen}(\alpha)}\right)} \mid q_1 = q_2 = 0 \wedge q_{12} \neq 0. \quad 3.81$$

As forças por unidade de comprimento devem ser aplicadas independentemente em cada direção. As variáveis  $x_n$  e  $y_n$  são as coordenadas do nó  $n$  no sistema  $xOy$ . Apesar da espessura do núcleo,  $d$ , e os esforços,  $q$ , aparecerem nas equações, as propriedades elásticas não dependem dessas variáveis, pois o deslocamento  $n_n$  é função das mesmas. As principais hipóteses simplificadoras desse método são: parede da célula de espessura delgada, material com coeficiente de Poisson nulo ( $\nu_s = 0$ ) e ausência das faces da estrutura sanduíche. Se a espessura é fina, então o cisalhamento transversal é desprezado, por isso é sugerido o modelo de viga de Euler-Bernoulli.

### 3.6. Ensaios de caracterização de núcleos senoidais

Os núcleos senoidais foram caracterizados quanto à compressão e cisalhamento transversais de acordo com as normas DIN 53291 (1982) e DIN 53294 (1982). Os tipos escolhidos para os ensaios possuem papelão de uso comum pelos fabricantes de núcleos feitos em papel celulose do tipo *Testliner*. As propriedades que diferenciam os tipos de corpo de prova são mostradas na Tabela 3.1. Para cada tipo, foram preparadas nove amostras, confeccionadas conforme o método de fabricação descrito na Seção 2.4.1, com faces em PP/FV30 de 400 g/m<sup>2</sup>.

Tabela 3.1 – Características dos núcleos em *Testliner* experimentados.

Nomenclatura	Gramatura do Papel Celulose [g/m <sup>2</sup> ]	Tipo de Célula	Adesivo do Papelão
A~TL90A	90	A~	PVAc
A~TL90S	90	A~	Silicato de sódio
A~TL115A	115	A~	PVAc
A~TL115S	115	A~	Silicato de sódio
C~TL115A	115	C~	PVAc
C~TL115S	115	C~	Silicato de sódio

Os ensaios foram realizados em uma máquina universal de tração e compressão da marca e modelo Schenk-Trebel RM 250, com taxa de deslocamento constante de 0,5 mm/min. As montagens dos ensaios são mostradas nas Figuras 3.7 (a) e (b). O sistema de aquisição de dados utilizado foi o *Spider 8*, com o programa *Catman*, ambos da marca HBM. A Figura 3.8 traz um exemplo da geração do diagrama de força *versus* deslocamento. O programa que lê os dados efetuou a leitura de cinco valores de força e deslocamento correspondentes por segundo, com exportação para o *Microsoft Excel*. Foram fabricadas cinco amostras para cada ensaios.

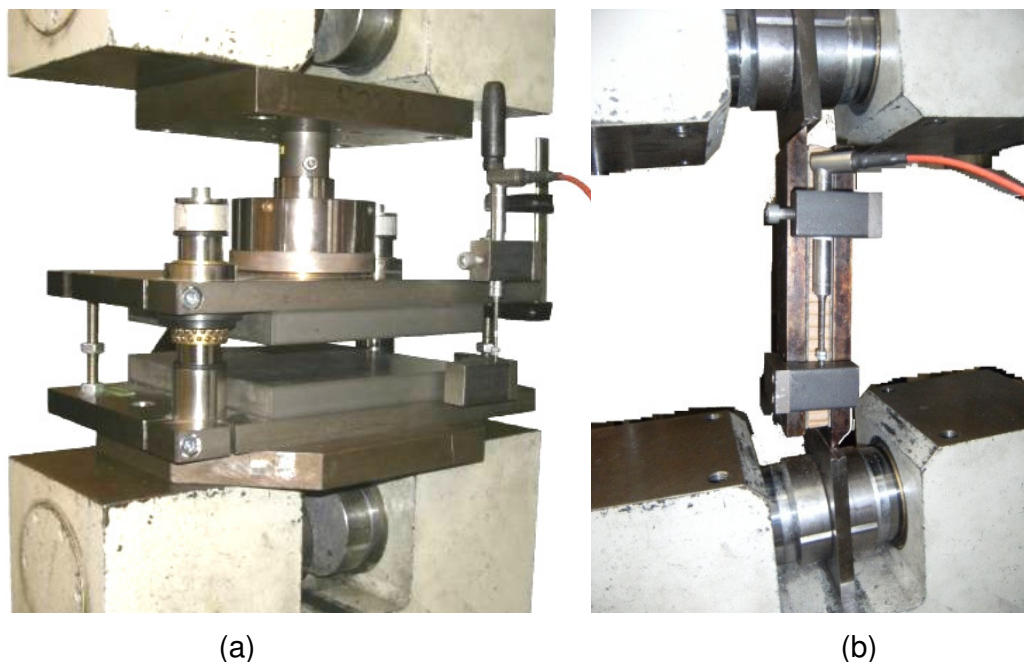


Figura 3.7 – Montagem dos ensaios: (a) compressão e (b) cisalhamento.

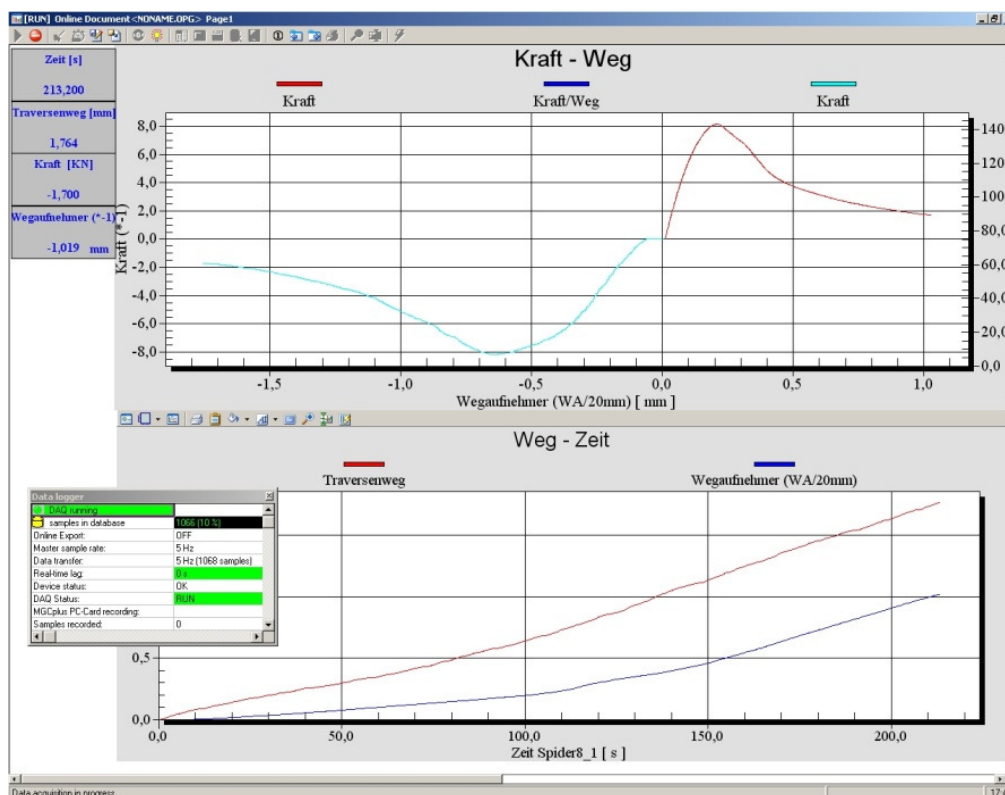


Figura 3.8 – Tela do programa *Catman* mostrando um exemplo das curvas de força versus deslocamento e deslocamento versus tempo.

### **3.7. Determinação das propriedades equivalentes das faces por elementos finitos planos**

#### **3.7.1. Hipóteses simplificadoras**

Segundo Stamp (2011), a partir de resultados experimentais, o efeito de viscoelasticidade do polipropileno em não tecidos PP/FV40 é desprezível. Com base nessa hipótese, o comportamento do material da face foi considerado elástico linear.

A matriz em polipropileno é isotrópica e as propriedades elásticas da face variam com a direção de acordo com a orientação das fibras de vidro. Conforme as características do processo de fabricação das faces, sabe-se que a distribuição das fibras na manta é simétrica em relação a duas direções principais perpendiculares entre si, identificadas como MD e CD. A partir dessa consideração, foi adotado que a manta antes da termoformagem é ortotrópica.

A variação do grau de consolidação na manta após a termoformagem possui topologia equivalente às células do núcleo no plano 12. Assim, se as direções principais das faces e dos núcleos estão alinhadas entre si, então a variação de espessura e a consequente variação de rigidez não altera significativamente a característica ortotrópica da face.

Assim como o núcleo, após a termoformagem, as faces possuem uma célula comum que se repete de forma simétrica. As propriedades constitutivas equivalentes dessa célula equivalem às propriedades de um grupo de células e, por sua vez, da face como um todo. A célula adotada é representada por um retângulo de lados perpendiculares às direções principais, onde cada lado possui condições de simetria.

As espessuras da face são pequenas em relação às suas dimensões no plano. Com isso, a variação da rigidez ao longo da espessura é desprezada e a face pode ser modelada como lâmina. As propriedades físicas e geométricas da lâmina em uma célula foram distinguidas para duas regiões distintas, identificadas como A e B. A região B possui menor espessura e maior grau de consolidação e correspondente aos locais onde as paredes do núcleo estão em contato. A região A corresponde à parte da célula da face próxima ao centro da célula do núcleo. A definição da geometria adotada é uma idealização das regiões indicadas na Figura 2.18. A Figura 3.9 mostra as geometrias idealizadas das células da face para os núcleos senoidal e hexagonal, bem como indica as regiões A e B.

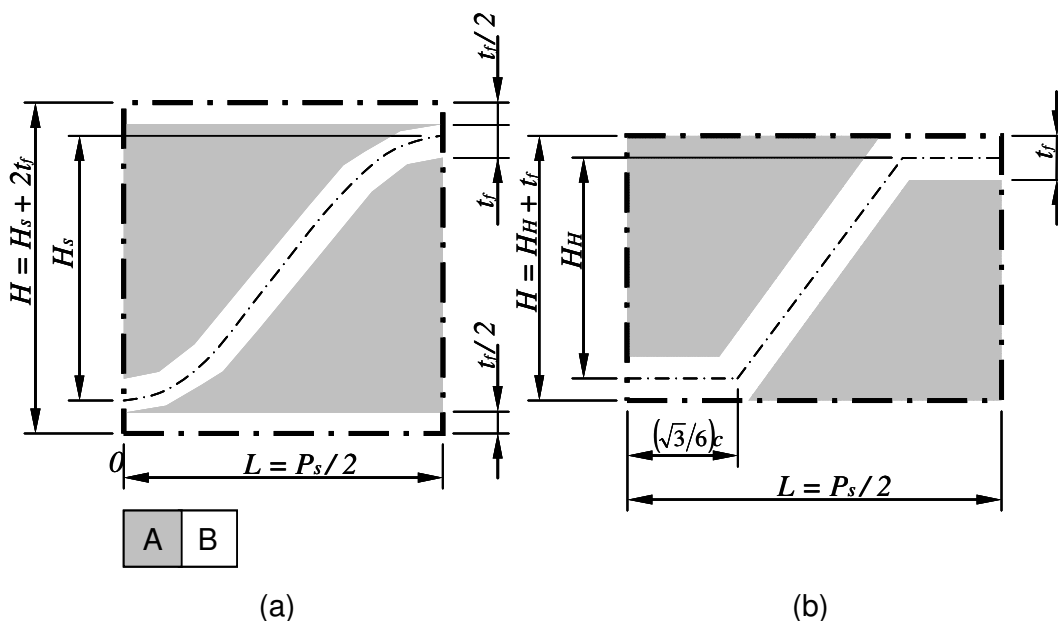


Figura 3.9 – Modelo geométrico da célula da face. (a) Senoidal e (b) hexagonal.

### 3.7.2. Propriedades elásticas equivalentes de uma placa homogênea

A partir da equação constitutiva de uma estrutura bidimensional de material sólido, homogêneo, elástico linear e válida para um ponto em ortotrópico nas direções  $x$  e  $y$ , fez-se algumas deduções. Se apenas as deformações  $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_y$  não são nulas, tal que somente  $\sigma_x$  seja não nulo, então é possível obter  $E_x$  e  $\nu_{xy}$ . Se apenas  $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_y$  não são nulos, tal que somente  $\sigma_y$  não seja nulo, então a partir de  $\nu_{xy}$  pode ser determinado  $E_y$ . Se apenas  $\gamma_{xy}$  não é nulo, então é possível determinar  $\sigma_{xy}$ .

A equação constitutiva citada também é válida para uma lâmina retangular de largura  $L$ , altura  $H$  e espessura  $t$  constante de mesmo material, desde que seus lados permaneçam retos e paralelos sob carregamento. A Figura 3.10 mostra a aplicação de deslocamentos prescritos  $\lambda$ , que geram os estados de deformação citados e cargas distribuídas  $q$  nos lados  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  e  $L_4$ .

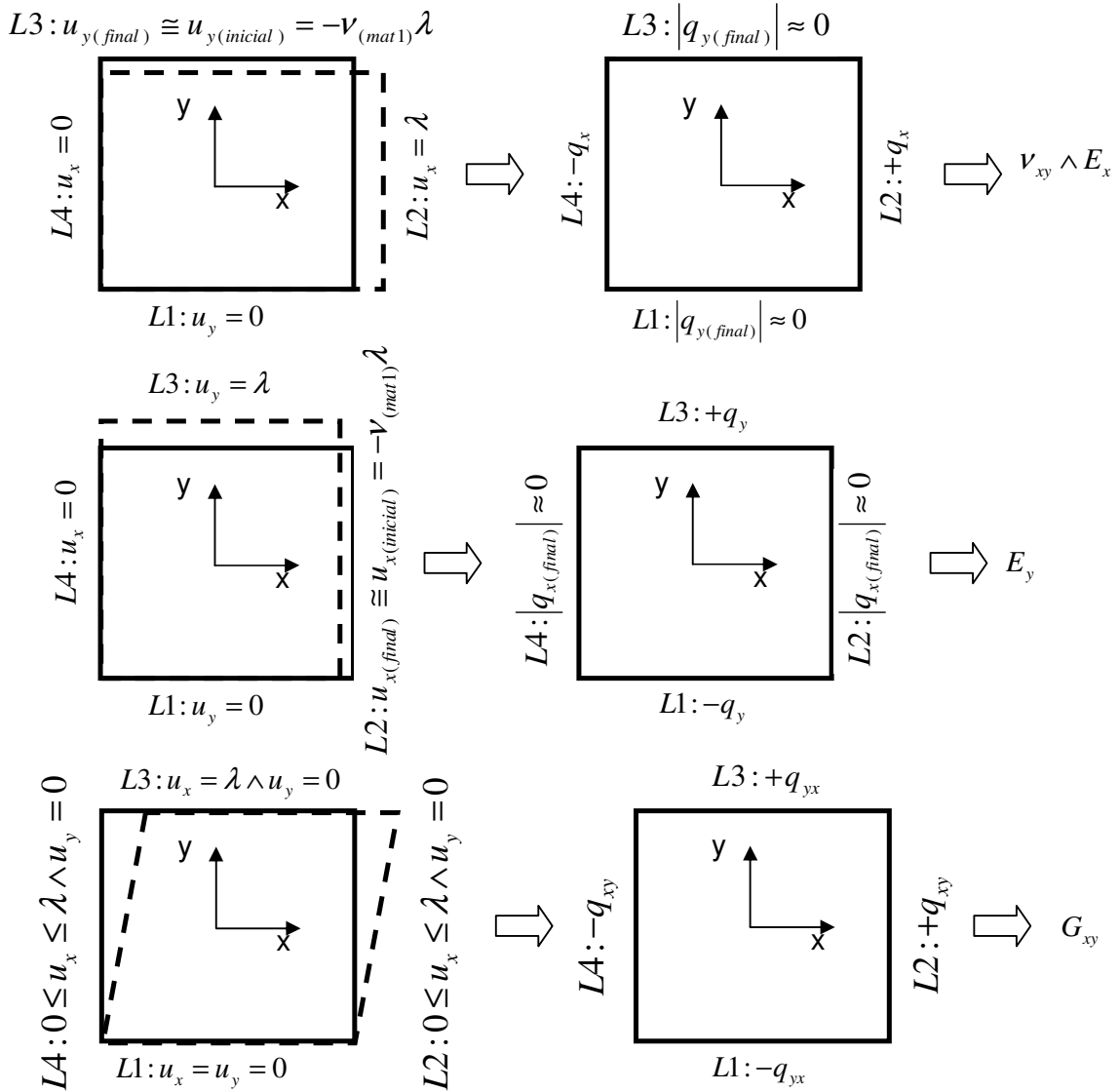


Figura 3.10 - Condições de contorno aplicadas à célula da face.

Se  $q$  é constante e por sua vez  $\varepsilon$  e  $\sigma$  também são, então

$$\sigma_i = \frac{q_i}{t} \tag{3.82}$$

e

$$\varepsilon_i = \frac{\lambda}{L}. \tag{3.83}$$

Para o primeiro caso de deformação proposto na Figura 3.10, a partir da lei de Hooke unidirecional e das Equações 3.82 e 3.83, é escrito que

$$E_x = \frac{q_x L}{t\lambda} \quad 3.84$$

e

$$v_{xy} = \frac{u_y}{\lambda} \frac{L}{H}. \quad 3.85$$

A partir da aplicação de  $\lambda$  na direção  $y$ , o módulo de elasticidade em  $y$  pode ser escrito como

$$E_y = \frac{q_y H}{t\lambda}. \quad 3.86$$

Ao aplicar  $\lambda$  nas direções  $xy$  e  $yx$ , o módulo de cisalhamento equivalente em  $xy$  pode ser obtido através da carga  $q_{xy}$  na linha  $L2$  e pode ser escrito como

$$G_{xy} = \frac{q_{xy} H}{t\lambda}. \quad 3.87$$

### 3.7.3. Propriedades elásticas equivalentes das células

Foi adotado o método mostrado na Subseção 3.7.2 para determinação das propriedades elásticas equivalentes de uma placa, porém com a geometria da célula mostrada na Figura 3.9. O cálculo das cargas  $q$  foi realizado através de um algoritmo escrito em VBA (*Visual Basic Application*). Este código utiliza o método de elementos finitos com o elemento plano descrito na Subseção 2.9.3.

## 4 APLICAÇÃO DOS MÉTODOS: RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo tem por objetivo apresentar e discutir os resultados da aplicação dos métodos mostrados no Capítulo 3. Inicialmente, são obtidas equações empíricas para a determinação das propriedades elásticas do papel celulose, bem como contemplando a variação das mesmas com a direção no plano da lâmina. As propriedades elásticas do material da face também são apresentadas e obtidas através do método dos elementos finitos. O algoritmo implementado foi testado e validado.

Na Seção 4.4 os resultados experimentais referentes às propriedades elásticas equivalentes dos núcleos senoidais são apresentados. A partir destes resultados, são mostradas as variações dos módulos de cisalhamento transversais em função da direção. As propriedades transversais experimentadas também são obtidas de forma analítica e os resultados são comparados e discutidos.

As propriedades longitudinais dos núcleos senoidais e hexagonais são obtidas através de um modelo de elementos finitos de viga. Além disso, suas grandezas são comparadas com as propriedades transversais.

### 4.1. Constantes elásticas da lâmina de papel celulose

Os módulos de elasticidade e a espessura da lâmina de papel foram representados em função da gramatura, a partir de medições experimentais obtidas pelo fabricante, conforme os procedimentos mostrados na Subseção 2.1.3 (SCA, 2011). A partir dos valores experimentais, foram realizadas regressões lineares pelo método dos mínimos quadrados e obtidas expressões matemáticas correspondentes. Com base nas expressões geradas, foram calculados os módulos de cisalhamento conforme a Equação 2.2, considerados lineares em função da gramatura. Os diagramas das Figuras 4.1 a 4.9 mostram as espessuras, módulos de elasticidade longitudinais e de cisalhamento dos papéis *SCA Kraftliner*, *SCA Testliner 1* e *SCA Testliner 3*. Os quais foram definidos na Subseção 2.1.1.3.

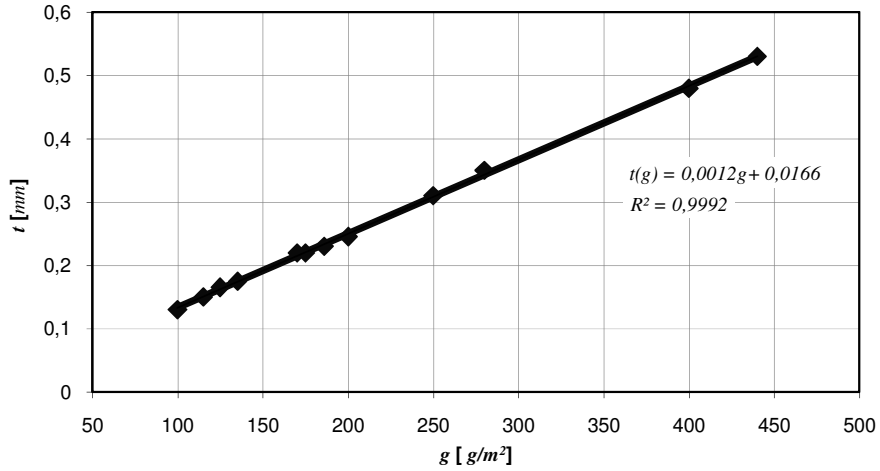


Figura 4.1 - SCA Kraftliner: espessura versus gramatura.

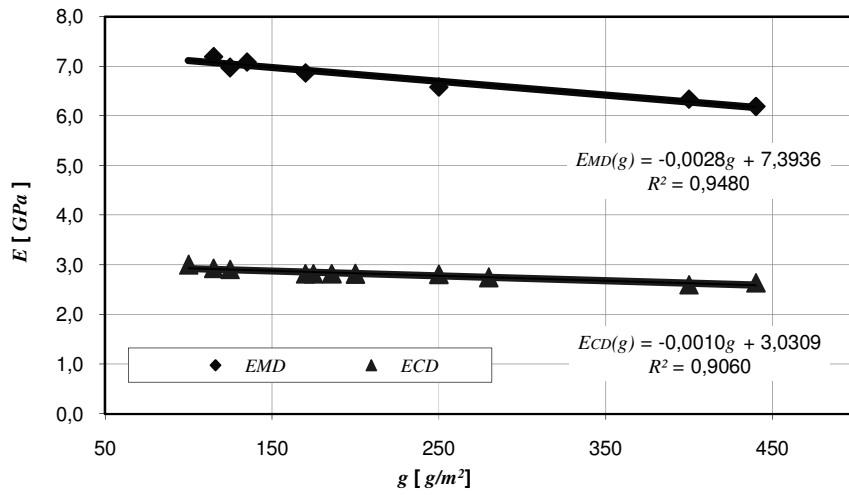


Figura 4.2 - SCA Kraftliner: módulo de Young versus gramatura.

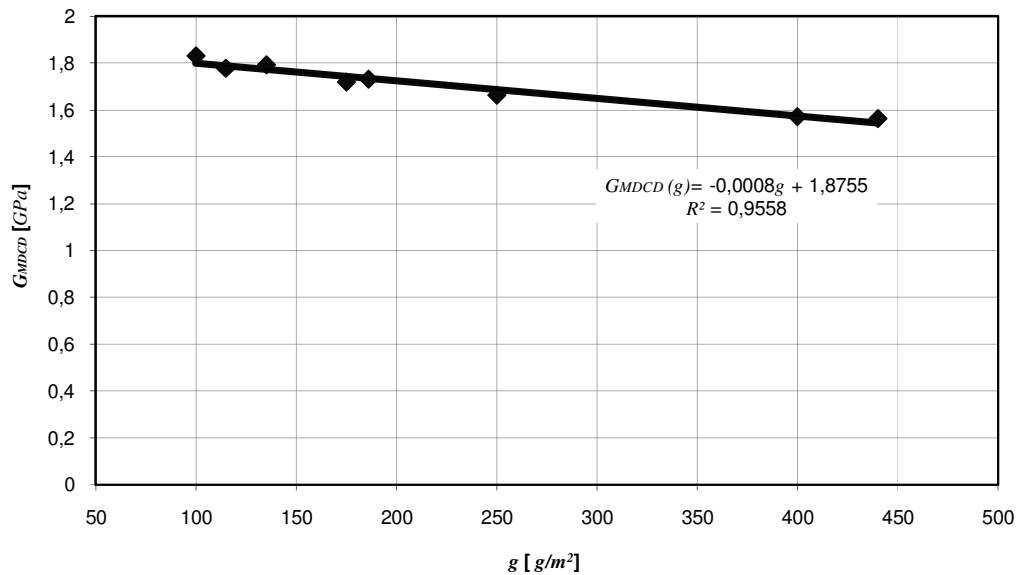


Figura 4.3 - SCA Kraftliner: módulo de cisalhamento versus gramatura.

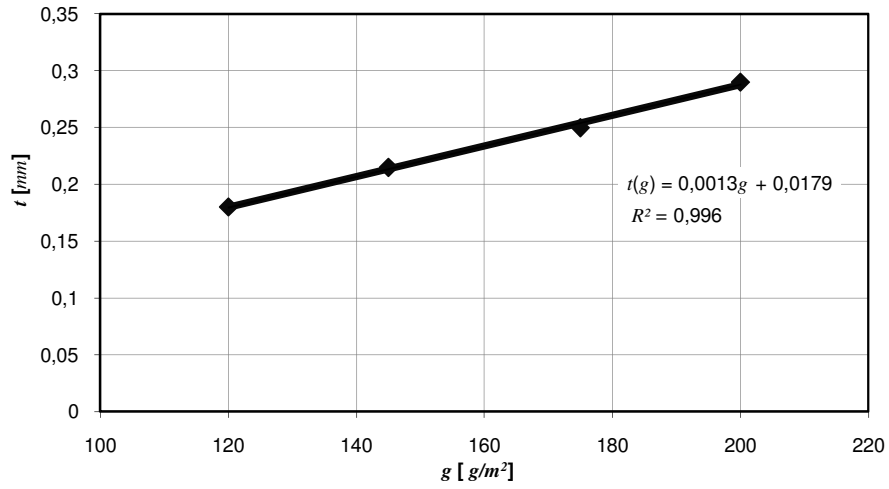


Figura 4.4 - SCA Testliner 1: espessura versus gramatura.

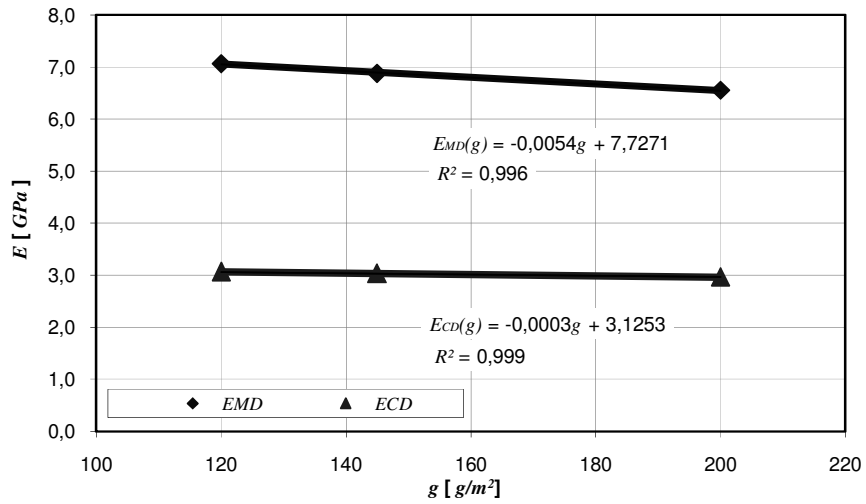


Figura 4.5 - SCA Testliner 1: módulo de Young versus gramatura.

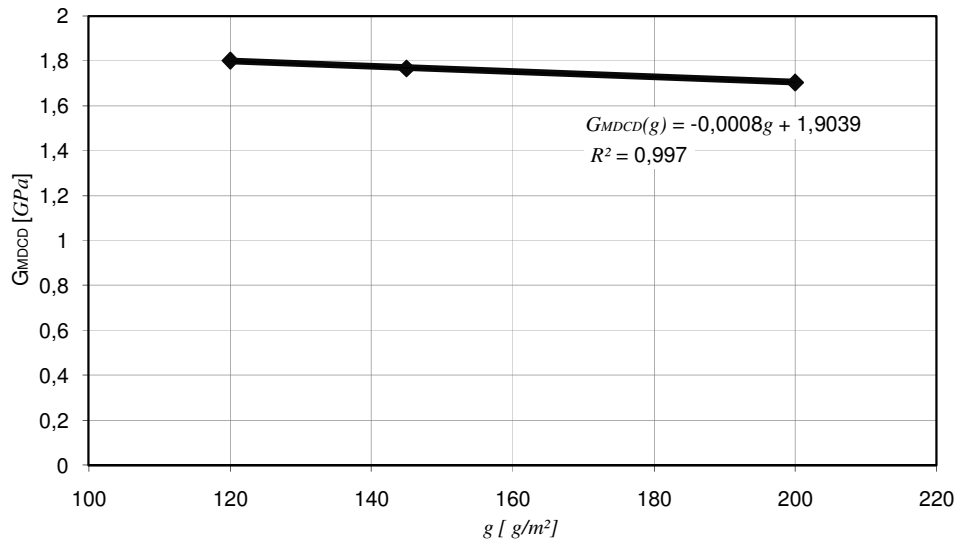


Figura 4.6 - SCA Testliner 1: módulo de cisalhamento versus gramatura.

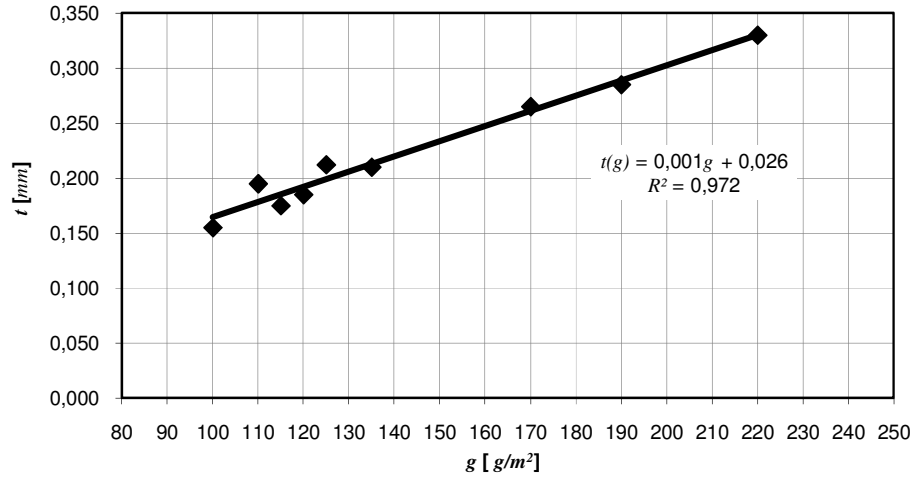


Figura 4.7 - SCA Testliner 3: espessura versus gramatura.

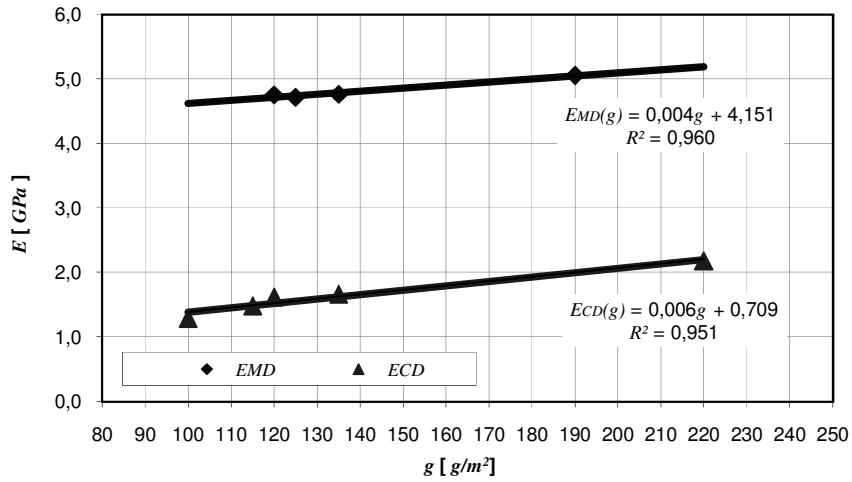


Figura 4.8 - SCA Testliner 3: módulo de Young versus gramatura.

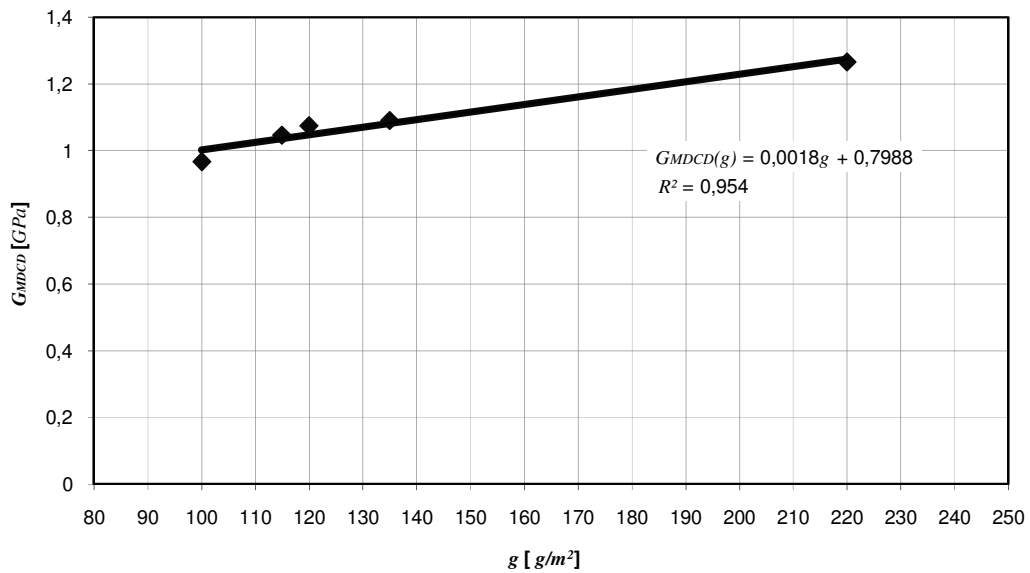


Figura 4.9 - SCA Testliner 3: módulo de cisalhamento versus gramatura.

As funções de aproximação são razoavelmente adequadas, tendo em vista que o coeficiente de determinação da regressão linear para todos os casos é maior que 0,90. Para obter tal aproximação foram excluídos alguns valores originados pelos experimentos.

A espessura sofre grande influência da gramatura, tal que papéis de maior gramatura são mais espessos. Já os módulos de elasticidade e de cisalhamento quase não variam com a gramatura. Uma explicação para esse efeito é que durante o processo de fabricação da lâmina de papel a pressão de compactação nos cilindros de laminação é aproximadamente a mesma para diferentes gramaturas. Com isso, a distribuição das fibras, heterogeneidade e outras características da microestrutura permanecem quase inalteradas.

Com base no modelo de lâmina sólida homogênea linear elástica ortotrópica (ver Apêndice A), pode-se escrever as constantes elásticas do papel em função de um ângulo  $\theta$  em relação à direção MD, tal que

$$E_{\theta} = \left[ \frac{c^4}{E_{MD}} + \frac{s^4}{E_{CD}} + s^2 c^2 \left( \frac{1}{G_{MDCD}} - 2 \frac{\nu_{MDCD}}{E_{MD}} \right) \right]^{-1}, \quad 4.1$$

$$G_{\theta} = \left[ \frac{(c^2 - s^2)^2}{G_{MDCD}} + 4s^2 c^2 \left( \frac{1}{E_{MD}} + \frac{1}{E_{CD}} + 2 \frac{\nu_{MDCD}}{E_{MD}} \right) \right]^{-1} \quad 4.2$$

e

$$\nu_{\theta} = \frac{-\frac{\nu_{MDCD}}{E_{MD}} (s^4 + c^4) + s^2 c^2 \left( \frac{1}{E_{MD}} + \frac{1}{E_{CD}} - \frac{1}{G_{MDCD}} \right)}{\frac{c^4}{E_{MD}} + \frac{s^4}{E_{CD}} + s^2 c^2 \left( \frac{1}{G_{MDCD}} - 2 \frac{\nu_{MDCD}}{E_{MD}} \right)}, \quad 4.3$$

onde  $s = \sin(\theta)$  e  $c = \cos(\theta)$ . A obtenção dessas equações é apresentada no Apêndice A.

As Figuras 4.10 a 4.15 mostram diagramas polares da variação dos módulos de elasticidade e cisalhamento no plano da lâmina com a direção  $\theta$ , para diferentes papéis. Esses diagramas foram construídos de posse das equações 4.1 a 4.9. Através desses diagramas, é possível verificar as propriedades elásticas da lâmina em todas as direções pertencentes ao plano MDCD.

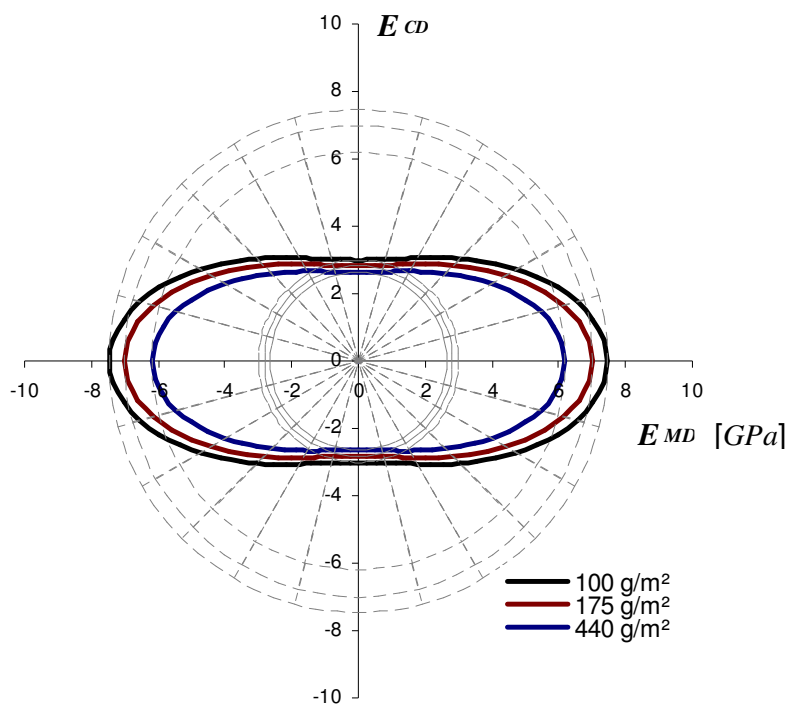


Figura 4.10 - SCA Kraftliner: diagrama polar do módulo de elasticidade.

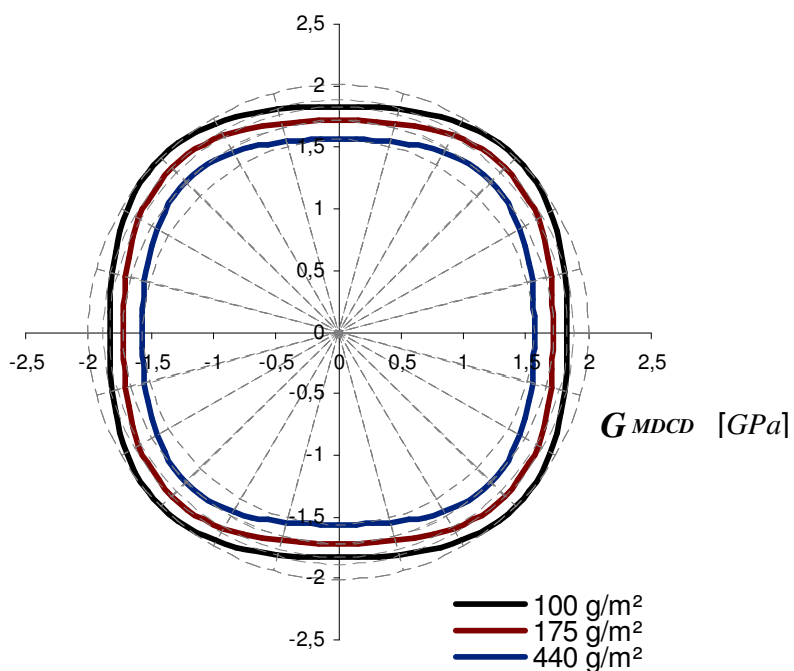


Figura 4.11 - SCA Kraftliner: diagrama polar do módulo de cisalhamento.

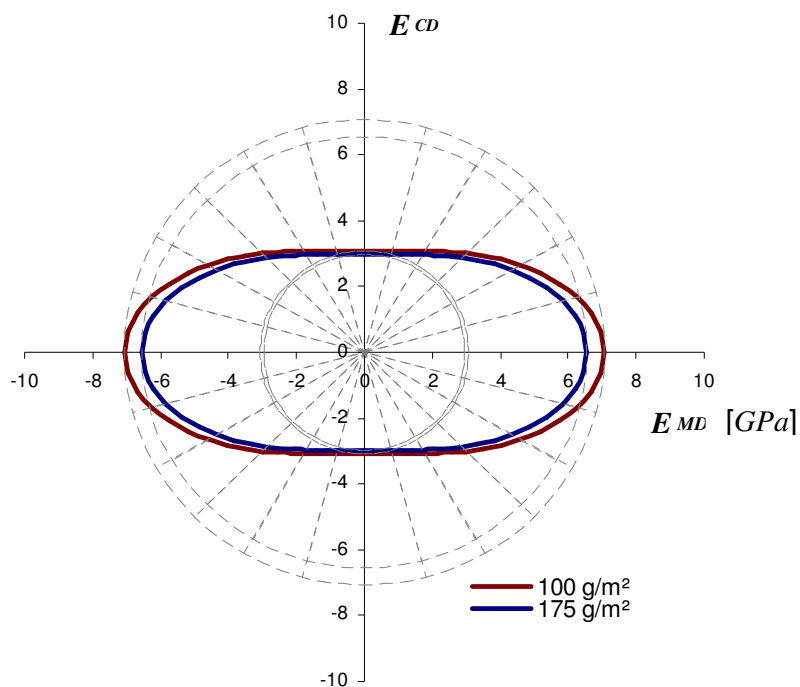


Figura 4.12 - SCA Testliner 1: diagrama polar do módulo de elasticidade.

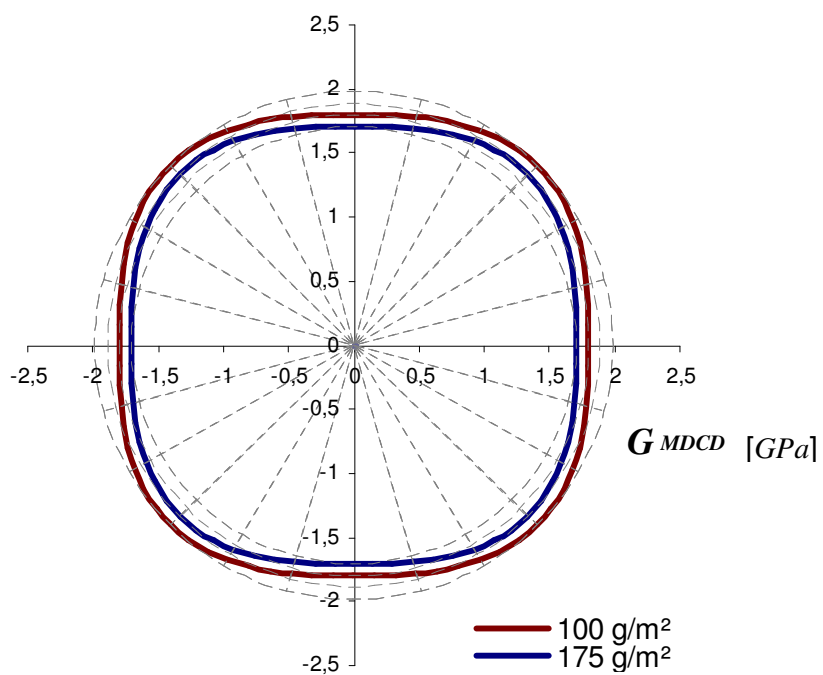


Figura 4.13 - SCA Testliner 1: diagrama polar do módulo de cisalhamento.

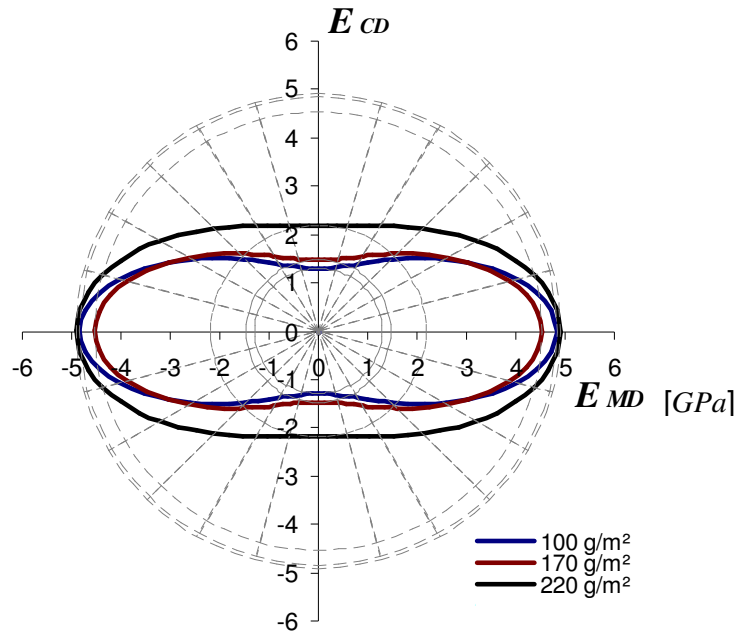


Figura 4.14 - SCA Testliner 3: diagrama polar do módulo de elasticidade.

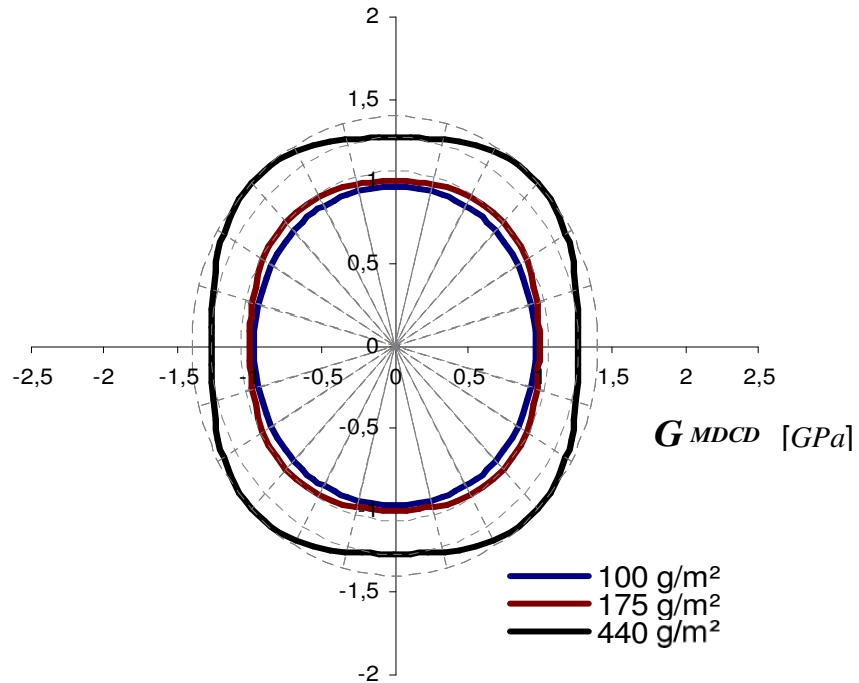


Figura 4.15 - SCA Testliner 3: diagrama polar do módulo de cisalhamento.

Conforme as equações 4.1, 4.2 e 4.3, a variação das propriedades equivalentes no plano da lâmina dependem dos módulos de elasticidade, do módulo

de cisalhamento e do coeficiente de Poisson nas direções MD e CD. Assim cada propriedade depende de quatro variáveis. Além disso, a função que a descreve a variação das mesmas com a orientação é escrita com funções trigonométricas na quarta ordem. Por isso, o formato das curvas polares é de difícil análise, no entanto é possível avaliar as curvas por alguns aspectos qualitativos.

O módulo de elasticidade possui grande variação entre as direções MD e CD. Tal efeito é causado pela orientação preferencial das fibras na direção MD. Quanto mais concavas são as curvas na direção CD, menor é a quantidade de fibras orientadas nessa direção. Ou ainda, quanto mais convexa é a curva na direção MD, maior a quantidade de fibras orientadas em tal direção.

O módulo de cisalhamento é quase constante, como citado em Baum *et al.* (1981). No entanto, tende a ser maior entre as direções MD e CD. Se a diferença entre os módulos de elasticidade nas direções MD e CD é pequena, então o módulo de cisalhamento tende a ser constante. Essa é uma propriedade observada em lâminas de papel do tipo polpa *Kraft*.

Conforme mostrado nos diagramas polares, não é possível afirmar que a gramatura possui influência significativa nos módulos elásticos. Assim como, nos gráficos das Figuras 4.2, 4.5 e 4.8. As propriedades elásticas dos materiais *Kraftliner* e *Testliner 1* tendem a diminuir suavemente com a gramatura. No entanto, para o papel *Testliner 3*, a modificação das propriedades elásticas com a gramatura depende da direção. Em todos os casos as variações são relativamente pequenas e provavelmente são também provenientes dos ensaios de caracterização. Os desvios dos experimentos não são divulgados em SCA, 2011.

## 4.2. Constantes elásticas do não-tecido

### 4.2.1. Cálculo do grau de consolidação

A partir das Equações 2.4 e 2.6 expostas na Subseção 2.4.2, conclui-se que  $t = f(\rho_f, \rho_m, g, \varphi_{Mf}, k_{CS})$ . As faces das estruturas sanduíche estudadas são compostas por i-PP e fibra de vidro tipo E. Nesse caso, as densidades são consideradas constantes, tal que  $\rho_m = 0,925 \text{ g/cm}^3$  e  $\rho_f = 2,6 \text{ g/cm}^3$ . Adotando um

não-tecido com gramatura  $g = 400 \text{ g/m}^2$  como exemplo, a espessura torna-se função das variáveis grau de consolidação e porcentagem de fibra em massa. A Figura 4.16 mostra a função  $t = f(\varphi_{Mf}, k_{CS})$ .

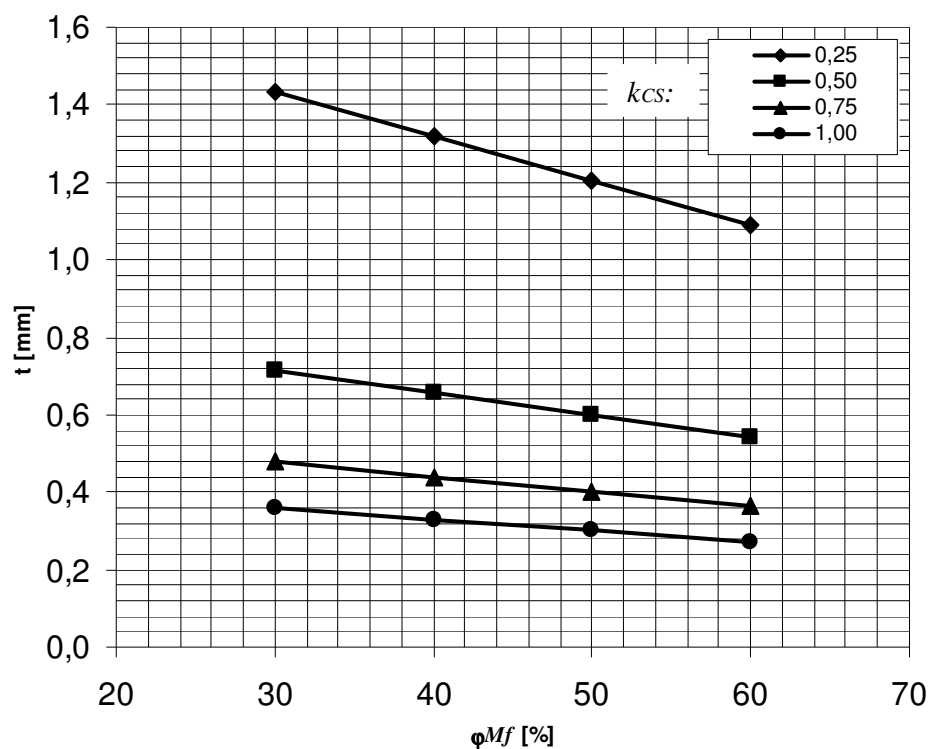


Figura 4.16 – Variação da espessura  $t$  de não-tecidos em PP/FV com gramatura  $g=400 \text{ g/m}^2$  para diferentes porcentagens de fibra em massa  $\varphi_{Mf}$  e diferentes graus de consolidação  $k_{CS}$ .

A espessura do não-tecido pode ser interpretada como um parâmetro de processo. A partir do diagrama da Figura 4.16, a face do sanduíche feita de um não-tecido com gramatura  $g$  e porcentagem de fibra em massa  $\varphi_{Mf}$  pode ser consolidada até a espessura  $t$  para obtenção de um grau de consolidação desejado  $k_{CS}$ . O grau de consolidação está relacionado com as propriedades elásticas do não-tecido. Portanto, dado um não-tecido específico é possível associar as propriedades elásticas desejadas à espessura  $t$ . A influência do grau de consolidação nas propriedades elásticas de módulo de elasticidade e de cisalhamento é discutida na Subseção 4.2.2.

### 4.2.2. Influência do grau de consolidação nas propriedades elásticas

Em Stamp (2011), alguns não-tecidos tipo PP/FV $\phi_{Mf}$  consolidados por termoformagem são considerados materiais ortotrópicos lineares elásticos e são caracterizados conforme DIN EN ISO 527 (1996). A Figura 4.17 mostra os resultados para um não-tecido PP/FV40 com 400 g/m<sup>2</sup>.

Nota-se que os não-tecidos com o grau de consolidação igual a unidade, ou seja, completamente consolidados, possuem propriedades elásticas muito superiores àqueles com grau de consolidação aproximadamente igual a 0,9. O não-tecido não consolidado contém regiões onde a rigidez da fibra não é transmitida para a matriz polimérica durante aplicação de carga. A presença dessas regiões diminui consideravelmente a rigidez equivalente do composto.

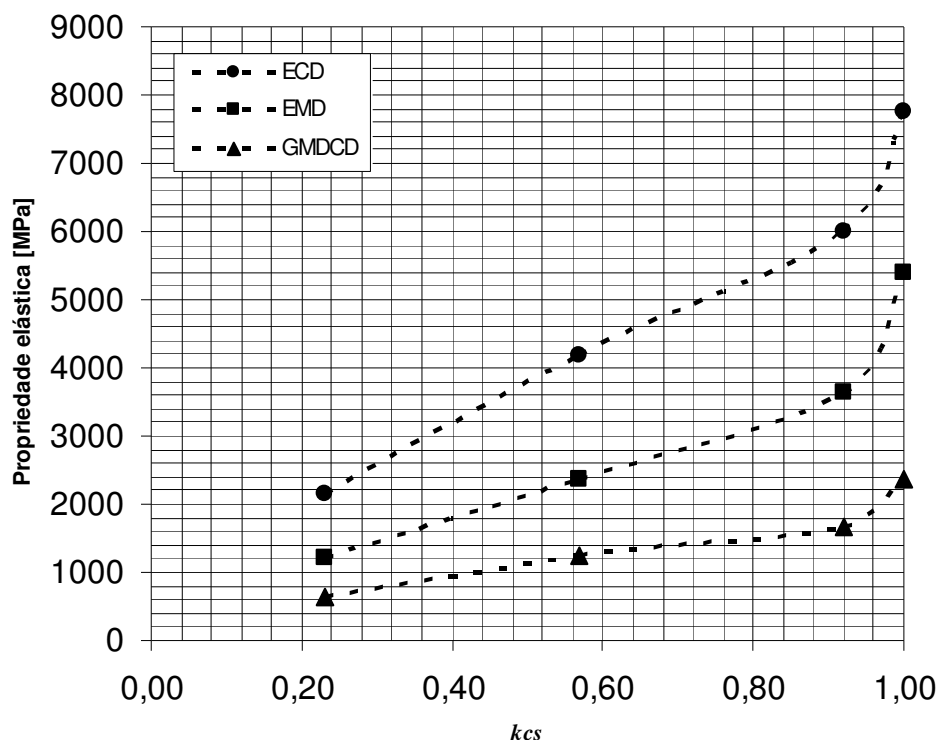


Figura 4.17 - Constantes elásticas de não-tecido PP/FV40 (adaptado de Stamp, 2011).

### 4.3. Constantes elásticas das faces

As constantes elásticas das faces podem ser obtidas através do aplicativo em VBA que utiliza elementos finitos planos. Essa seção traz um teste para o algoritmo, sua validação com um programa comercial de elementos finitos. No Apêndice C é

mostrado o funcionamento do aplicativo através de um exemplo de uma face de estrutura sanduíche.

#### 4.3.1. Teste do algoritmo em VBA

O problema de exemplo é uma placa de  $5 \times 5 \times 1$  mm em material hipotético, com  $E_1 = 2$  GPa,  $E_2 = 1$  GPa,  $G_{12} = 0,6$  GPa,  $\nu_{12} = 0,4$  e  $\theta = 0^\circ$ , submetida às condições de contorno  $L1: u_x = u_y = 0$  e  $L2: u_y = -0,5$  mm. O tamanho do elemento finito foi definido como 2,5 mm. Os deslocamentos nodais são mostrados na Figura 4.18, o que é parte da planilha *Graphic Results* do aplicativo (vide Apêndice C).

O problema para uma placa hipotética também foi solucionado através do programa comercial Hyperworks, da empresa Altair, com as ferramentas Hypermesh, Optistruct e Hyperview. Os dois métodos utilizam elementos finitos de mesma geometria e função de interpolação. A principal diferença entre os mesmos é a presença do grau de liberdade de rotação em  $z$ , considerado pelo elemento utilizado no programa comercial.

As Figuras 4.18 e 4.19 mostram os resultados obtidos pelo algoritmo e pelo *software* respectivamente. Os valores mínimos de  $u_x$  obtidos de acordo com o programa e o algoritmo são -0,144137 e -0,15205, em diferença percentual de aproximadamente 5%.

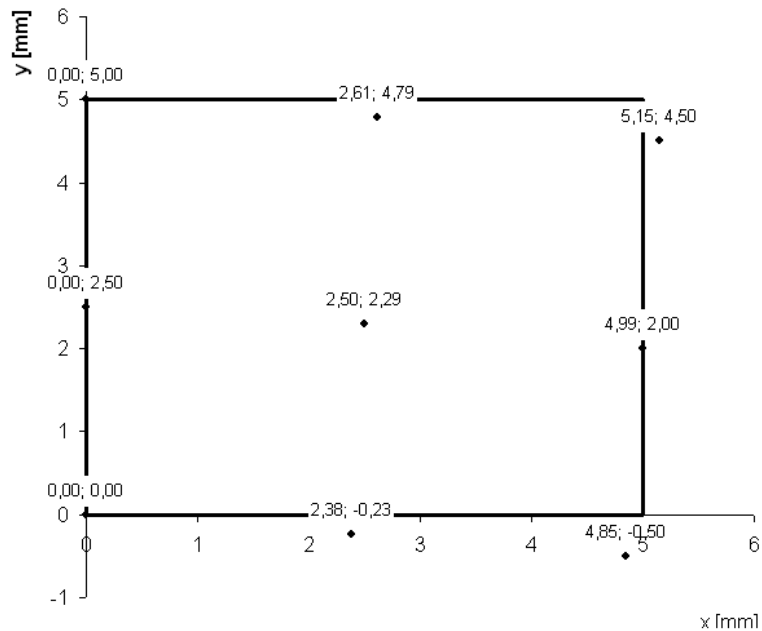


Figura 4.18 – Deslocamentos nodais obtidos pelo algoritmo para placa hipotética.

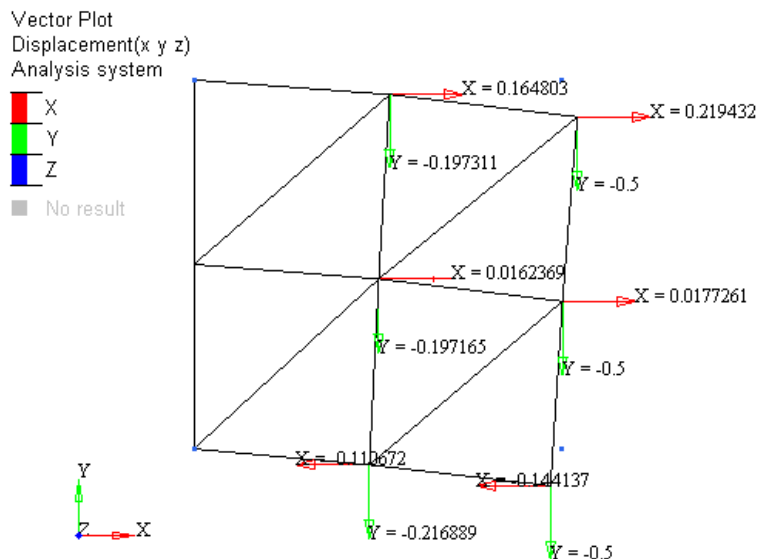


Figura 4.19 - Deslocamentos obtidos através do programa Hyperworks.

#### 4.4. Constantes elásticas do núcleo hexagonal

##### 4.4.1. Comparação entre os métodos numérico e analítico

O modelo numérico que utiliza elemento de viga, mostrado na Seção 3.5, foi validado a partir da comparação com o método analítico mostrado na Seção 3.3.1. Portanto, foram definidas inicialmente as seguintes constantes:  $E_{s2} = 70GPa$ ,  $d = 10mm$ ,  $q_1 = q_2 = q_{12} = 100N/m$  e  $\alpha = 30^\circ$ . Além disso, foram variadas as características geométricas  $t$ ,  $h$  e  $l$ , conforme apresentado na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 - Variáveis para os testes da rotina de elementos finitos.

Teste	$t$ [mm]	$h$ [mm]	$l$ [mm]	$t/h$	$t/l$	$h/l$
1	0,05	2,5	5	0,02	0,01	0,5
2		5	5	0,01	0,01	1
3		5	2,5	0,01	0,02	2
4	0,25	2,5	5	0,1	0,05	0,5
5		5	5	0,05	0,05	1
6		5	2,5	0,05	0,1	2

O módulo de elasticidade definido refere-se a um material hipotético. Para outros materiais, como o papel celulose, as porcentagens de erro são iguais,

independentes do módulo de elasticidade. As espessuras definidas são hipotéticas, tal que os testes 4 a 6 possuem o dobro da espessura dos testes 1 a 3. Foi optado pela utilização de materiais hipotético pois com isso foi possível verificar as diferenças entre os erros quando a espessura aumenta proporcionalmente. Outro motivo é que núcleo em papel celulose possuem células com hexagonos regulares. Nesse caso, não seria possível avaliar a diferença entre os erros a partir da variação da razão  $h/l$ , pois esta é sempre igual a um. Os resultados e a comparação entre os dois métodos são mostrados na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 - Comparação entre os modelos numérico e analítico.

Teste	$E_1$ [MPa]			Teste	$E_2$ [MPa]		
	Analítico	MEF	Dif. [%]		Analítico	MEF	Dif. [%]
1	0,2425	0,2424	4,12E-02	1	0,1078	0,1078	0,00E+00
2	0,1617	0,1616	6,18E-02	2	0,1617	0,1617	0,00E+00
3	0,7760	0,7750	1,29E-01	3	2,1554	2,1552	9,28E-03
4	30,3109	30,0852	7,45E-01	4	13,4715	13,4603	8,31E-02
5	20,2073	20,0568	7,45E-01	5	20,2073	20,1904	8,36E-02
6	96,9948	94,1698	2,91	6	269,4301	268,5350	3,32E-01

Teste	$\nu_{12}$			Teste	$\nu_{21}$		
	Analítico	MEF	Dif. [%]		Analítico	MEF	Dif. [%]
1	1,5000	1,4994	4,00E-02	1	0,6667	0,6666	1,50E-02
2	1,0000	0,9996	4,00E-02	2	1,0000	0,9999	1,00E-02
3	0,6000	0,5990	1,67E-01	3	1,6667	1,6658	5,40E-02
4	1,5000	1,4851	9,93E-01	4	0,6667	0,6644	3,45E-01
5	1,0000	0,9901	9,90E-01	5	1,0000	0,9967	3,30E-01
6	0,6000	0,5767	3,88	6	1,6667	1,6445	1,33

As diferenças são pequenas, porém se a relação entre a espessura e os comprimentos das paredes da célula aumenta, então a diferença aumenta. Mesmo assim, trata-se de diferenças aceitáveis. Essas diferenças seriam menores com maior número de elementos finitos.

Para o caso do núcleo hexagonal em papel celulose, a razão  $h/l$  é igual a um, a razão  $t/h$ , ou  $t/l$ , esta na ordem de 0,05, e a espessura pode assumir valores

próximos à  $0,25 \text{ mm}$ . Um teste similar à essa condição é o teste de número cinco. Neste teste, notou-se que a diferença foi de menos de 1% para todas as propriedades elásticas avaliadas.

A partir destes resultados foi concluído que este método pode ser usado para determinação das propriedades elásticas longitudinais de núcleos hexagonais em papel celulose, bem como, de núcleos senoidais.

#### 4.4.2. Visualização da configuração deformada das células

As Figuras 4.20 e 4.21 mostram as malhas de elementos finitos não deformadas e deformadas, bem como o hexágono completo para o teste 2 sob aplicação de carregamentos  $q_1$  positivo e negativo, respectivamente. Esse tipo de célula possui coeficiente de Poisson equivalente positivo, diferente de células como as do tipo *Faltwabe* (vide Figura 1.2 (d)), que possuem, sob tração, extensão transversal, ao invés de contração.

As Figuras 4.22 e 4.23 mostram o mesmo teste, porém para aplicação de  $+q_2$  e  $-q_2$  respectivamente. Como considerado anteriormente, para esses esforços as paredes verticais não sofrem deformação. A parede da direita sofre apenas deslocamento de corpo rígido.

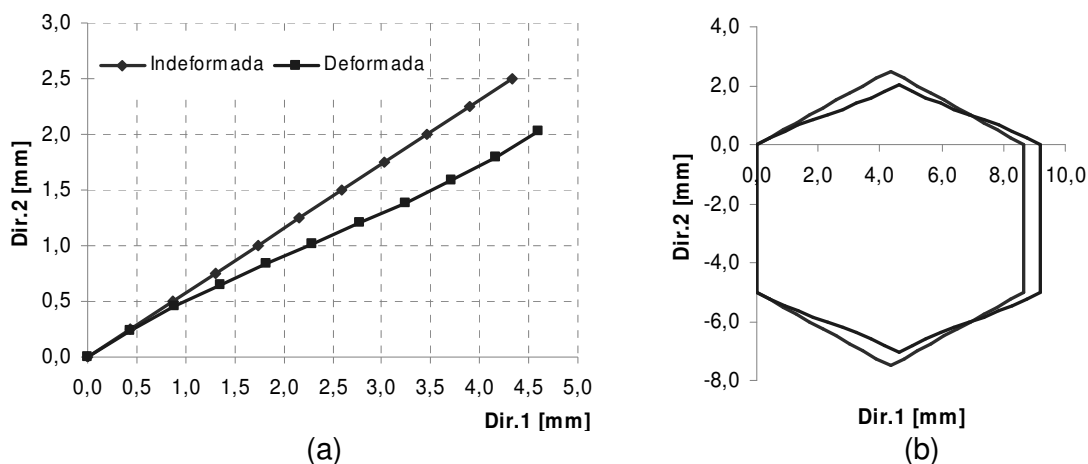


Figura 4.20 - Teste 2, carga  $+q_1$ . (a) Malha de elementos finitos. (b) Célula.

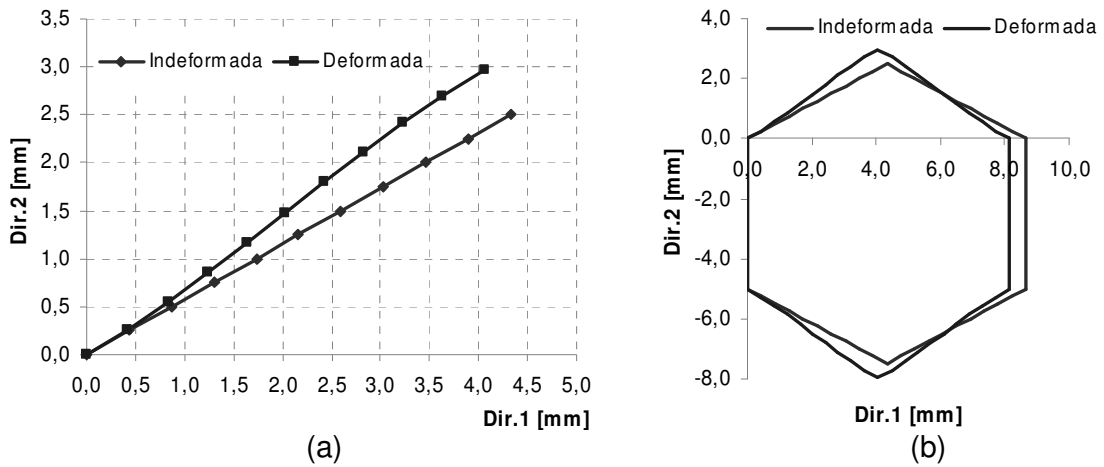


Figura 4.21 - Teste 2, carga  $-q_1$ . (a) Malha de elementos finitos. (b) Célula.

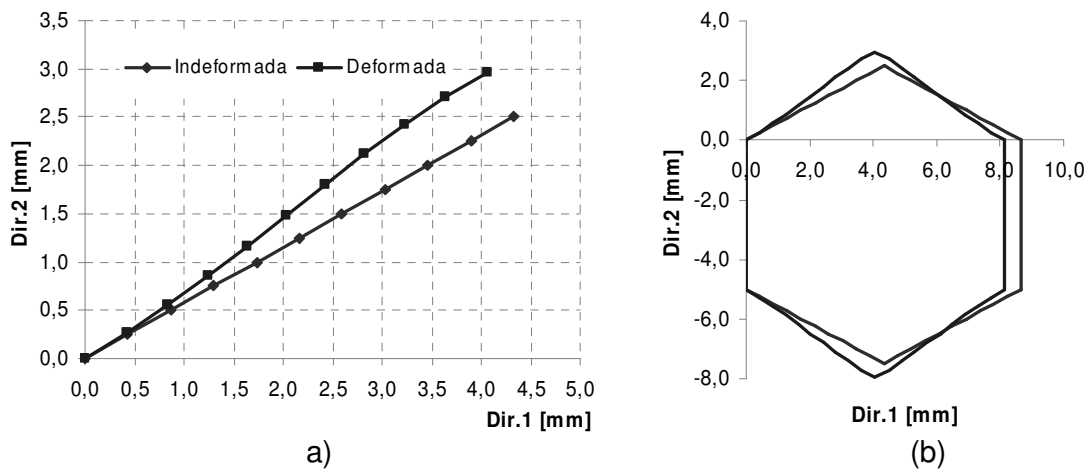


Figura 4.22 - Teste 2, carga  $+q_2$ . a) Malha de elementos finitos. b) Célula.

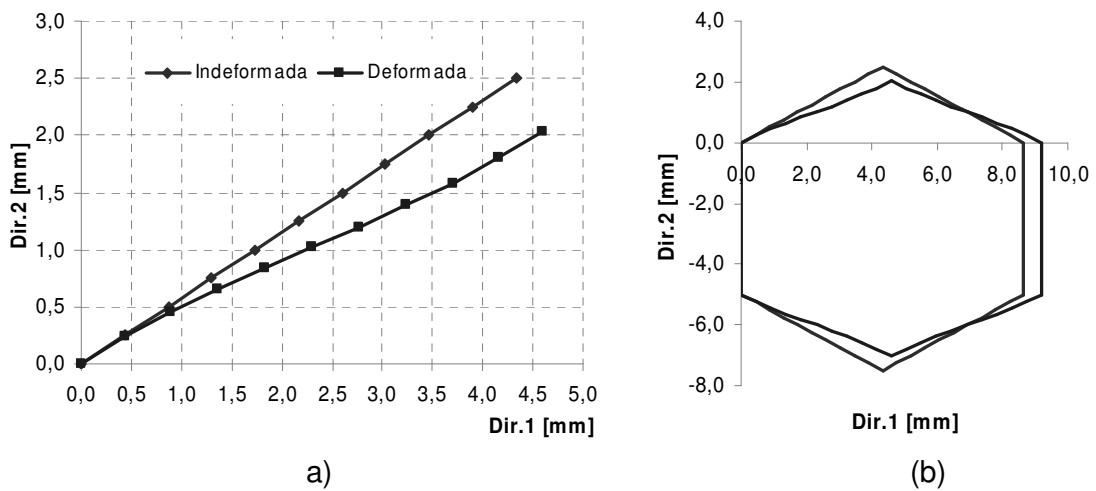


Figura 4.23 – Teste 2, carga  $-q_2$ . a) Malha de elementos finitos. b) Célula.

#### 4.4.3. Algumas propriedades transversais consideradas desprezíveis

Para constatação de que  $\nu_{13}$  e  $\nu_{23}$  são desprezíveis, seus valores foram calculados utilizando os exemplos da Tabela 4.1 para células de paredes simples e duplas. Foram empregadas as Equações A.77, 3.21, 3.30 e 3.35, bem como os resultados de  $E_1$  e  $E_2$  apresentados na Tabela 4.5, além de adotar hipoteticamente  $\nu_s = 0,33$ . Os resultados confirmam a possibilidade de negligenciar os valores das contrações transversais na direção 3, como mostram as Tabelas 4.3 e 4.4. Para parede relativamente espessa, essa consideração não é indicada, como nos exemplos de número seis, porque a parede espessa sofre efeito dos coeficientes de Poisson analisados.

Tabela 4.3 – Coeficientes de Poisson transversais para célula de parede simples.

Exemplo	$E_3$ [MPa]	$E_1 / E_3$	$\nu_{13}$	$E_2 / E_3$	$\nu_{23}$
1	1293,2646	1,88E-04	6,19E-05	8,34E-05	2,75E-05
2	808,2904	2,00E-04	6,60E-05	2,00E-04	6,60E-05
3	1010,3630	7,68E-04	2,53E-04	2,13E-03	7,04E-04
4	6466,3230	4,69E-03	1,55E-03	2,08E-03	6,87E-04
5	4041,4519	5,00E-03	1,65E-03	5,00E-03	1,65E-03
6	5051,8149	1,92E-02	6,34E-03	5,33E-02	1,76E-02

Tabela 4.4 – Coeficientes de Poisson transversais para célula de parede dupla.

Exemplo	$E_3$ [MPa]	$E_1 / E_3$	$\nu_{13}$	$E_2 / E_3$	$\nu_{23}$
1	1939,8969	1,25E-04	4,13E-05	5,56E-05	1,83E-05
2	1077,7205	1,50E-04	4,95E-05	1,50E-04	4,95E-05
3	1212,4356	6,40E-04	2,11E-04	1,78E-03	5,87E-04
4	9699,4845	3,13E-03	1,03E-03	1,39E-03	4,58E-04
5	5388,6025	3,75E-03	1,24E-03	3,75E-03	1,24E-03
6	6062,1778	1,60E-02	5,28E-03	4,44E-02	1,47E-02

## 4.5. Constantes elásticas do núcleo senoidal

### 4.5.1. Propriedades transversais - Resultados experimentais

A partir dos ensaios dos núcleos senoidais, conforme procedimento apresentado na Seção 3.6, foram obtidos os valores médios e desvios padrões dos módulos de elasticidade e de cisalhamento transversais das amostras de núcleo previstas para ensaio. Os resultados são mostrados na Tabela 4.5, onde  $s^*$  representa o desvio padrão.

Tabela 4.5 - Resultados dos ensaios do núcleo em *Testliner 3*.

Nomenclatura	$\bar{E}_3$ [kPa]	$s^*(E_3) / \bar{E}_3$	$\bar{G}_{13}$ [kPa]	$s^*(G_{13}) / \bar{G}_{13}$	$\bar{G}_{23}$ [kPa]	$s^*(G_{23}) / \bar{G}_{23}$
A~TL90A	83601,5	0,08	44067,0	0,08	16021,0	0,10
A~TL90S	75983,9	0,03	48200,5	0,04	14359,0	0,09
A~TL115A	128697,9	0,03	60402,9	0,05	21150,9	0,02
A~TL115S	90139,3	0,05	71245,4	0,05	20768,4	0,03
C~TL115A	151558,9	0,06	82070,6	0,02	21672,2	0,04
C~TL115S	102068,3	0,03	99435,2	0,10	18925,1	0,07

As razões entre o desvio padrão e a média de cada propriedade são pequenas, tendo em vista que o maior valor é de aproximadamente 0,1. Portanto, os ensaios foram considerados satisfatórios e a partir dos resultados obtidos foram evidenciadas algumas conclusões.

Comparando as amostras A~TL90 e A~TL115, para ambos os adesivos, nota-se que as propriedades elásticas aumentam com a gramatura. Esse efeito não era esperado, pois, como foi visto na Seção 4.1, as propriedades elásticas da lâmina de papel não sofrem grande influência da gramatura.

Supõe-se que o aumento da rigidez das lâminas é proveniente do processo de fabricação dos núcleos. Como visto na Sub-seção 2.3.2.1, o papel celulose é umidificado, conformado e seco. Este tratamento tende a favorecer a compactação, aumentando o número de ligações entre as fibras. Além disso, devido a conformação as fibras são esticadas, com isso tornam-se mais densas e por sua vez mais rígidas.

Se a gramatura é maior a quantidade de fibras sobrepostas também é maior, isso não garante maiores módulos de rigidez pois a espessura da lâmina também aumenta de forma linearmente proporcional, como discutido na Seção 4.1. No entanto, durante o tratamento, a probabilidade de ocorrer a formação de novas ligações entre as fibras é maior.

A partir da Tabela 4.5 pode ser observado que, em geral, as amostras com diferentes tipos de adesivos apresentam diferentes propriedades elásticas. O módulo de elasticidade é maior para núcleos colados com adesivo PVAc, ao contrário do módulo de cisalhamento no plano 13. O módulo de cisalhamento no plano 23 sofre pequena diferença que oscila de forma crescente ou decrescente com a mudança do adesivo. E por isso, não é possível evidenciar o comportamento desta propriedade dependendo do adesivo.

Um fator que influencia o efeito observado pelas diferença de adesivos é a mudança do tratamento das lâminas durante a fabricação do núcleo. Para cada adesivo os parâmetros de processos são modificados. Como visto nas Subseções 2.3.1.1 e 2.3.2.1, durante o processo de fabricação do núcleo, o papel é aquecido, umedecido, secado e estirado.

O elemento  $\bar{Q}_{55}$  da matriz de rigidez global de um sólido linear elástico ortotrópico, dado pela Equação 2.29 representa o módulo de cisalhamento transversal do núcleo na direção  $\theta$  (vide Figura A.3). Denominado  $G_{\theta z}$ . Além disso, os elementos  $Q_{55}$  e  $Q_{44}$  da matriz local representam os módulos de cisalhamento  $G_{13}$  e  $G_{23}$ , respectivamente. Portanto, pode ser escrito que

$$G_{\theta z} = G_{13}c^2 + G_{23}s^2. \quad 4.4$$

As Figuras 4.24 a 4.29 mostram diagramas polares do módulo de cisalhamento transversal na direção  $\theta$  dos núcleos experimentados.

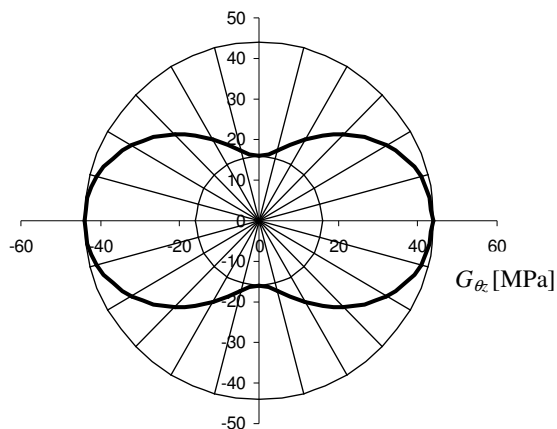


Figura 4.24 – Diagrama polar do módulo de cisalhamento transversal do núcleo A~ em *Testliner 3* com  $90 \text{ g/m}^2$  e PVAc.

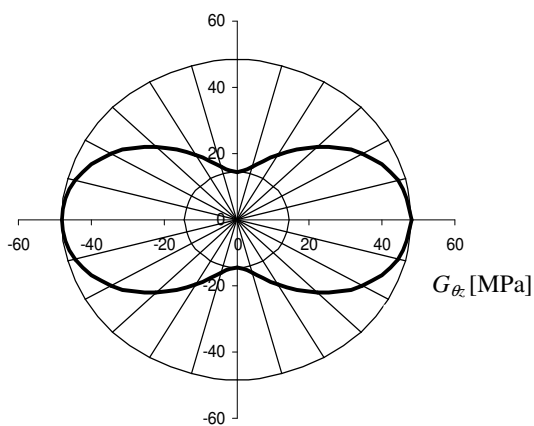


Figura 4.25 - Diagrama polar do módulo de cisalhamento transversal do núcleo A~ em *Testliner 3* com  $90 \text{ g/m}^2$  e silicato de sódio.

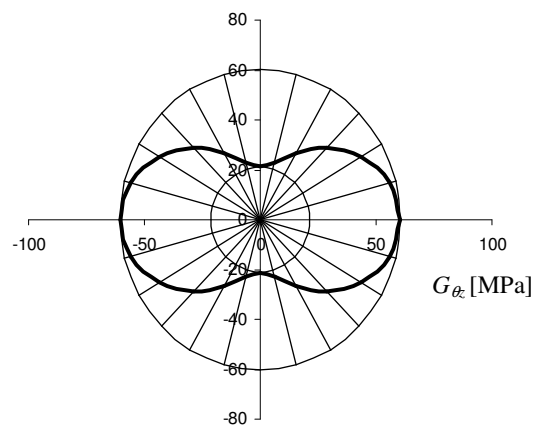


Figura 4.26 - Diagrama polar do módulo de cisalhamento transversal do núcleo A~ em *Testliner 3* com  $115 \text{ g/m}^2$  e PVAc.

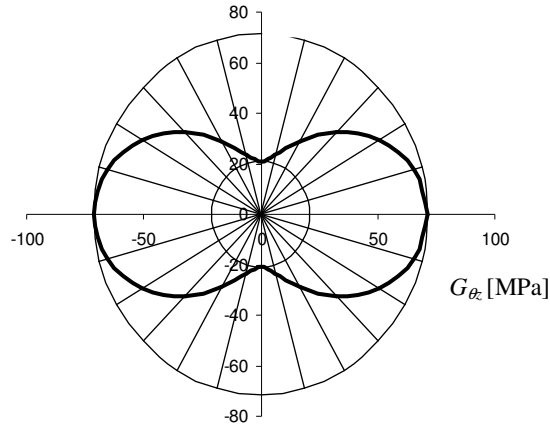


Figura 4.27 - Diagrama polar do módulo de cisalhamento transversal do núcleo A~ em *Testliner 3* com  $115 \text{ g/m}^2$  e silicato de sódio.

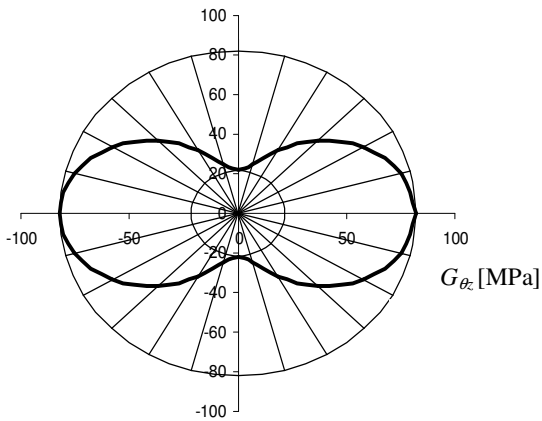


Figura 4.28 - Diagrama polar do módulo de cisalhamento transversal do núcleo C~ em *Testliner 3* com  $115 \text{ g/m}^2$  e PVAc.

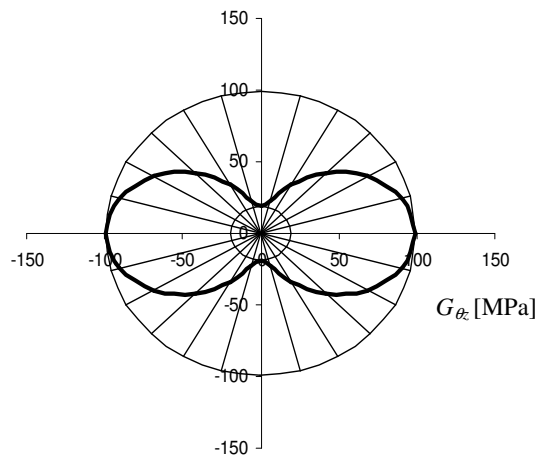


Figura 4.29 - Diagrama polar do módulo de cisalhamento transversal do núcleo C~ em *Testliner 3* com  $115 \text{ g/m}^2$  e silicato de sódio.

É evidenciada uma região convexa nas curvas dos diagramas polares na direção equivalente à 90 graus para todos os núcleos ensaiados. Esse efeito ocorre devido a diferença acentuada entre os módulos de cisalhamento nas direções  $G_{13}$  e  $G_{23}$ . Essa diferença é explicada pela geometria do núcleo senoidal, formada por folhas de papel corrugado e folhas não corrugadas dispostas no plano 13.

As lâminas de papel não corrugadas orientadas no plano formado pela direção igual a zero graus (ou direção 1) e a direção 3, fazem com que o cisalhamento neste plano seja máximo. Por outro lado, a ausência de lâminas preferencialmente orientadas no plano formado com a direção igual a 90 graus (ou direção 2) e a direção 3 geram valores mínimos para o módulo de cisalhamento neste plano.

Através dos diagramas não é possível afirmar que o perfil das curvas depende da gramatura do papel, do adesivo ou do tamanho das células do núcleo. É evidente que as grandezas das propriedades elásticas sofrem diferenças, todavia a formato das curvas permanecem semelhantes.

#### 4.5.2. Propriedades transversais – Método semiempírico

A partir das dimensões das células mostradas na Tabela 2.1, foram adotados valores médios para a altura e o passo das funções seno. Durante a fabricação do papelão de uma face, essas dimensões variam, por isso são estabelecidos limites por norma. O valor fixo adotado para análise representa o tamanho médio das células. O comprimento  $L_s$  da curva foi obtido através da resolução de uma integral elíptica de segunda ordem. Essas dimensões são mostradas na Tabela 4.6.

Tabela 4.6 – Dimensões adotadas para análise das células senoidais.

Tipo	$H$ [mm]	$P$ [mm]	$L_s$ [mm]
G~	0,55	1,80	2,11
F~	0,75	2,25	2,71
E~	1,40	3,25	4,32
D~	2,00	4,30	5,92
B~	2,60	6,00	8,00
C~	3,50	7,35	10,23
A~	4,45	8,75	12,59
K~	5,00	10,00	14,26

Substituindo os valores da Tabela 4.6 e as equações empíricas das Figuras 4.7 a 4.9 nas equações 3.64, 3.67 e 3.68, é possível escrever as propriedades equivalentes dos núcleos senoidais em função da gramatura do papel, no caso, o *SCA Testliner 3*, com isso, são obtidas funções lineares semi-empíricas, as quais são mostradas nas Figuras 4.30 a 4.45. As curvas CD correspondem aos núcleos comerciais em que a direção CD da lâmina de papel está alinhada com a direção 3 do núcleo. As curvas MD representam núcleos em que, por hipótese, a direção MD da lâmina de papel está alinhada com a direção 3 do núcleo.

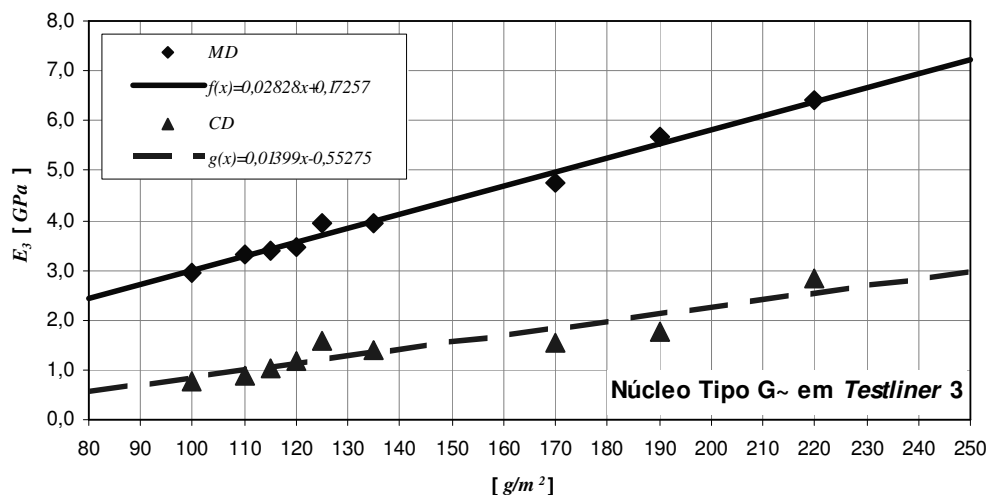


Figura 4.30 – Módulo de elasticidade transversal. Núcleo Tipo G~ em *Testliner 3*.

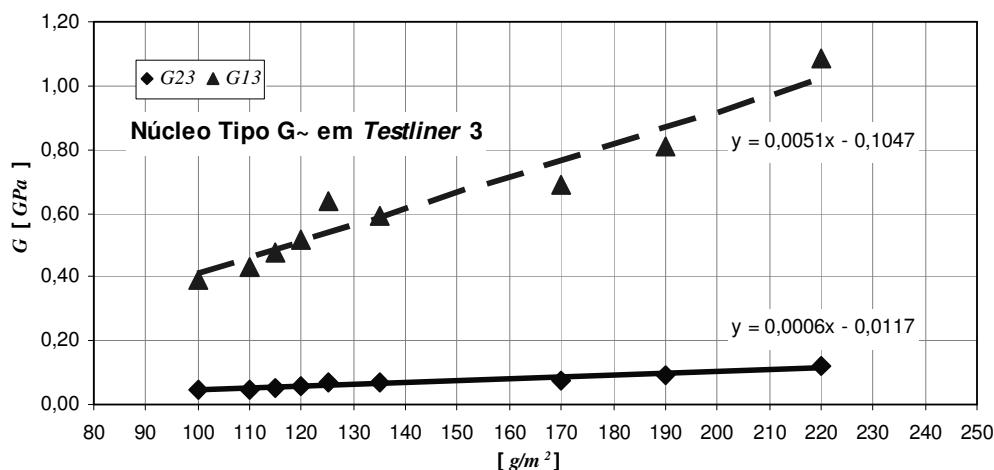


Figura 4.31 – Módulos de cisalhamento transversais. Núcleo Tipo G~ em *Testliner 3*.

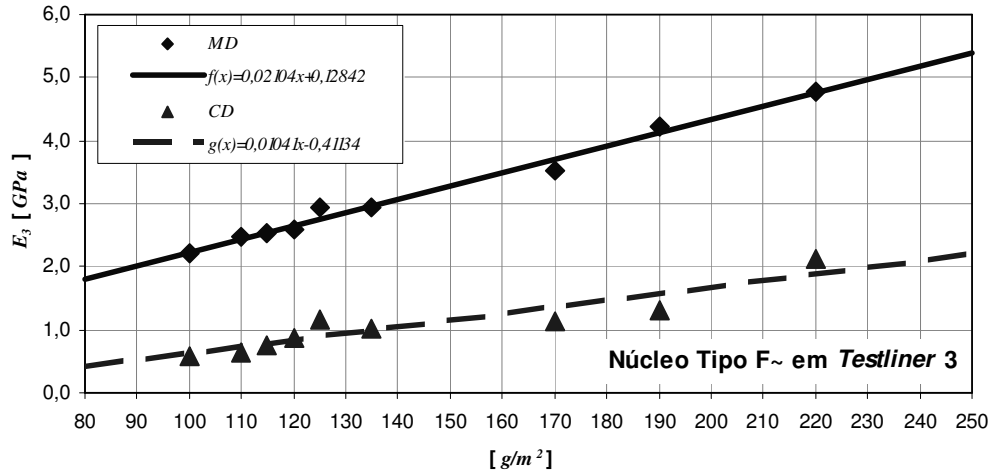


Figura 4.32 – Módulo de elasticidade transversal. Núcleo Tipo F~ em Testliner 3.

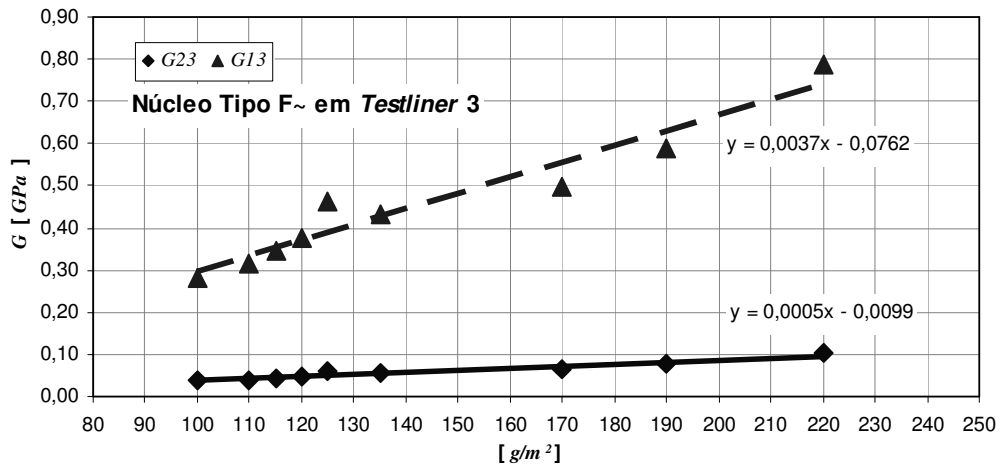


Figura 4.33 – Módulos de cisalhamento transversais. Núcleo Tipo F~ em Testliner 3.

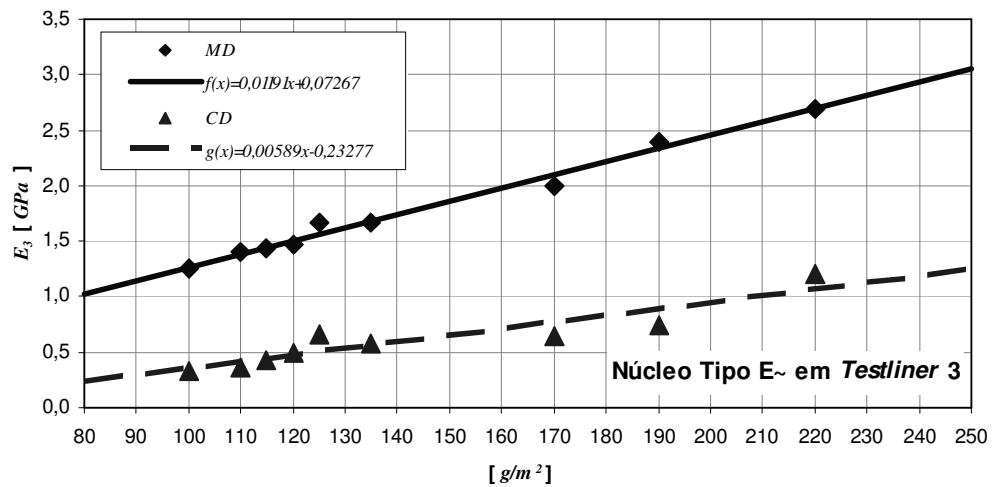


Figura 4.34 – Módulo de elasticidade transversal. Núcleo Tipo E~ em Testliner 3.

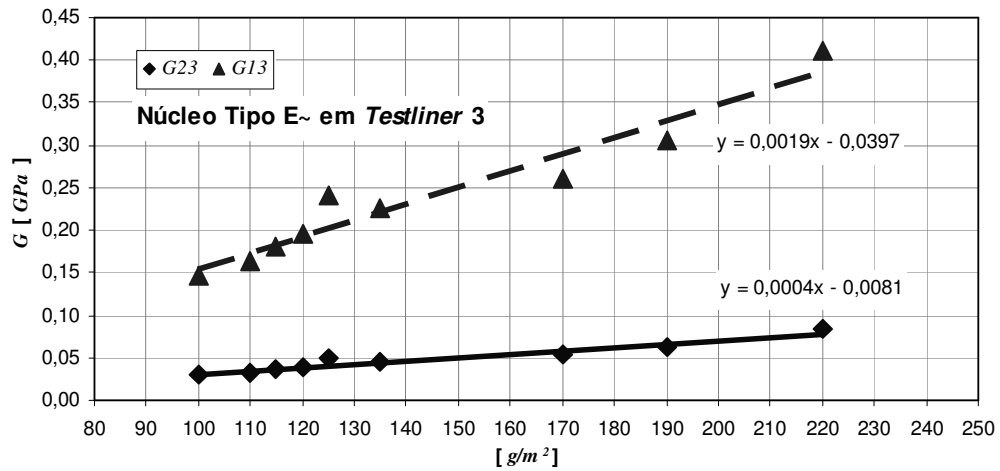


Figura 4.35 – Módulos de cisalhamento transversais. Núcleo Tipo E~ em Testliner 3.

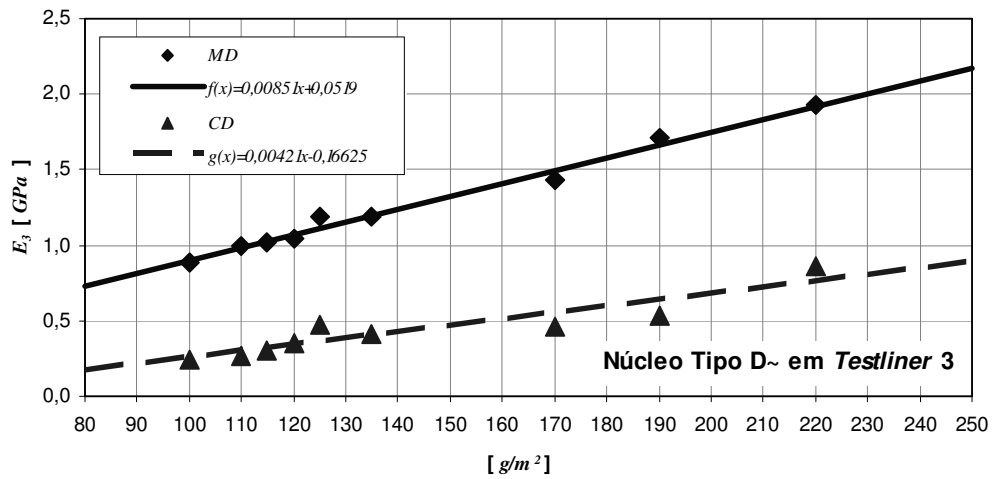


Figura 4.36 – Módulo de elasticidade transversal. Núcleo Tipo D~ em Testliner 3.

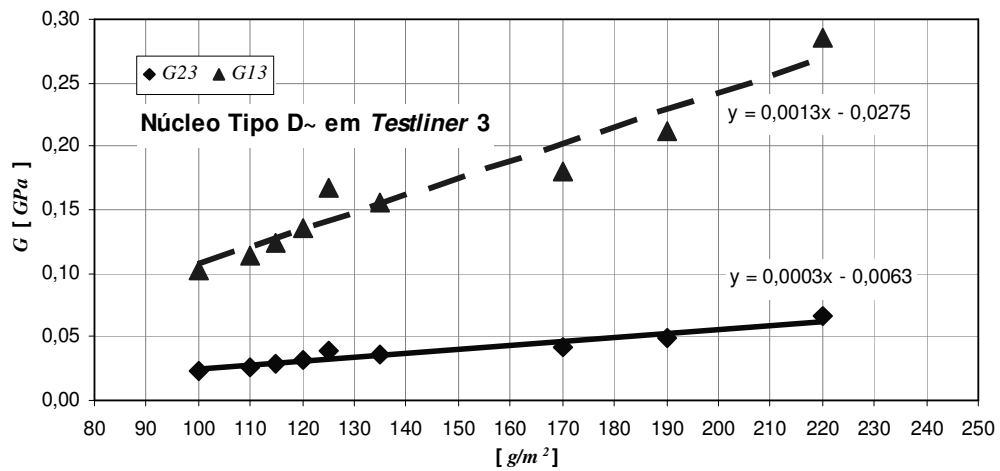


Figura 4.37 – Módulos de cisalhamento transversais. Núcleo Tipo D~ em Testliner 3.

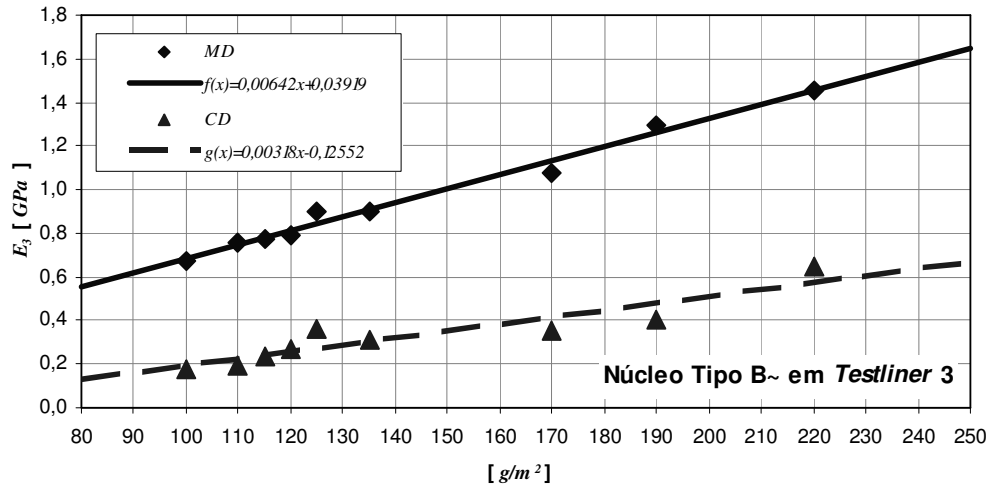


Figura 4.38 – Módulo de elasticidade transversal. Núcleo Tipo B~ em Testliner 3.

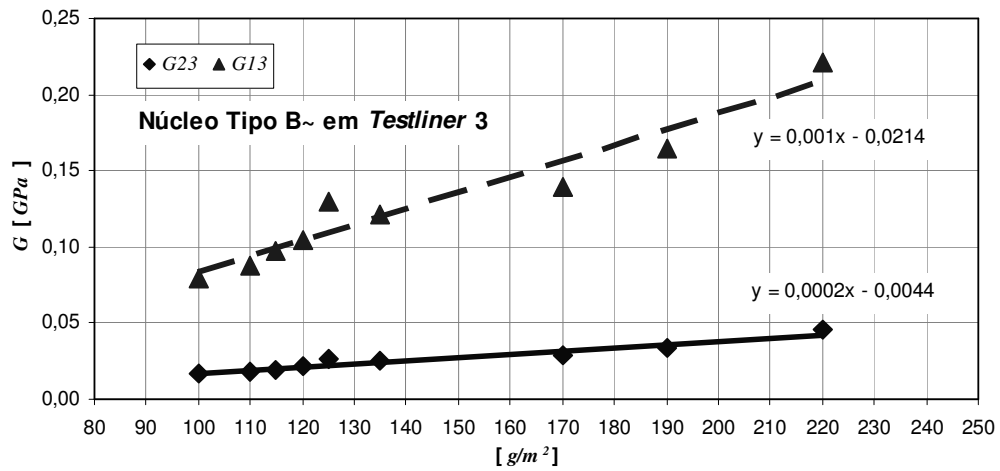


Figura 4.39 – Módulos de cisalhamento transversais. Núcleo Tipo B~ em Testliner 3.

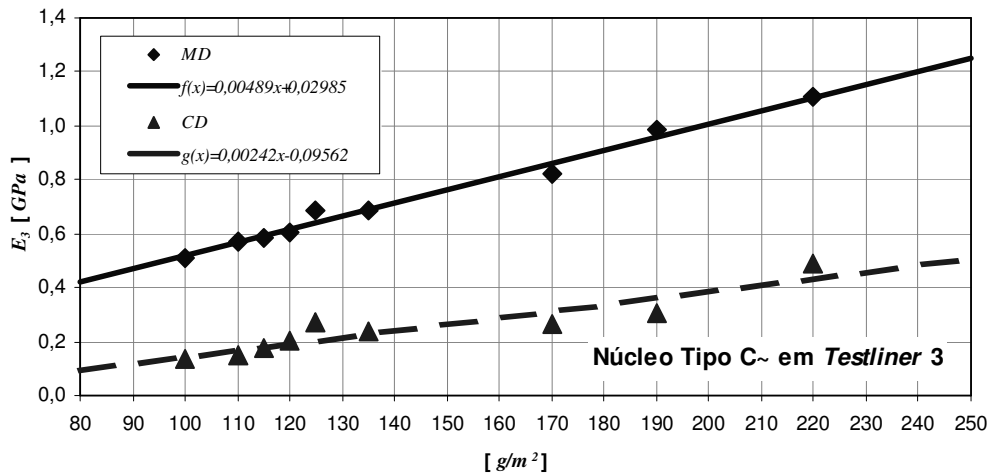


Figura 4.40 – Módulo de elasticidade transversal. Núcleo Tipo C~ em Testliner 3.

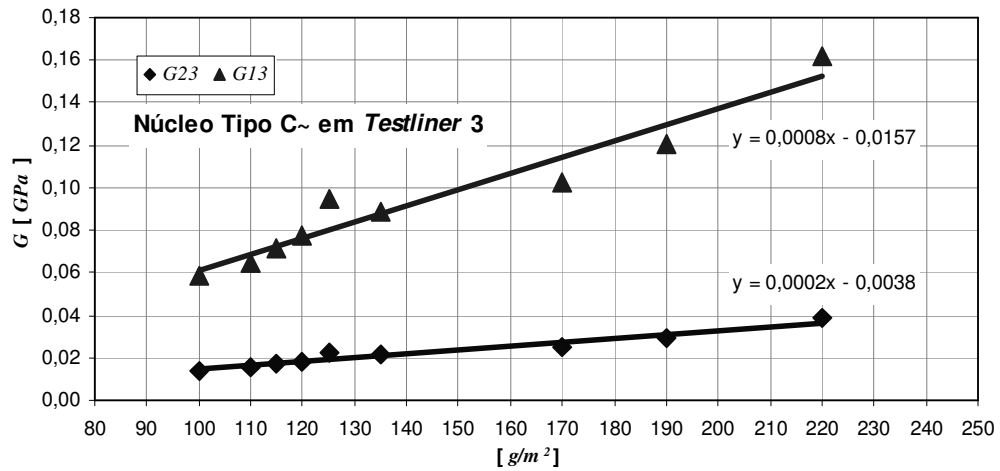


Figura 4.41 – Módulos de cisalhamento transversais. Núcleo Tipo C~ em Testliner 3.

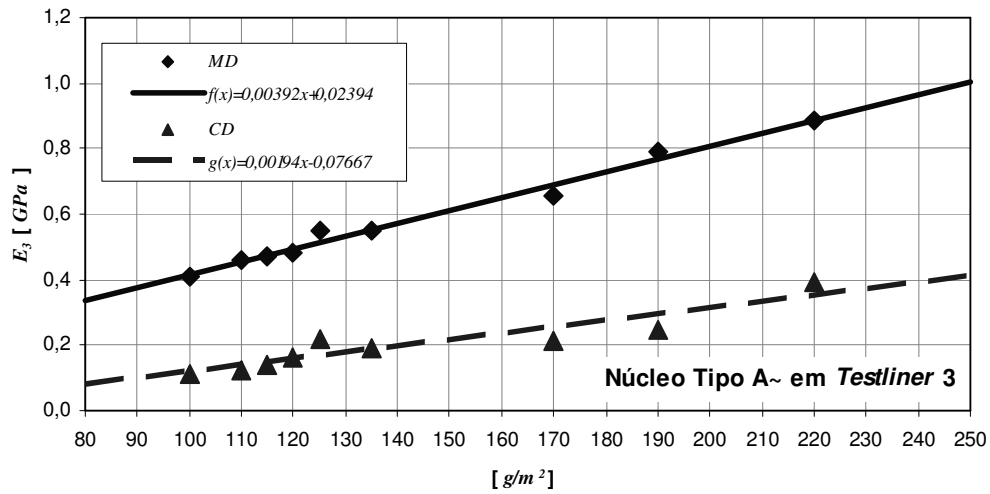


Figura 4.42 – Módulo de elasticidade transversal. Núcleo Tipo A~ em Testliner 3.

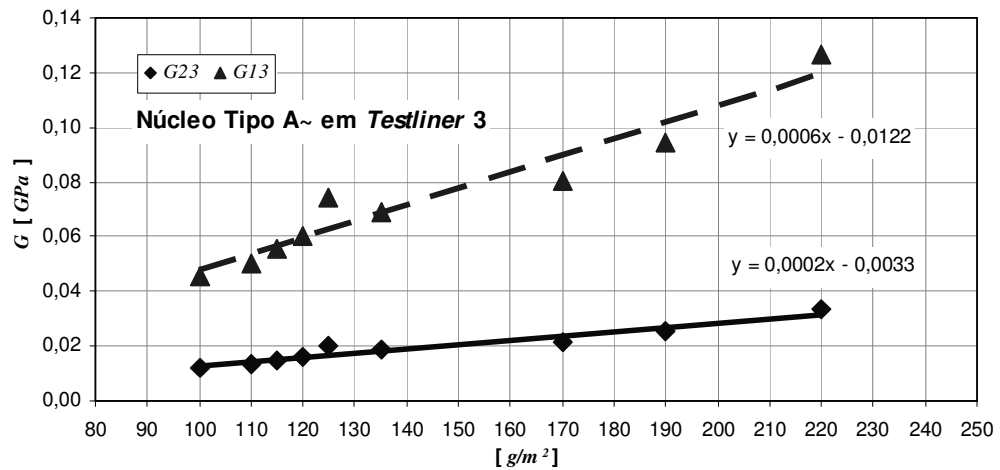


Figura 4.43 – Módulos de cisalhamento transversais. Núcleo Tipo A~ em Testliner 3.

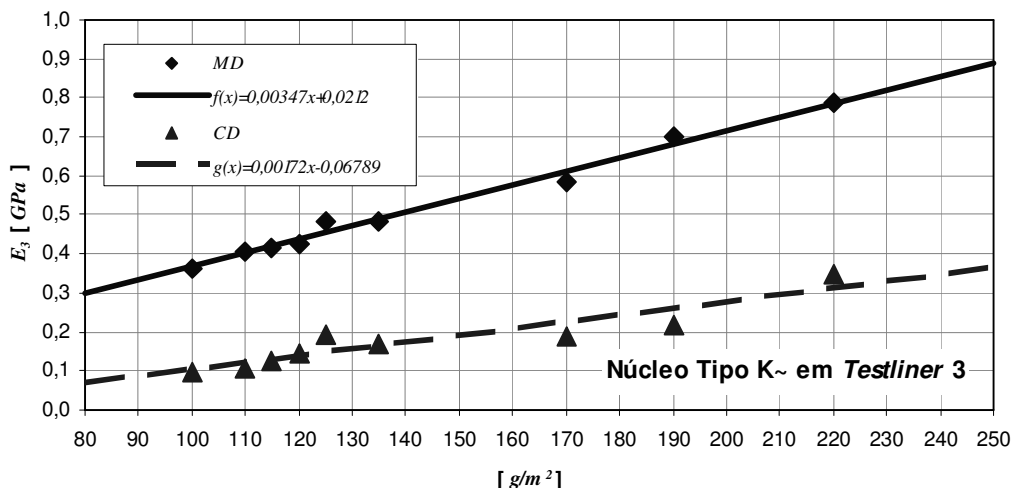


Figura 4.44 – Módulo de elasticidade transversal. Núcleo Tipo K~ em *Testliner 3*.

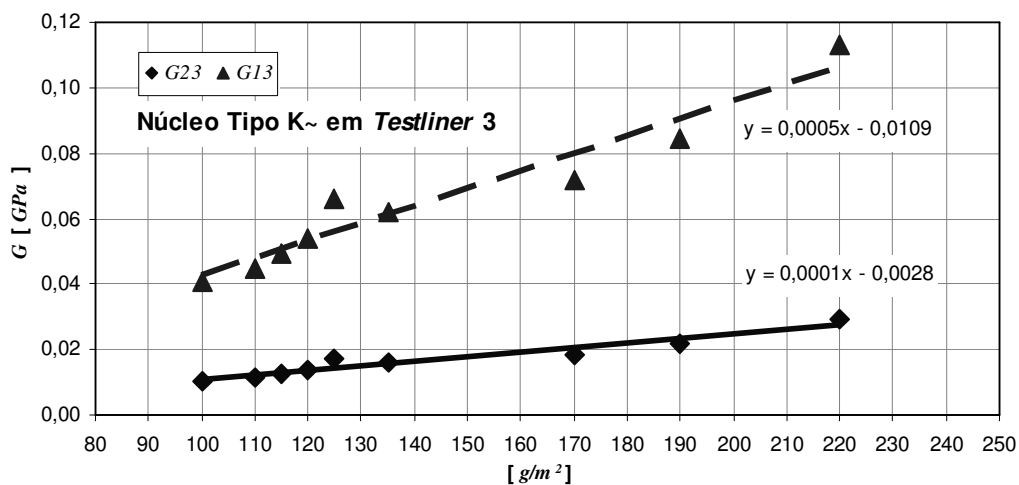


Figura 4.45 – Módulos de cisalhamento transversais. Núcleo Tipo K~ em *Testliner 3*.

Em todos os casos mostrados nas Figuras 4.30 a 4.45 nota-se que as propriedades elásticas equivalentes dos núcleos aumentam com a gramatura do papel celulose. Segundo Trombin e Luersen (2011), como visto na Sub-seção 2.7.1, as propriedades elásticas equivalentes de núcleos hexagonais são influenciadas pelas propriedades elásticas do material e pela geometria da célula. Onde, a espessura das paredes da célula influencia de forma diretamente proporcional. Essa conclusão também é válida para núcleos com células senoidais, como apresentado na Seção 3.4. Por isso, apesar das propriedades elásticas do papel permanecerem constantes com o aumento da gramatura, como visto na Seção 4.1, as espessuras

aumentam linearmente, e por isso, as propriedades equivalentes do núcleo tende a aumentar na mesma proporção.

#### 4.5.3. Comparação entre os métodos experimental e semiempírico

Foram calculadas as diferenças percentuais entre os resultados dos métodos semiempírico e experimental, este último sendo a referência, para cada tipo de amostra, como mostra a Tabela 4.7. Para o cálculo de  $E_3$  foi utilizada a equação analítica 3.64, de posse das expressões empíricas da espessura  $t(g)$  e do módulo de elasticidade  $E_{MD}(g)$ , apresentados nas Figuras 4.7 e 4.8, respectivamente. Pode ser visto que, em geral, os módulos elasticidade determinados experimentalmente são maiores e os módulos de cisalhamento menores.

Tabela 4.7 - Resultados dos ensaios do núcleo em *Testliner 3*.

Nomenclatura	Dif. $E_3$ [%]	Dif. $G_{13}$ [%]	Dif. $G_{23}$ [%]
A~TL90A	-11,3	5,4	9,0
A~TL90S	-19,4	15,3	-2,3
A~TL115A	-9,2	6,3	7,4
A~TL115S	-36,4	25,4	5,4
C~TL115A	-16,0	7,6	12,9
C~TL115S	-43,4	30,3	-1,4

Tendo em vista que o método analítico não considera a influência dos adesivos, é esperado que as diferenças entre os métodos analítico e experimental seja diferente para cada adesivo. Como mostra a Tabela 4.7, O processo que utiliza o PVAc possui menos influência do que o processo que usa o silicato de sódio.

#### 4.5.4. Propriedades longitudinais - Exemplo numérico

Para determinação das propriedades longitudinais, foi adotado o procedimento descrito na Seção 3.5. Como exemplo, foi considerada uma célula senoidal do tipo A~ com  $P = 8,75 \text{ mm}$ ,  $H = 4,75 \text{ mm}$ , em SCA *Testliner 3*, com  $g = 90 \text{ g/m}^2$ . Aplicando as equações empíricas das Figuras 4.7 e 4.8, tem-se que  $t = 0,1523 \text{ mm}$  e  $E_{MD} = 4,6484 \text{ GPa}$ , respectivamente. Considerando as medições mostradas em

Baum *et al.* (1981), tem-se que  $\nu_{MDCD} = 0,293$ . As propriedades da parede da célula correspondem às propriedades da lâmina, tal que  $t_s = t$ ,  $E_s = E_{MD}$  e  $\nu_s = \nu_{MDCD}$ .

Uma carga igual a  $-q_2$  foi aplicada e os deslocamentos nodais correspondentes foram obtidos. A malha de elementos finitos de viga que representa a célula indeformada e deformada é mostrada na Figura 4.46.

Utilizando a equação 3.78, foi obtido  $E_2 = 4,8240 \text{ MPa}$ . Este módulo elástico é equivalente a aproximadamente 0,1% do módulo de Young do material da parede. Essa propriedade é considerada desprezível em relação às propriedades transversais, assim como o módulo de elasticidade na direção 1 e o cisalhamento longitudinal no plano 12. Por isso, métodos mais precisos do que o adotado, como, por exemplo, considerando o coeficiente de contração da parede da célula, geralmente não são aplicados.

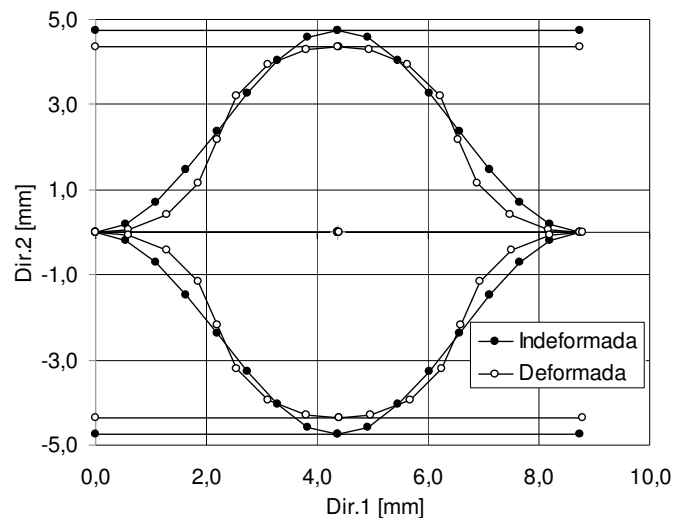


Figura 4.46 – Análise por elementos finitos de uma célula senoidal sob carga  $-q_2$ .

## 5 CONCLUSÕES

O objetivo do presente trabalho foi apresentar e aplicar métodos analíticos, numéricos e experimentais para determinar as propriedades elásticas equivalentes das faces e do núcleo de uma estrutura sanduíche. Os núcleos da estrutura são feitos em papel celulose, com células do tipo hexagonal (colméia) ou senoidal, e as faces são em não-tecido agulhado, composto por matriz em polipropileno reforçada por fibras de vidro. Esse tipo de estrutura possui aplicação em componentes do interior de veículos.

As propriedades elásticas equivalentes longitudinais do núcleo foram obtidas através de um modelo de elementos finitos de viga e as propriedades transversais por meio de um procedimento experimental, onde os núcleos com células senoidais foram testados em uma máquina de tração. As propriedades equivalentes das faces foram estimadas através de um modelo numérico com elementos finitos planos.

Os métodos analíticos e numéricos aplicados para determinar as propriedades elásticas equivalentes da estrutura sanduíche estudada mostraram-se efetivos. Além disso, as diferenças entre os resultados obtidos por esses métodos são pequenas quando comparadas com resultados experimentais apresentados.

A modelagem do comportamento elástico do papel celulose por equações empíricas mostrou-se eficaz. Os dados necessários para utilização desse modelo são as propriedades mecânicas do papel, as quais podem ser obtidas experimentalmente. A variação das propriedades elásticas com a direção, avaliada no plano da lâmina, está de acordo com a literatura utilizada.

O método semiempírico adotado para descrever as propriedades elásticas transversais equivalentes do núcleo, com base nas propriedades elásticas do papel, possibilitou comparar diferentes tipos de núcleos. Os resultados referentes aos tamanhos de núcleos mais utilizados ( $A_{\sim}$  e  $C_{\sim}$ ) mostraram-se próximos aos valores obtidos experimentalmente.

Os resultados experimentais referentes aos núcleos senoidais são qualitativamente coerentes com modelos analíticos previstos na literatura. A distribuição dos módulos de cisalhamento transversais dos núcleos no plano

longitudinal, determinada a partir desses resultados, pode auxiliar no projeto de estruturas sanduíche. Como exemplo, pode-se citar algumas partes do interior de automóveis, pois a rigidez ao cisalhamento transversal do núcleo modifica a rigidez à flexão da estrutura sanduíche, fator importante no projeto estrutural desse tipo de componente.

O código de elementos finitos planos, desenvolvido para a determinação das propriedades elásticas do material da face, foi validado através de um programa comercial. Ele mostrou-se robusto, de fácil utilização e capaz de considerar parâmetros de geometria, material e processo. Para utilizá-lo, é necessário saber previamente a variação de espessura e as propriedades elásticas do não-tecido composto para cada espessura. No entanto, tratam-se de dados de possível obtenção experimental, como descrito no presente trabalho.

O modelo de elementos finitos de viga utilizado para determinação das propriedades longitudinais dos núcleos senoidais e hexagonais, mostram que tais propriedades são desprezíveis comparadas com as transversais. Esta conclusão confirma que, para o cálculo da rigidez à flexão da estrutura sanduíche, as propriedades equivalentes de maior importância são  $E_3$ ,  $G_{13}$  e  $G_{23}$ , assim como previsto em literatura referente às estruturas sanduíche fabricadas em outros materiais.

Para prosseguimento do presente trabalho sugere-se:

- Aplicar modelos de micromecânica, tanto para o papel celulose quanto para o não-tecido agulhado. Através desses modelos é possível avaliar a influência de parâmetros microestruturais em relação às propriedades do núcleo e da face.
- Analisar quantitativamente a influência dos adesivos utilizados para colagem do papel, nas propriedades elásticas do núcleo com modelos de elementos finitos.
- Realizar estudos para diferentes tipos de núcleos, visto que neste trabalho foram analisados apenas os núcleos hexagonal e senoidal.

## REFERÊNCIAS

- ABNT. **NBR 13370**: Não-tecido – Terminologia, 2002.
- ALBRECHT, W.; FUCHS, H.; KITTELMANN, W. **Vliesstoffe: Rohstoffe, Herstellung, Anwendung, Eigenschaften, Prüfung**. Weinheim: WILEY-VCH Verlag GmbH, 2000.
- ALCOCK, B.. **Single Polymer Composites Based on Polypropylene: Processing and Properties**. 2005. 189 f. Tese, Technische Universiteit Eindhoven, Eindhoven, 2005.
- AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **ASTM C273**: Standard Test Method for Shear Properties of Sandwich Core Materials, 2007.
- \_\_\_\_\_. **ASTM C365**: Standard Test Method for Flatwise Compressive Properties of Sandwich Cores, 1994.
- \_\_\_\_\_. **ASTM D578**: Standard Specification for Glass Fiber Strands, 2011.
- BAUM, G. A.; BRENNAN, D. C.; HABEGER, C. C.. Orthotropic elastic constants of paper. **Tappi Journal**, v. 64, n. 8, p. 97-101, 1981.
- BECKER, W.. The in-plane stiffnesses of a honeycomb core including the thickness effect. **Archive of Applied Mechanics**, v. 68, n. 5, p. 334-341, 1998.
- BÉDOUI, F.; DIANI, J.; RÉGNIER, G.; SEILER, W.. Micromechanical modelling of isotropic elastic behaviour of semicrystalline polymers. **Acta Materialia**, v. 54, p. 1513-1523, 2006.
- BEUTH VERLAG GMBH. **DIN 53141**: Testing of paper and board; bursting test, determination of bursting strength of board according to Mullen, 1979.
- \_\_\_\_\_. **DIN 53294**: Testing of sandwiches; Shear test, 1982.
- \_\_\_\_\_. **DIN 6730**: Paper and board – Vocabulary, 2011.

\_\_\_\_\_. **DIN EN ISO 1924-2**: Paper and board - Determination of tensile properties - Part 2: Constant rate of elongation method (20 mm/min), 2008.

\_\_\_\_\_. **DIN EN ISO 1924-3**: Paper and board - Determination of tensile properties - Part 2: Constant rate of elongation method (100 mm/min), 2008.

\_\_\_\_\_. **DIN EN ISO 29062**: Textiles; nonwovens; definition (ISO 9092:1988), 1992.

\_\_\_\_\_. **DIN EN ISO 527**: Kunststoffe - Bestimmung der Zugeigenschaften, 1996.

\_\_\_\_\_. **DIN EN ISO 534**: Paper and board - Determination of thickness, density and specific volume, 2005.

\_\_\_\_\_. **DIN EN ISO 536**: Paper and board - Determination of grammage, 1995.

\_\_\_\_\_. **DIN 50014**: Climates and their technical application; standard atmospheres, 1982.

\_\_\_\_\_. **DIN 53291**: Testing of sandwiches; Compression test perpendicular to the faces, 1982.

\_\_\_\_\_. **DIN 55468-1**: Packaging materials - Corrugated board - Part 1: Requirements, testing. 2004.

BISWA, P. K.; SENGUPTA, S.; BASU, A. N.. Mechanical properties of semicrystalline polymer-polypropylene. **Solid State Physics**, v. 19, n. 3, p. 215-223, 1982.

BURGT, F. P. T. J. van der. **Crystallization of isotactic polypropylene: The influence of stereo-defects**. 2002. 127 f. Tese, Technische Universiteit Eindhoven, 2002.

BUSICO, V.; CIPULLO, R.. Microstructure of polypropylene. **Progress in Polymer Science**, v. 26, n. 3, p. 443-533, 2001.

CALLISTER, W. D. **Materials Science And Engineering: An Introduction**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2003.

- CAPRIOLI, D.. FEM-Simulation von Sandwich-Elementen mit Wabenkern für die Karosserie. **ATZ - Automobiltechnische Zeitschrift Ausgabe**, v. 110, p. 48-52, 2008.
- CARRASCO, G. C.. Microscopy and computerized image analysis of wood pulp fibres multiscale structures. **Microscopy: Science, Technology, Applications and Education**, v. 4, n. 3, p. 2182-2189, 2010.
- CHEN, D. H.; HORII, H.; OZAKI, S.. Analysis of In-Plane Elastic Modulus for a Hexagonal Honeycomb Core: Analysis of Young's Modulus and Shear Modulus. **Journal of Computational Science and. Technology**, v. 3, n. 1, p. 1-12, 2009.
- COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E.. **Concepts and applications of finite element analysis**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1989.
- DAIMLER AG. Group Research and Advanced Engineering (Sindelfingen). TROMBIN, M.; STAMP, B.; GREINER, R.. Multifunktionale Dachhimmel mit Wabenstrukturen. n. P814967, 2008.
- DOMMELEN, J. A. W.; PARKS, D. M.; BOYCE, M. C.; BREKELMANS, W. A. M.; BAAIJENS, F. P. T.. Micromechanical modeling of intraspherulitic deformation of semicrystalline polymers. **Polymer**, v. 44, p. 6089–6101, 2003.
- ELIAS, H. G.. **Makromoleküle: Physikalische Strukturen und Eigenschaften**. Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH, 2001.
- ERHARD, G.. **Konstruieren mit Kunststoffen**. München: Hanser-Verlag, 1993.
- ESPINOSA, L. Y.; TERRAZAS, T.; MATA, L. L.; HERNÁNDEZ, J. V.. Wood variation in *Laguncularia racemosa* and its effect on fibre quality. **Wood Science and Technology**, v. 38, n. 3, p. 217-226, 2004.
- EYERER, P.; HIRTH, T.; ELSNER, P.. **Polymer Engineering: Technologien und Praxis**. Berlin: Springer Verlag, 2008.

FIDALE, L. C.. **Biopolímeros Modificados: Aspectos de Derivatização de Celulose sob Condições Homogêneas de Reação**. 2010. 248 f. Tese (Doutorado em Química) – Instituto de Química, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

FOELKEL, C.. **Eucalyptus Online Book & Newsletter**: As fibras dos eucaliptos e as qualidades requeridas na celulose Kraft para a fabricação de papel, 2007. Disponível em: <http://www.eucalyptus.com.br/disponiveis.html>. Acessado em: 29 de Nov. de 2011.

GIBSON, L. J.; ASHBY, M. F.. **Cellular solids: Structure & properties**. Oxford: Pergamon Press, 1997.

GRUBER, E.. **Grundlagen der Zellstofftechnologie**. Disponível em: [http://gruberscript.net/Inhalt\\_Zellstoff.html](http://gruberscript.net/Inhalt_Zellstoff.html). Acessado em: 28 de Nov. de 2011.

GUAGNELI, R. S.. **Propriedades mecânicas do osso esponjoso e cortical do rato, após período de imobilização por aparelho gessado ou suspensão pela cauda**. 2008. 70 f. Dissertação (Mestrado em Bioengenharia) – Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto, USP, 2008.

HOSEMAN, R.. The paracrystalline state of synthetic polymers. **Journal of Polymer Science: Polymer Symposia**, v. 50, n. 1, p. 265–281, 1975.

INDUSTRIEVEREINIGUNG VERSTÄRKTE KUNSTSTOFFE E. V.. **Handbuch Faserverbundkunststoffe: Grundlagen, Verarbeitung, Anwendungen**. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2010.

INTERNATIONAL UNION OF PURE AND APPLIED CHEMISTRY. List of standard abbreviations (symbols) for synthetic polymers and polymer materials. **Pure Applied Chemistry**, v. 40, p. 473-476, 1974.

JONES, R. M.. **Mechanics of Composite Materials**. 2. ed. New York: Taylor & Francis Group, 1999.

KARIAN, H. G.. **Handbook of Polypropylene and Polypropylene Composites**. New York: Marcel Dekker Inc., 1999.

KELLER, A.. A note on single crystals in polymers: Evidence for a folded chain configuration. **Philosophical Magazine**, v. 2, n. 21, p. 1171-1175, 1957.

KEUERLEBER, M.. **Bestimmung des Elastizitätsmoduls von Kunststoffen bei hohen Dehnraten am Beispiel von PP**. 2006. 119 f. Tese - Fakultät Maschinenbau, Stuttgart Universität, Stuttgart 2006.

KHAURY, F.. The Spherulitic Crystallization of Isotactic Polypropylene From Solution: On the Evolution of Monoclinic Spherulites From Dendritic Chain-Folded Crystal Precursors. **Journal of Research of the National Bureau of Standards**, v. 70, n. 1, p. 29-61, 1966.

LAI, M.; RUBIN, D.; KREMPL, E.. **Introduction to Continuum Mechanics**. 3. ed. New York: Elsevier Science Publisher, 1994.

MACHADO, G.; LUCA, M. A.; SAMIOS, D.. Avaliação da Orientação das esferulitas do polipropileno isotático após deformação. In: **Anais da XXIII Reunião Anual da Sociedade Brasileiro de Química - SBQ**, 2000, Poços de Caldas, p. FQ034, 2000.

MACKERLE, M.. Finite element analyses of sandwich structures: a bibliography (1980–2001). **Engineering Computations**, v. 19, n. 2, p. 206-245, 2002.

MAIER, C.; CALAFUT, T.. **Polypropylene: The Definitive User's Guide and Databook**. New York: William Andrew Inc., 1999.

MASTERS, I. G.; EVANS, K. E.. Models for the elastic deformation of honeycombs. **Composite Structures**, v. 35, p. 403-422, 1996.

NISSAN, A. H.; STERNSTEIN, S. S.. Cellulose as a viscoelastic material. **Pure and Applied Chemistry**, v. 5, n. 1-2, p. 131-146, 1962.

PASQUINI, N.. **Polypropylen Handbook**. Cincinnati: Hanser Gardner Publication, 2005.

PEMRG. **Plastics - the Facts 2011 - An analysis of European plastics production, demand and recovery for 2010.**

Disponível em: <http://www.plasticseurope.org/information-centre/publications-test.aspx>.

Acesso em: 28 de Nov. de 2011.

PINTO, L. P.. **Relação entre microestrutura e propriedades mecânicas no polipropileno de ultra alto peso molecular.** 1998. 265 f. Dissertação (Mestrado em Ciência dos Materiais) - Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 1998.

ROMANS, T. T. H. J.. **Humidity influences on creasing behaviour of corrugated board: An analytical, experimental and numerical approach.** 2008. 59 f. Dissertação - Departement Mechanical Engineering, Materials Technology, Technische Universiteit Eindhoven, Eindhoven 2008.

ROSA, C. A. B.. **Influência do teor de lignina da madeira *Eucalyptus globulus* na produção e na qualidade da celulose Kraft.** 2003. 150 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Florestal) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2003.

SCA. Disponível em: <http://www.scacontainerboard.com/Products/Product-line/Brown-liner/>. Acessado em: 28 de Nov. de 2011.

SCHMIEDEL, H.. **Handbuch der Kunststoffprüfung.** München: Carl Hanser Verlag, 1992.

SCHOBIG, M.. **Schädigungsmechanismen in faserverstärkten Kunststoffen - Quasistatische und dynamische Untersuchungen.** Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2011.

SCHÜRMAN, H.. **Konstruieren Mit Faser-Kunststoff-Verbunden.** New York: Springer, 2007.

SMART FORVISION. Disponível em: <http://www.smartforvision.basf.com/>.

Acessado em: 29 de Dezembro de 2011.

STAMP, B.. **Systematische Betrachtung von Sandwichleichtbauteilen mit Papierwabenkernen und thermoplastischen faserverstärkten Deckschichten für die Anwendung im Fahrzeuginterieur**. 2011. 125 f. Tese - Graduate School of Excellence advanced Manufacturing Engineering, Stuttgart Universität, Stuttgart, 2011.

SZEWCZYK, W.. Determination of Poisson's Ratio in the Plane of the Paper. **FIBRES & TEXTILES in Eastern Europe**, v. 16, n. 69, p. 117-120, 2008.

SZEWCZYK, W.; MARYNOWSKI, K.; TARNAWSKI, W.. An Analysis of Young's Modulus Distribution in the Paper Plane. **FIBRES & TEXTILES in Eastern Europe**, v. 14, n. 58, p. 91-94, 2006.

TAPPI. **T 236 - Kappa Number of Pulp**. Atlanta: Tappi, 2006.

\_\_\_\_\_. **T 494 om-01 - Tensile properties of paper and paperboard (using constant rate of elongation apparatus)**. Atlanta: Tappi, 2005.

TASHIRO, K.; KOBAYASHI, M.; TADOKORO, H.. Vibrational Spectra and Theoretical Three-Dimensional Elastic Constants of Isotactic Polypropylene Crystal: An Important Role of Anharmonic Vibrations. **Polymer Journal**, v. 24, n. 9, p. 899-916, 1992.

TORSAKUL, S.. **Modellierung und Simulation eines Verbunds von Sandwichplatten zur Entwicklung einer mechanischen Verbindungstechnik**. 2007. 135 f. Tese - Fakultät für Maschinenwesen, Technischen Hochschule Aachen, Aachen, 2007.

TROMBIN, M. S.; LUERSEN, M. A.. A Numerical-Experimental Assessment of Elastic Properties of Sandwich Structures Cores Made of Cellulose Paper, In: IN-TECH 2011, Bratislava. **Proceedings of International Conference on Innovative Technologies**. Praga: Czech Technical University in Prague, p. 348-351, 2011.

VLACK, L. H. Van. **Propriedades de Materiais Cerâmicos**. São Paulo: Edgard Blücher, 1973.

VINSON, J. R.. **The behavior of sandwich structures of isotropic and composite materials**. Lancaster: Technomic Pub. Co., 1999.

WABENFABRIK. Disponível em: <http://www.wabenfabrik.de/>. Acessado em: 28 de Nov. 2011.

WALLENBERGER, F. T.; BINGHAM, P. A.. **Fiberglass and Glass Technology, Energy-Friendly Compositions and Applications**. New York: Springer, 2010.

WANG, H. P.; CHUM, S. P.; HILNER, A.; BAER, E.. Deformation of Elastomeric Polyolefin Spherulites. **Journal of Polymer Science: Part B: Polymer Physics**, Wiley Periodicals, Inc., v. 47, p. 1313–1330, 2009.

WCO. **European Corrugated Base Papers List: Definition, Identification and Terms of Guarantee for Technical Specification**.

Disponível em: <http://www.wco-containerboard.org/>. Acessado em: 28 de Nov. 2011.

WIEBECK, H.; HARADA, J.. **Plásticos de Engenharia - Tecnologia e Aplicações**. São Paulo: Artiber, 2005.

WILKE, W.. Paracrystalline order in polymers. **Colloid & Polymer Science**, v. 259, n. 6, p. 577-586, 1981.

XU, X. F.; QIAO, P.. Homogenized elastic properties of honeycomb sandwich with skin effect. **International Journal of Solids and Structures**, v. 39, p. 2153-2188, 2002.

ZIEGLER, K.. Consequences and development of an invention. **Rubber Chemistry and Technology**, v. 38, p. 6-24, 1965.

ZUGENMAIER, P.. Contribution to the historical development of macromolecular chemistry – Exemplified on cellulose. **Cellulose Chemistry Technology**, v. 9-10, n. 43, p. 351-378, 2009.

## APÊNDICE A – RELAÇÕES ELÁSTICAS CONSTITUTIVAS

### A.1 – Sólido unidimensional

É suposto um cilindro que representa um sólido unidirecional, contínuo e linearmente elástico, com seção transversal de área transversal infinitesimal  $dA$  e comprimento  $L$ . Uma extremidade é fixa, ponto  $a$ , e outra livre, ponto  $b$ . No ponto  $b$  é aplicada uma força estática com intensidade infinitesimal  $dF$ , direção colinear ao eixo axial do cilindro e sentido oposto ao ponto  $a$ . Com a aplicação da força no cilindro, esse é alongado ou contraído para um comprimento  $L^*$ , diferente de  $L$ . Com isso, a diferença infinitesimal entre os comprimentos é o deslocamento do ponto  $b$ ,  $du_b$ . O percentual de deslocamento em relação ao comprimento inicial do cilindro é a deformação do ponto  $b$ ,  $d\varepsilon_b$ . A ação da força por unidade de área do material gera tensão normal no ponto  $b$ ,  $d\sigma_b$ . O deslocamento, a deformação e a tensão são grandezas físicas avaliadas no ponto  $b$ , dadas por

$$du_b = L^* - L, \quad \text{A.1}$$

$$d\varepsilon_b = \frac{du_b}{L} \quad \text{A.2}$$

e

$$d\sigma_b = \frac{dF_b}{dA}. \quad \text{A.3}$$

O material é considerado linearmente elástico, então o deslocamento em  $b$  é uma função linear da força aplicada. Portanto, conforme a Equação A.3, a tensão e o deslocamento também possuem uma relação linear e, conforme Equação A.2, é verificado que a tensão é também uma função linear da deformação. A relação entre tensão e deformação é válida não somente para o ponto  $b$  e pode ser escrita como

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \text{A.4}$$

onde  $E$  é uma propriedade constitutiva do material. Ou ainda, uma propriedade elástica de engenharia denominada módulo de elasticidade ou módulo de Young. Escrevendo a deformação em função da tensão tem-se que

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma. \quad \text{A.5}$$

As Equações A.4 e A.5 são aplicações da lei de Hooke para caso unidirecional.

Outra forma de relacionar tensão e deformação é através da energia potencial elástica por unidade de volume ou densidade de energia de deformação  $W$ , assim

$$\frac{dW}{d\varepsilon} = \sigma. \quad \text{A.6}$$

$W$  também pode ser interpretado como o trabalho por unidade de volume realizado pelo material durante a deformação.

## A.2 – Sólido bidimensional ortotrópico e isotrópico

O material de uma placa pode conter de nenhum até infinitos planos de simetria. Essa seção trata de materiais com dois ou infinitos planos de simetria, ortotrópicos e isotrópicos respectivamente. Foi adotado um sistema de eixos ortogonais 102 (Jones, 1999), tal que os planos de simetrias do material ortotrópico são escritos como 12 e 21. Foi suposto um sólido bidimensional contínuo linearmente elástico, homogêneo, composto por elementos infinitesimais quadrados de faces constantemente retas. Se o sólido é carregado mecanicamente e um elemento se desloca e se deforma, os elementos vizinhos também tendem a se deslocar e se deformar. Diferente dos pontos do cilindro unidirecional descrito na seção anterior, os elementos não se movem necessariamente na mesma direção, mas nas direções 1 e ou 2. Combinadas duas a duas as deformações nessas direções são escritas como:  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_{22} = \varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_{12}$  e  $\varepsilon_{21}$ . As deformações  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  são de extensão ou contração, e as deformações  $\varepsilon_{12}$  e  $\varepsilon_{21}$  de cisalhamento. Essas podem ser representadas como vetores, pois possuem intensidade, direção e sentido. A Figura 3.1 mostra dois exemplos de estado plano de deformação em um elemento.

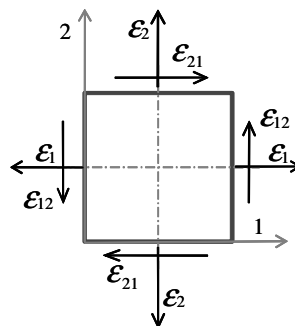


Figura A.1 - Representação do estado plano de deformações em um elemento.

As deformações  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  não são independentes. Ao ser deformado na direção 1 o elemento tende a se deformar na direção 2 com sinal contrário e vice-versa. Esse efeito é causado por uma propriedade intrínseca do material referente à contração transversal, a qual pode ser expressa pelo coeficiente de Poisson e considerada constante para muitos materiais. Esse coeficiente é definido como a fração de deformação transversal gerada por uma deformação longitudinal. Portanto, para o caso bidimensional existem dois coeficientes de Poisson, escritos como

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i}. \quad \text{A.7}$$

As deformações de cisalhamento  $\varepsilon_{12}$  e  $\varepsilon_{21}$  também são dependentes entre si. Devido simetria geométrica tem-se que

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}. \quad \text{A.8}$$

No material suposto não há relação entre as deformações normais (extensão-contração) e as deformações de cisalhantes.

Análogo às deformações, as tensões também se diferem conforme a direção e podem ser escritas como  $\sigma_{11} = \sigma_1$ ,  $\sigma_{22} = \sigma_2$ ,  $\tau_{12}$  e  $\tau_{21}$ . As duas primeiras são deformações normais (tração ou compressão) e demais de cisalhamento. Suas representações espaciais como vetores são análogas às deformações da Figura A.1.

Se uma deformação em uma direção pode gerar outra em direção diferente e se deformação se relaciona com tensão, então uma deformação em uma direção pode gerar tensões em direções distintas. Na determinação de uma tensão, a Lei de Hooke considera a soma ponderada dos efeitos de outras deformações (Lai *et al.*, 1994). Se deformação normal não se relaciona com deformação de cisalhamento, então tensão normal se relaciona somente com deformação normal. Portanto, as relações entre as tensões e deformações normais podem ser escritas como

$$\sigma_1 = Q_{11}\varepsilon_1 + Q_{12}\varepsilon_2, \quad \text{A.9}$$

e

$$\sigma_2 = Q_{21}\varepsilon_1 + Q_{22}\varepsilon_2. \quad \text{A.10}$$

A ponderação da soma é dada pelas constantes de elasticidade ou coeficientes da relação constitutiva  $Q_{ij}$ . Onde os índices  $i$  e  $j$  são referentes à tensão e à

deformação relacionadas respectivamente. Por analogia às Equações A.3 e A.4, tensões de cisalhamento são dadas pela soma dos efeitos das deformações de cisalhamento. Assim, considerando que

$$\tau_{12} = \tau_{21}, \quad \text{A.11}$$

tem-se que

$$\tau_{12} = 2Q_{33}\varepsilon_{12}. \quad \text{A.12}$$

Onde o índice 33 é referente à relação entre  $\tau_{12}$  e  $\varepsilon_{12}$ . Por convenção, para simplificar a Equação A.12, é adotada outra nomenclatura para a deformação de cisalhamento  $\varepsilon_{12}$ , onde

$$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}. \quad \text{A.13}$$

Portanto, a tensão de cisalhamento, Equação A.12, é escrita como

$$\tau_{12} = Q_{33}\gamma_{12}. \quad \text{A.14}$$

Assim como no caso unidirecional as constantes  $Q_{ij}$  são dependentes apenas de propriedades elásticas do material, tais como: extensão-contração, cisalhamento e contração transversal. Para contração transversal, conforme a Equação A.7, existem  $\nu_{12}$  e  $\nu_{21}$ . Lembrando que o suposto material possui dois planos de simetria, devem existir dois módulos de elasticidade independentes,  $E_1$  e  $E_2$ . Como o cisalhamento não é necessariamente relacionado com a extensão-contração o material pode apresentar propriedades elásticas exclusivas de cisalhamento, chamadas de módulos de cisalhamento,  $G_{12}$  e  $G_{21}$ . Portanto essas relacionam deformação e tensão de forma direta, tal que

$$Q_{33} = G_{12} = G_{21}. \quad \text{A.15}$$

Em notação indicial, as Equações A.9, A.10 e A.12 podem ser escritas como

$$\sigma_i = Q_{ij}\varepsilon_j \quad \text{A.16}$$

e em notação matricial como

$$\{\sigma\}_{102} = [Q]\{\varepsilon\}_{102} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_1 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}. \quad \text{A.17}$$

A matriz  $[Q]$  é conhecida como matriz de rigidez do material. Também na forma matricial, com as deformações em função das tensões, tem-se que

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}, \tag{A.18}$$

tal que

$$[S] = [Q]^{-1}. \tag{A.19}$$

A matriz  $[S]$  é denominada matriz de flexibilidade do material. Dessa forma, as constantes  $S_{ij}$  também são funções apenas do material. A Figura A.2 mostra como os elementos da matriz de flexibilidade relacionam os efeitos de tensão e deformação. Essa análise também vale para os elementos da matriz de rigidez,  $Q_{ij}$ .

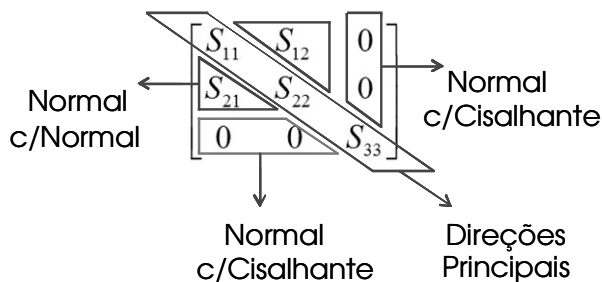


Figura A.2 – Características dos elementos da matriz de flexibilidade.

Os coeficientes com índices  $i$  e  $j$  repetidos caracterizam propriedades em direções principais. Para determinar esses coeficientes, é possível utilizar analogia com o caso unidirecional, Equação A.5, tal que

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}, \tag{A.20}$$

$$S_{22} = \frac{1}{E_2}, \tag{A.21}$$

e

$$S_{33} = \frac{1}{G_{12}}. \tag{A.22}$$

Como a primeira linha da matriz  $[S]$  relaciona  $\varepsilon_1$  com  $\sigma_1$ , então, em parte,  $S_{12}$  depende da constante de proporcionalidade  $1/E_1$ . Por outro lado, relaciona também a extensão-contração na direção 1 com a direção 2. Assim,  $1/E_1$  deve ser

multiplicado pela fração de deformação em 2 em relação à deformação em 1. Assim, pode ser escrito que

$$S_{12} = \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) \frac{1}{E_1}. \quad \text{A.23}$$

Pela definição de coeficiente de Poisson conforme a Equação A.7 tem-se que

$$S_{12} = -\nu_{12} \frac{1}{E_1}. \quad \text{A.24}$$

Por analogia,

$$S_{21} = -\nu_{21} \frac{1}{E_2}. \quad \text{A.25}$$

Reescrevendo a matriz de flexibilidade, a partir da Equação A.18, tem-se que

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}. \quad \text{A.26}$$

Do conceito de densidade de energia de deformação, como mostrado na Equação A.6, substituindo a Equação A.16, tem-se que

$$\frac{dW}{d\varepsilon} = Q_{ij} \varepsilon_j. \quad \text{A.27}$$

Aplicando as derivadas parciais para cada  $\varepsilon_i$ , tem-se que

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_i} = Q_{ij} \varepsilon_j. \quad \text{A.28}$$

Aplicando o diferencial para  $\varepsilon_j$  e isolando as constantes elásticas, é deduzido que

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_i} = Q_{ij} = Q_{ji}. \quad \text{A.29}$$

É concluído que a matriz  $[Q]$  é simétrica, bem como a partir da Equação A.19,  $[S]$  também é simétrica. Com isso e igualando a Equação A.24 à A.25, é obtido que os coeficientes de Poisson são proporcionais à relação entre os módulos de elasticidade. Tal que

$$\nu_{21} = \left( \frac{E_2}{E_1} \right) \nu_{12}. \quad \text{A.30}$$

Como o inverso da igualdade da Equação A.19 também é verdadeiro, invertendo [S] apresentada na Equação A.26 e substituindo em A.17, tem-se que

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}. \quad \text{A.31}$$

Conforme a Equação A.31, vem que

$$Q_{ij} = f(E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}). \quad \text{A.32}$$

Nem sempre o sistema de coordenadas utilizado como referência para análise de tensões em um componente (sistema global) é coincidente com o sistema de simetria do material (sistema local). Foi adotado como sistema global os eixos x e y como mostra a Figura A.3, onde x está rotacionado em relação a 1 por um ângulo igual a  $+\theta$  (Jones, 1999).

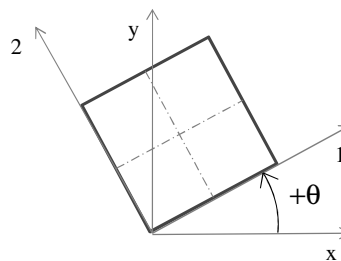


Figura A.3 – Relação entre sistema local e global.

Os dois possíveis deslocamentos lineares entre os sistemas não mudam as relações constitutivas, pois os planos de simetria do material continuariam válidos. Por isso só é considerada a rotação  $\theta$ .

Para obter as tensões e deformações no sistema xOy pode ser aplicada uma matriz de transformação de coordenadas, [T], dependente unicamente de  $\theta$ . Para maior simplicidade, faz-se que

$$s = \text{sen}(\theta) \quad \text{A.33}$$

e

$$c = \cos(\theta). \tag{A.34}$$

Para obter a matriz transformação são supostos dois elementos rotacionados e cortados pelos eixos x e y, como mostra a Figura A.4.

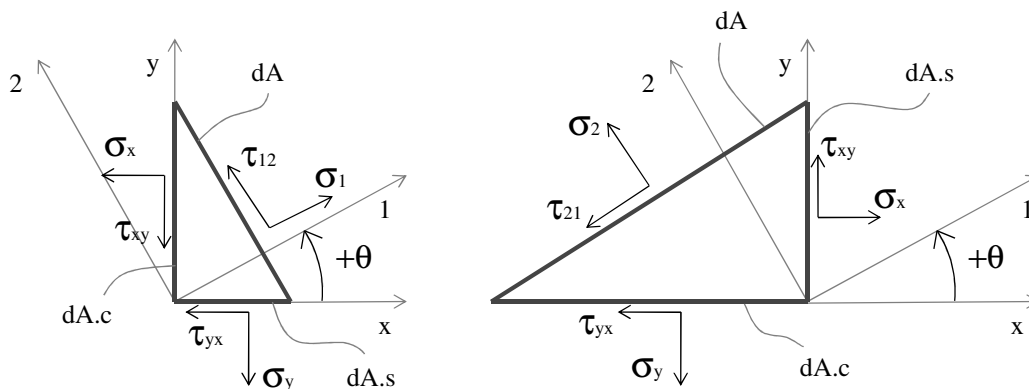


Figura A.4 – Tensões nos sistemas 1O2 e xOy, usado para obter [T].

O somatório de forças nos sentidos x e y para ambos os elementos deve ser nulo. As tensões cisalhantes são igualadas, Equação A.11, e as tensões do sistema 1O2 são isoladas. Os coeficientes das três equações resultantes geram

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix}. \tag{A.35}$$

Sua inversa é dada por

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix}. \tag{A.36}$$

Com isso, a relação de tensões entre os dois sistemas é dada por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \tag{A.37}$$

e

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}. \tag{A.38}$$

Para a deformação,  $[T]$  não relaciona a deformação de cisalhamento  $\gamma_{12}$ , mas sim  $\varepsilon_{12}$ . Portanto, é necessária a inserção de uma relação entre as matrizes de deformação com  $\gamma_{12}$  e com  $\varepsilon_{12}$ . Com base na Equação A.13, tem-se que

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}. \quad \text{A.39}$$

Chamando essa relação de  $[R]$ , determina-se que

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [T][R] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad \text{A.40}$$

e

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [R]^{-1}[T]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}. \quad \text{A.41}$$

A relação constitutiva para o sistema  $xOy$  é escrita através de uma matriz dependente do material e da orientação de seus eixos de simetria no espaço, tal que

$$\bar{Q}_{ij} = f(E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}, \theta). \quad \text{A.42}$$

A relação constitutiva para esse caso pode ser escrita como

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad \text{A.43}$$

Substituindo as Equações A.37 e A.40 na Equação A.17 tem-se

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} [Q][T][R] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad \text{A.44}$$

Por comparação das Equações A.43 e A.44, tem-se que

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1} [Q][T][R]. \quad \text{A.45}$$

Através das multiplicações necessárias, prova-se que  $[\bar{Q}]$  também é matriz simétrica (Jones, 1999). A relação inversa é dada pela matriz  $[\bar{S}]$ , tal que

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{S}] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}. \quad \text{A.46}$$

Análogo à Equação A.19,

$$[\bar{S}] = [\bar{Q}]^{-1}. \quad \text{A.47}$$

Através dos elementos  $\bar{S}_{ij}$  é possível obter o módulo de elasticidade, módulo de cisalhamento e coeficiente de Poisson dependentes da orientação  $\theta$ . Por analogia às Equações A.20 e A.22, tem-se que

$$\bar{S}_{11} = \frac{1}{E_x} \quad \text{A.48}$$

e

$$\bar{S}_{33} = \frac{1}{G_{xy}}. \quad \text{A.49}$$

O coeficiente de Poisson é obtido por analogia à Equação A.24, tal que

$$\bar{S}_{12} = -\nu_{xy} \frac{1}{E_x}. \quad \text{A.50}$$

Substituindo A.48 em A.50 e rearranjando tem-se que

$$\nu_{\theta} = -\frac{\bar{S}_{12}}{\bar{S}_{11}}. \quad \text{A.51}$$

Conforme a Equação A.47, invertendo a matriz  $[\bar{Q}]$ , são obtidos os elementos  $\bar{S}_{ij}$ . Através de  $\bar{S}_{11}$ ,  $\bar{S}_{33}$  e  $\bar{S}_{12}$ , de posse das Equações A.48, A.49 e A.51, são obtidos  $E_x$ ,  $G_{xy}$  e  $\nu_{xy}$  em função de  $\theta$ . Reescrevendo essas variáveis como  $E_{\theta}$ ,  $G_{\theta}$  e  $\nu_{\theta}$ , respectivamente, tem-se que

$$E_{\theta} = \left[ \frac{c^4}{E_1} + \frac{s^4}{E_2} + s^2 c^2 \left( \frac{1}{G_{12}} - 2 \frac{\nu_{12}}{E_1} \right) \right]^{-1}, \quad \text{A.52}$$

$$G_{\theta} = \left[ \frac{(c^2 - s^2)^2}{G_{12}} + 4s^2 c^2 \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + 2 \frac{\nu_{12}}{E_1} \right) \right]^{-1} \quad \text{A.53}$$

e

$$\nu_{\theta} = \frac{-\frac{\nu_{12}}{E_1}(s^4 + c^4) + s^2 c^2 \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} \right)}{\frac{c^4}{E_1} + \frac{s^4}{E_2} + s^2 c^2 \left( \frac{1}{G_{12}} - 2 \frac{\nu_{12}}{E_1} \right)}. \quad \text{A.54}$$

Uma placa com infinitos planos de simetria possui comportamento elástico constante com a direção, com isso

$$E_2 = E_1 = E, \quad \text{A.55}$$

$$\nu_{21} = \nu_{12} = \nu \quad \text{A.56}$$

e

$$G_{12} = G. \quad \text{A.57}$$

Nesse caso as Equações A.52, A.53 e A.54, continuam válidas. Além disso, é possível relacionar os módulos de cisalhamento e elasticidade, bem como o coeficiente de Poisson. Adotando  $\theta = 45^\circ$  e isolando o módulo de cisalhamento, vem

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad \text{A.58}$$

Portanto, os materiais isotrópicos têm somente o módulo de Young e o coeficiente de Poisson como propriedades elásticas independentes. Com isso, é escrito que

$$[\bar{Q}] = [Q] = [S]^{-1} = [\bar{S}]^{-1} = f(E, \nu). \quad \text{A.59}$$

Adotando o sistema xOy para análise de tensões e deformações, a partir da Equação A.31, com as substituições pertinentes, vem que

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad \text{A.60}$$

Essa equação representa a relação constitutiva para placas de materiais isotrópicos.

### A.3 – Sólido tridimensional ortotrópico

Adotando um sistema de eixos ortogonais 1O2O3, um cubo pode conter desde nenhum até infinitos planos de simetria. Essa seção trata de materiais ortotrópicos, três planos de simetrias formados pela combinação dois a dois dos eixos 1, 2 e 3.

Análogo ao sistema bidimensional, as deformações são escritas como  $\epsilon_{ij}$ . A Figura 4.1 mostra essas deformações na forma vetorial em um elemento cúbico infinitesimal de faces constantemente planas, onde  $i$  corresponde à direção ortogonal à face analisada e  $j$  à direção efetiva da deformação.

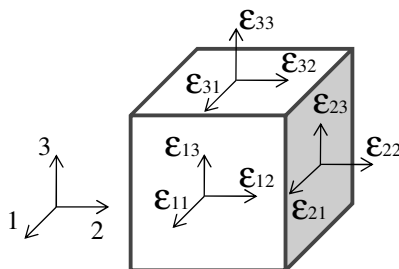


Figura A.5 – Vetores de deformação em um cubo infinitesimal.

As tensões no sistema tridimensional são representadas com três direções para as normais e seis para as tangenciais, análogo às deformações da Figura A.1. A relação de tensões é obtida pela aplicação da lei de Hooke generalizada, tal que

$$\sigma_{11} = Q_{11}\epsilon_{11} + Q_{12}\epsilon_{22} + Q_{13}\epsilon_{33}, \tag{A.61}$$

$$\sigma_{22} = Q_{21}\epsilon_{11} + Q_{22}\epsilon_{22} + Q_{23}\epsilon_{33}, \tag{A.62}$$

e

$$\sigma_{33} = Q_{31}\epsilon_{11} + Q_{32}\epsilon_{22} + Q_{33}\epsilon_{33}. \tag{A.63}$$

Os índices  $i$  e  $j$  para  $Q_{ij}$  são inteiros de 1 a 6. A relação constitutiva para as tensões de cisalhamento são

$$\tau_{23} = 2Q_{44}\epsilon_{23}, \tag{A.64}$$

$$\tau_{13} = 2Q_{55}\epsilon_{13} \tag{A.65}$$

e

$$\tau_{12} = 2Q_{66}\epsilon_{12}. \tag{A.66}$$

A partir das Equações de A.61 a A.66 vem que

$$\{\sigma\}_{10203} = [Q]\{\varepsilon\}_{10203} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{cases}. \quad \text{A.67}$$

Análogo às Equações A.20 a A.22, são deduzidos os elementos de  $[S]_{6 \times 6}$ , tal que

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad \text{A.68}$$

$$S_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad \text{A.69}$$

$$S_{33} = \frac{1}{E_3}. \quad \text{A.70}$$

$$S_{44} = \frac{1}{G_{23}}, \quad \text{A.71}$$

$$S_{55} = \frac{1}{G_{13}} \quad \text{A.72}$$

e

$$S_{66} = \frac{1}{G_{12}}. \quad \text{A.73}$$

Por analogia com as Equações A.50, tem-se que

$$S_{ij} = -\nu_{ij} \frac{1}{E_i} \quad | \quad i \neq j \wedge i, j = \{1;2;3\}. \quad \text{A.74}$$

Os demais elementos da matriz são nulos, como na Equação A.67. Montando e invertendo  $[S]$  é obtido  $[Q]$ . Dessa forma a Equação A.11 passa a ser

$$\begin{cases} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{E_1(1-\nu_{23}\nu_{32})}{\Delta} & \frac{E_1(\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23})}{\Delta} & \frac{E_1(\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32})}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_2(\nu_{12}+\nu_{32}\nu_{13})}{\Delta} & \frac{E_2(1-\nu_{13}\nu_{31})}{\Delta} & \frac{E_2(\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31})}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_3(\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23})}{\Delta} & \frac{E_3(\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{13})}{\Delta} & \frac{E_3(1-\nu_{12}\nu_{21})}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \Delta & \Delta & \Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{cases}, \quad \text{A.75}$$

onde

$$\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}. \quad \text{A.76}$$

Da Equação A.30, aplicável para o caso tridimensional, pode ser escrito em notação indicial que

$$\nu_{ij} = \left( \frac{E_i}{E_j} \right) \nu_{ji} \quad | \quad i \neq j \wedge i, j = \{1;2;3\}. \quad \text{A.77}$$

A partir da Equação A.75, tem-se que

$$Q_{ij} = f(E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{13}, G_{23}, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}). \quad \text{A.78}$$

Em um sistema xOyOz podem existir três translações e três rotações em relação a 1O2O3. As translações não modificam a relação constitutiva, portanto escrevendo as rotações em x, y e z, como  $\alpha_1, \alpha_2$  e  $\alpha_3$ , e considerando  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  e  $\alpha_3 = \theta$ ,

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & 2cs \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -2cs \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -cs & cs & 0 & 0 & 0 & (c^2 - s^2) \end{bmatrix}, \quad \text{A.79}$$

e sua inversa

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & 2cs \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ cs & -cs & 0 & 0 & 0 & (c^2 - s^2) \end{bmatrix}. \quad \text{A.80}$$

A matriz  $[\bar{Q}]$  é simétrica e seus elementos podem ser determinados de forma análoga ao caso bidimensional, tal que

$$\bar{Q}_{ij} = f(E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{13}, G_{23}, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}, \theta). \quad \text{A.81}$$

## APÊNDICE B – MICROMECAÂNICA DE MATERIAIS COMPOSTOS COM REFORÇO UNIDIRECIONAL

### B.1 – Módulo de Young longitudinal ao reforço

A célula do material proposto é definida como uma fibra envolta por uma camada de matriz, tal que esse conjunto se repete ao longo da lâmina sem que haja espaços vazios. Os materiais são considerados perfeitamente elásticos lineares. Análogo ao cilindro da Seção A.1, a Figura 5.1 mostra o modelo geométrico idealizado.

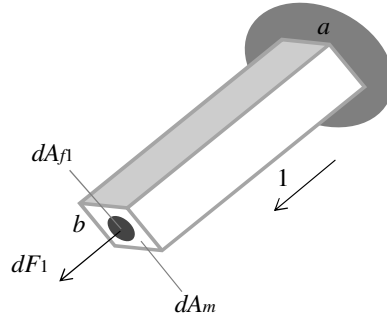


Figura B.1 – Modelo unidimensional do conjunto fibra-matriz.

São adotados índices  $m$  e  $f$  para matriz e fibra respectivamente. Analisando o ponto  $b$ , se uma força  $dF_1$  é aplicada, essa é a soma de  $dF_{m1}$  e  $dF_{f1}$ , nas áreas  $dA_{m1}$  e  $dA_{f1}$ . Por isso, aplicando a Equação A.5, tem-se que

$$d\sigma_1 dA_1 = d\sigma_{m1} dA_{m1} + d\sigma_{f1} dA_{f1}. \quad \text{B.1}$$

Aplicando a Equação A.2 em A.1, obtém-se

$$E_1 d\varepsilon_1 dA_1 = E_{m1} d\varepsilon_{m1} dA_{m1} + E_{f1} d\varepsilon_{f1} dA_{f1}. \quad \text{B.2}$$

A matriz e a fibra possuem comprimento inicial igual a  $l$ . Com a aplicação da carga, terão comprimento  $l^*$  também igual, por isso, através das Equações A.1 e A.2,  $d\varepsilon_b$  é comum entre as partes. Como essa configuração se repete ao longo da placa, dividindo A.2 por  $d\varepsilon_b$ , isolando o módulo de elasticidade na direção 1 e diferenciando em relação às áreas, tem-se que



$$\frac{dF_2}{E_2 dA_2} (l_m + l_f) = \frac{dF_m}{E_{m2} dA_m} l_m + \frac{dF_f}{E_{f2} dA_f} l_f. \quad \text{B.7}$$

Tanto as áreas como as forças são comuns para o conjunto e para cada uma das partes. Portanto podem ser eliminadas da Equação A.7. Isolando o módulo de elasticidade na direção 2, tem-se que

$$\frac{1}{E_2} = \frac{1}{E_{m2}} \left( \frac{l_m}{l_m + l_f} \right) + \frac{1}{E_{f2}} \left( \frac{l_f}{l_m + l_f} \right). \quad \text{B.8}$$

Os termos entre parênteses são relações entre o comprimento de cada parte em relação ao comprimento total. Como as áreas são iguais, essas relações podem ser escritas em função dos volumes relativos. Se escritas em função de  $\varphi$ , tem-se que

$$\frac{1}{E_2} = \frac{1}{E_{m2}} (1 - \varphi) + \frac{1}{E_{f2}} \varphi. \quad \text{B.9}$$

Considerando o modelo da Figura B.1 (a), o módulo elástico da matriz nessa direção deveria ser aproximadamente igual ao coeficiente  $Q_{22}$  para materiais isotrópicos (Schürmann, 2007), Equação A.60. Com isso, isolando  $E_2$ , tem-se que

$$E_2 = \left( \frac{E_m}{1 - \nu_m^2} \right) \frac{1}{(1 - \varphi) + \left( \frac{E_m}{1 - \nu_m^2} \right) \frac{\varphi}{E_{f2}}}. \quad \text{B.10}$$

### B.3 – Coeficiente de Poisson

Para obter o coeficiente de Poisson  $\nu_{12}$  um modelo tridimensional é considerado, como mostra a Figura B.3.

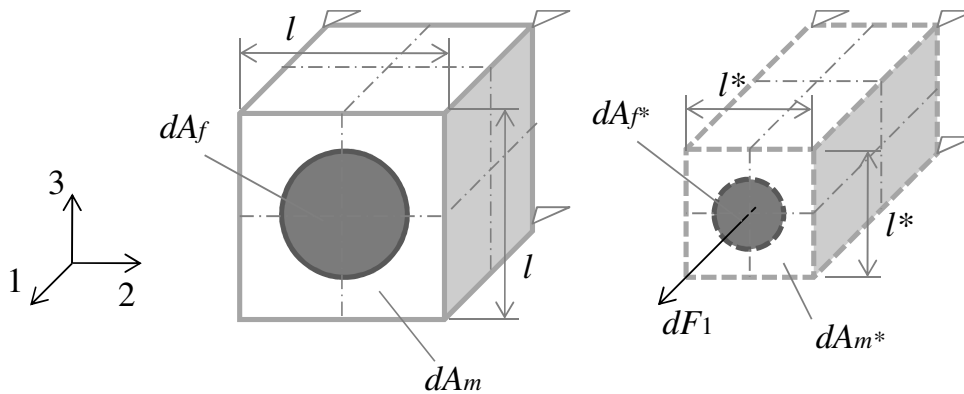


Figura B.3 – Modelo tridimensional do conjunto fibra-matriz para determinar  $\nu_{12}$ .

O modelo fornece uma condição de conjunto ortotrópico. Também é considerado que as propriedades em 3 e em 2 são iguais. Por isso, a área total não deformada no plano 2O3,  $dA$ , é igual ao quadrado de  $dl$ . Assim, se a área total deformada é  $dA^*$ , essa é igual ao quadrado de  $dl^*$ . A diferença entre as áreas é designada  $\Delta A$ . Através da Equação B.2 pode ser escrito que

$$dA^* = dl^2 (d\varepsilon_2^2 + 2d\varepsilon_2 + 1). \quad \text{B.11}$$

O termo de segundo grau é desprezível. Assim

$$\Delta A = 2d\varepsilon_2 dA. \quad \text{B.12}$$

Aplicando o conceito de coeficiente de Poisson, Equação A.7, vem que

$$\Delta A = -2\nu_{12} d\varepsilon_1 dA. \quad \text{B.13}$$

$\Delta A$  pode ser escrito como a soma das diferenças de áreas em cada parte, tal que

$$\Delta A = \Delta A_m + \Delta A_f. \quad \text{B.14}$$

Por analogia à Equação B.13, a Equação B.14 é reescrita como

$$-2\nu_{12} d\varepsilon_1 dA = -2\nu_m d\varepsilon_{m1} dA_m + -2\nu_{f12} d\varepsilon_{f1} dA_f. \quad \text{B.15}$$

As deformações em 1 devem ser iguais, por isso podem ser eliminadas. Simplificando e isolando o coeficiente de Poisson do conjunto, vem que

$$\nu_{12} = \nu_m \left( \frac{dA_m}{dA} \right) + \nu_{f12} \left( \frac{dA_f}{dA} \right). \quad \text{B.16}$$

Por analogia a Equação B.3 é escrito que

$$\nu_{12} = \nu_m (1 - \varphi) + \nu_{f12} \varphi. \quad \text{B.17}$$

#### B.4 – Módulo de cisalhamento

O modelo para obtenção do módulo de cisalhamento  $G_{12}$  é análogo ao módulo de elasticidade transversal (Schürmann, 2007), tal que

$$G_{12} = G_m \frac{1}{(1 - \varphi) + \frac{G_m}{G_{f12}} \varphi}. \quad \text{B.18}$$

## APÊNDICE C – APLICATIVO DE ELEMENTOS FINITOS EM VBA

### C.1 – Interação do aplicativo com o usuário

O algoritmo proposto lê e mostra suas variáveis em planilhas do *Microsoft Excel* através de um código escrito em linguagem VBA. Foram criadas planilhas referentes à geometria, **Geo**; malha de elementos finitos, **Mesh**; materiais, **Mat**; carregamento, **Load Step**; processamento, **Solver**; lista de resultados, **List Results**; e resultados gráficos, **Graphic Results**. Para executar o algoritmo através da planilha **Solver** são preenchidos alguns campos específicos nas planilhas **Geo**, **Mesh**, **Mat** e **Load Step** e os resultados são mostrados nas planilhas **List Results** e **Graphic Results**.

Um exemplo de utilização da planilha **Geo** é mostrado na Figura C.1, onde é modelada uma célula hipotética da face de uma estrutura sanduíche com núcleo senoidal. Na seção **Plate** podem ser escritas as dimensões e o código do material da placa que representa a região A da célula. Na seção **Heterogeneous Regions** são escritas as coordenadas das linhas de centro das curvas que representam a região B indicadas como **Curve 1**, **Curve 2** e **Curve 3**; bem como as dimensões e os códigos dos materiais correspondentes, onde  $d$  é a largura da região B.

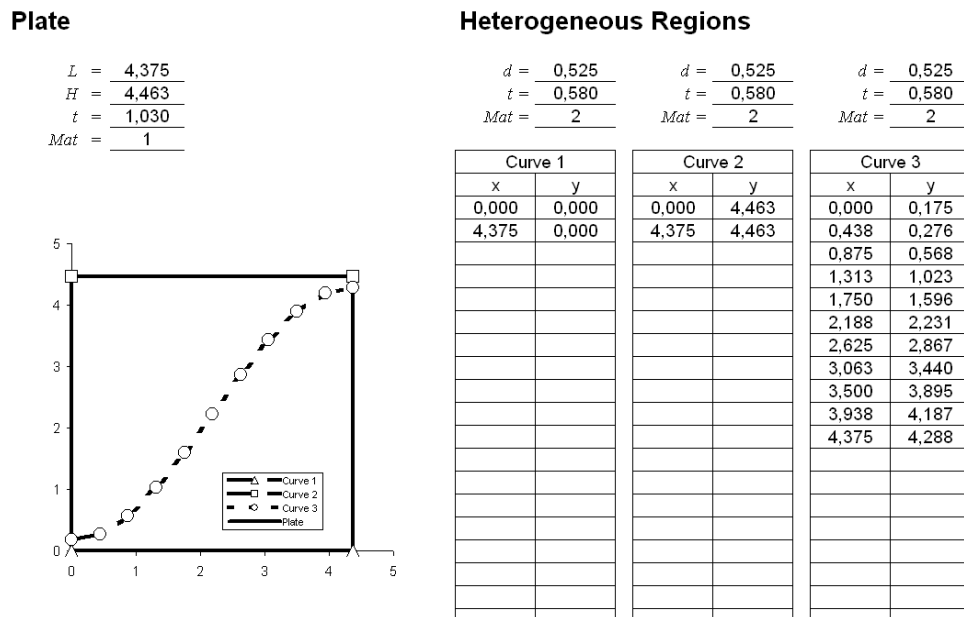


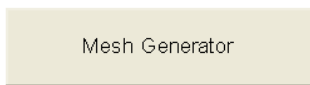
Figura C.1 – Planilha **Geo**.

Um exemplo da planilha **Mesh** é mostrado na Figura C.2, onde foi modelada a célula hipotética mostrada na planilha **Geo**. Na seção **Parameters** pode ser escrito o tamanho do elemento,  $de$ . Através do algoritmo em VBA, o botão **Mesh Generator** gera a malha de elementos finitos, mostra algumas de suas propriedades básicas na seção **Basic Properties** e três resultados gráficos. Onde  $nE$  e  $nN$  correspondem às quantidades de elementos e nós respectivamente. Para visualização da malha o algoritmo mostra o diagrama **Nodes Coordinates** correspondente às coordenadas dos nós no espaço  $xy$ . Para visualização das diferenças de propriedades entre as regiões A e B, são mostrados os materiais e as espessuras a partir das coordenadas dos elementos nos diagramas seguintes.

**Mesh**

**Parameters**

$de = 0,088$



**Basic Properties**

$nE = 5100$   
 $nN = 2652$

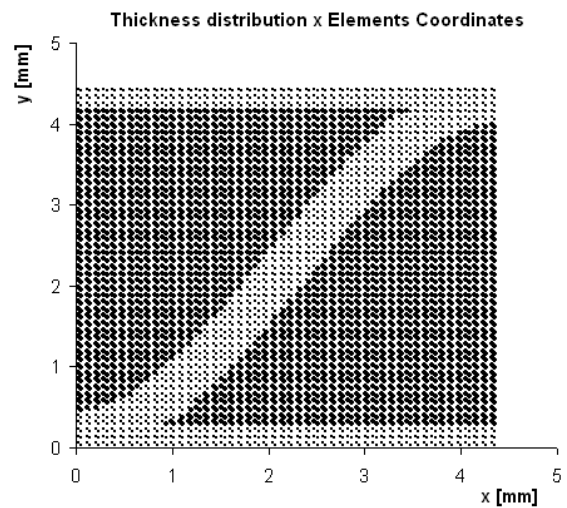
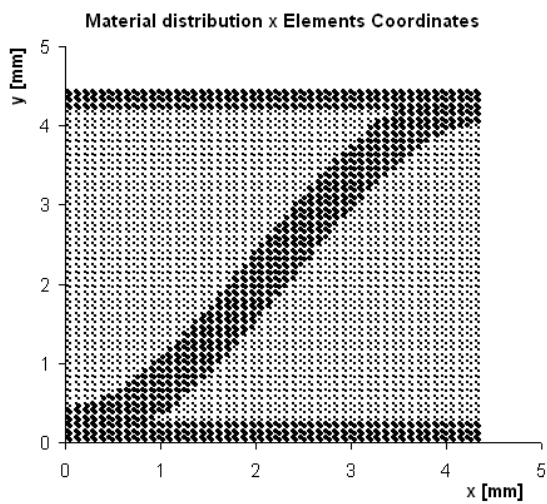
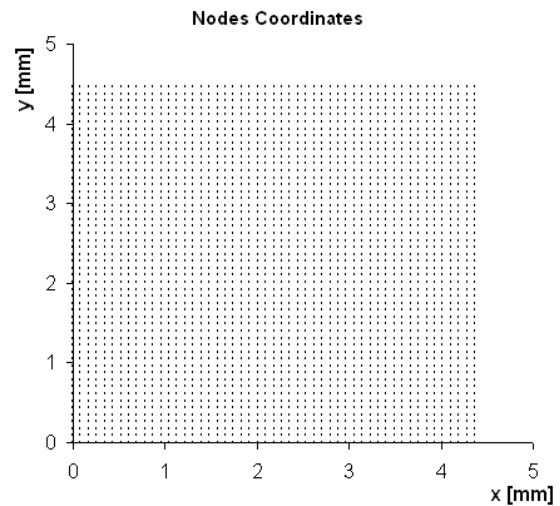


Figura C.2 – Planilha **Mesh**.



As colunas **Geometry** e **Number** são indicadas pela inscrição **Apply** e se referem ao local de aplicação. A coluna **Geometry** pode receber os valores  $n$  ou  $l$ , tal que a  $cc$  é aplicado em um nó ou em uma linha respectivamente. A Coluna **Number** pode receber números naturais e corresponde ao código do nó ou da linha de  $cc$ . A codificação das linhas vai de um a quatro e dos nós de um a  $nN$ . A ordem de numeração é mostrada na Subseção 3.6.6, onde os detalhes da geração da malha são discutidos. A coluna **Typ** pode receber valores de texto, sendo eles:  $u$ ,  $up$  ou  $q$ . Esses valores indicam o tipo de  $cc$ , tal que os dois primeiros correspondem a deslocamentos e o último a carga distribuída. O tipo  $u$  equivale a um deslocamento nodal prescrito e é aplicável tanto para nós quanto para linhas. Nesse caso, a coluna **Value** que indica uma quantidade pode receber valor zero. O tipo  $up$  é aplicável somente para linhas e corresponde a um deslocamento prescrito progressivo ao longo da linha, tal que uma extremidade possui quantidade zero e a outra possui o valor indicado na coluna **Value**, cujo valor nulo nesse caso é incoerente. O sentido em que o deslocamento do tipo  $up$  progride ao longo de cada linha é indicado no esquema da Figura 3.14. Carregamentos de cisalhamento são exemplos de aplicação de deslocamentos desse tipo. O tipo  $q$  equivale a uma carga distribuída aplicável em nós ou linhas. Nesse caso, se a coluna **Value** contém zero também há incoerência. A coluna **Direction** corresponde à direção em que a  $cc$  é aplicada em um dado nó, portanto tem a função de identificar o grau de liberdade sujeito a condição de contorno.

Um exemplo da planilha **Solver** é mostrado na Figura C.5. O botão **Solve** executa operações de pré-processamento, processamento e pós-processamento. Durante a execução é mostrado o quanto cada fase de cálculo foi realizada em porcentagem. Foram escolhidas as dez fases de cálculo as quais necessitam de maior tempo de processamento, são elas: *Connectivity* (gera a matriz de relação entre elementos e nós), *Nodal Coordinates* (calcula as coordenadas nodais), *Element Coordinates* (calcula as coordenadas dos elementos), *Global Stiffness Matrix* (gera a matriz global de rigidez semi-banda), *Boundary Condition* (gera a matriz global de rigidez semi-banda com a aplicação de forças nodais e deslocamentos prescritos), *Cholesky Factorization* (aplica o método de decomposição de Cholesky), *Displacements* (calcula os deslocamentos nodais), *Resultant Forces* (calcula as forças distribuídas

nodais), *Nodal Coordinates with Displacements* (calcula as coordenadas dos nós com deslocamentos) e *Print* (mostra resultados).

### Solver

*Connectivity* = 100,0 %  
*Nodal Coordinates* = 100,0 %  
*Element Coordinates* = 100,0 %  
*Global Stiffness Matrix* = 100,0 %  
*Boundary Conditions* = 100,0 %  
*Cholesky Factorization* = 100,0 %  
*Displacements* = 100,0 %  
*Resultant Forces* = 100,0 %  
*Nodal Coordinates with Displacements* = 100,0 %  
*Print* = 100,0 %

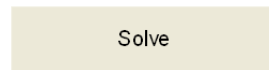


Figura C.5 - Planilha **Solver**.

Um exemplo da planilha **List Results** é mostrado na Figura C.6. Essa planilha contém os resultados dos principais cálculos realizados durante a geração da malha, a atribuição de propriedades aos elementos, o cálculo dos deslocamentos nodais e o cálculo dos esforços resultantes. Os valores das colunas de **I** até **P** são calculados por fórmulas do *Microsoft Excel* sem o auxílio do algoritmo em VBA. Mostrar valores a partir do algoritmo é mais lento que efetuar o cálculo da forma proposta. Os gráficos da planilha **Graphic Results** são gerados através da leitura dos valores mostrados na planilha **List Results** também sem auxílio do algoritmo.

List Results																								
Nodal Coordinates				Element Coordinates				Nodal Coordinates				Element Coordinates				Element Properties		Distributed Forces				Total Force		
Without Disp.		With Disp.		Without Disp.		With Disp.		Disp.		With Disp. (Scale)		Disp.		With Disp. (Scale)		Mat	t	Reg	Nodal		Lines		Fx	Fy
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y				qx	qy	qx	qy		
0,00	0,00	0,00	0,00	0,03	0,06	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,03	-0,06	-0,55	-1,11	2	0,40	4	-11,84	-0,25	0,01	-0,11	0,04	-0,49
0,09	0,00	0,09	0,00	0,06	0,03	0,00	0,00	0,00	0,00	0,10	0,00	-0,06	-0,03	-1,11	-0,55	2	0,40	4	0,00	-0,48	22,76	0,00	101,58	0,02
0,18	0,00	0,18	0,00	0,12	0,06	0,00	0,00	0,00	0,00	0,21	0,00	-0,12	-0,06	-2,22	-1,11	2	0,40	4	0,00	-0,44	-0,01	0,11	-0,04	0,49
0,26	0,00	0,27	0,00	0,15	0,03	0,00	0,00	0,00	0,00	0,31	0,00	-0,15	-0,03	-2,77	-0,55	2	0,40	4	0,00	-0,39	-22,76	0,00	-101,58	-0,02
0,35	0,00	0,35	0,00	0,20	0,06	0,00	0,00	0,00	0,00	0,42	0,00	-0,20	-0,06	-3,88	-1,11	2	0,40	4	0,00	-0,34				
0,44	0,00	0,44	0,00	0,23	0,03	0,00	0,00	0,00	0,00	0,52	0,00	-0,23	-0,03	-4,43	-0,55	2	0,40	4	0,00	-0,27				
0,53	0,00	0,53	0,00	0,29	0,06	0,00	0,00	0,01	0,00	0,63	0,00	-0,29	-0,06	-5,54	-1,11	2	0,40	4	0,00	-0,19				
0,61	0,00	0,62	0,00	0,32	0,03	0,00	0,00	0,01	0,00	0,73	0,00	-0,32	-0,03	-6,10	-0,55	2	0,40	4	0,00	-0,11				
0,70	0,00	0,71	0,00	0,38	0,06	0,00	0,00	0,01	0,00	0,84	0,00	-0,38	-0,06	-7,20	-1,11	2	0,40	4	0,00	-0,04				
0,79	0,00	0,80	0,00	0,41	0,03	0,00	0,00	0,01	0,00	0,94	0,00	-0,41	-0,03	-7,76	-0,55	2	0,40	4	0,00	0,02				
0,88	0,00	0,88	0,00	0,47	0,06	0,00	0,00	0,01	0,00	1,05	0,00	-0,47	-0,06	-8,87	-1,11	2	0,40	4	0,00	0,03				
0,96	0,00	0,97	0,00	0,50	0,03	0,00	0,00	0,01	0,00	1,15	0,00	-0,50	-0,03	-9,42	-0,55	2	0,40	4	0,00	0,03				
1,05	0,00	1,06	0,00	0,55	0,06	0,00	0,00	0,01	0,00	1,26	0,00	-0,55	-0,06	-10,53	-1,11	2	0,40	4	0,00	0,02				

Figura C.6 - Planilha **List Results**.

Um exemplo da planilha **Graphic Results** é mostrado na Figura C.7. Nessa planilha são mostrados três diagramas, são eles: **Nodal Displacements**

(deslocamentos nodais), **Distributed Force  $q_x$**  (forças distribuídas na direção  $x$ ) e **Distributed Force  $q_y$**  (forças distribuídas na direção  $y$ ). Após a execução do algoritmo através do botão **solve** da planilha **Solver** é possível modificar a escala a qual o gráfico de deslocamentos nodais é mostrado no campo *Scale*. As forças distribuídas são mostradas nas coordenadas dos nós indicadas por círculos pretos e brancos para valores positivos e negativos respectivamente. O diâmetro da círculo é proporcional ao valor da força.

**Graphic Results**

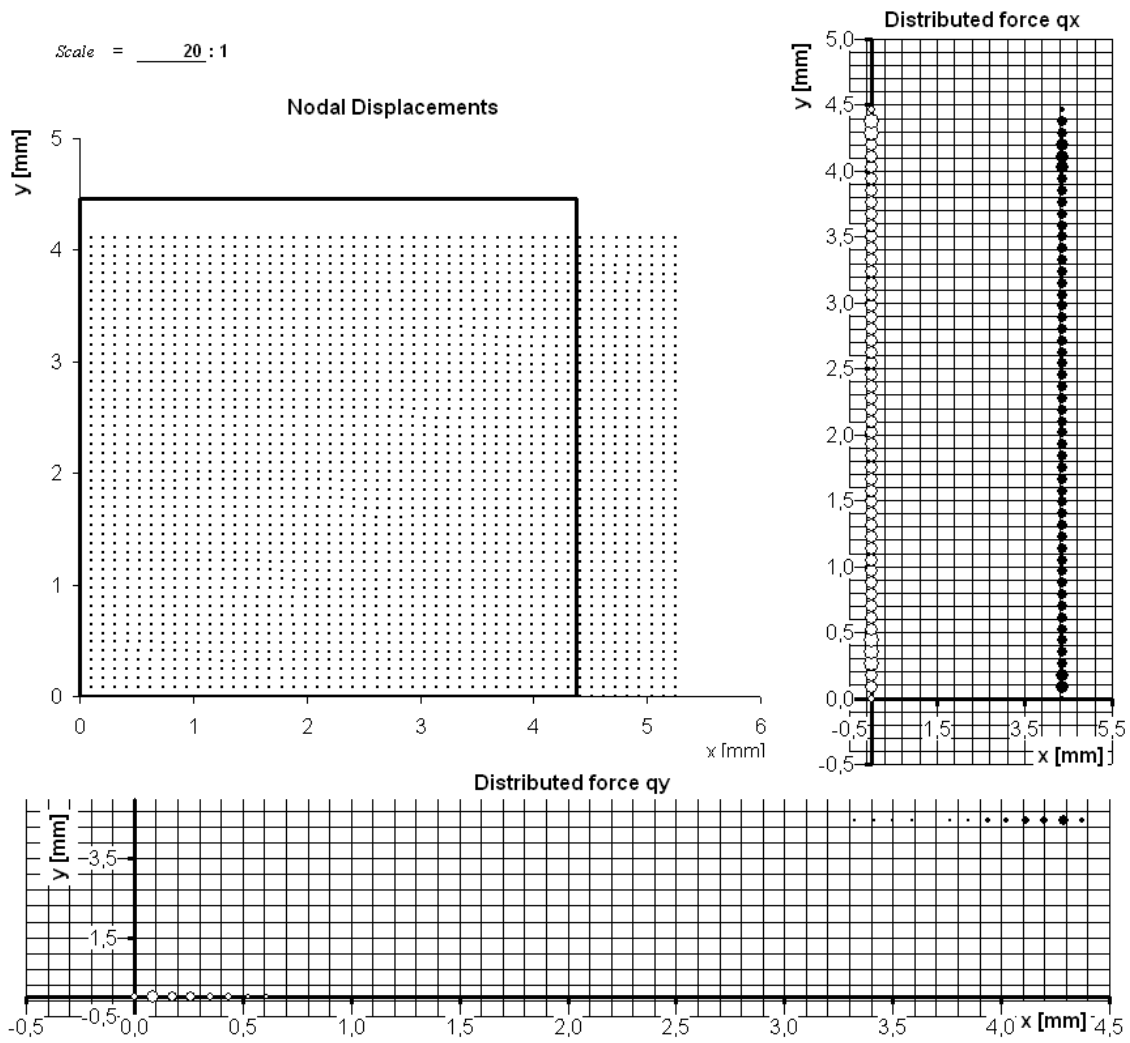


Figura C.7 - Planilha **Graphic Results**.

