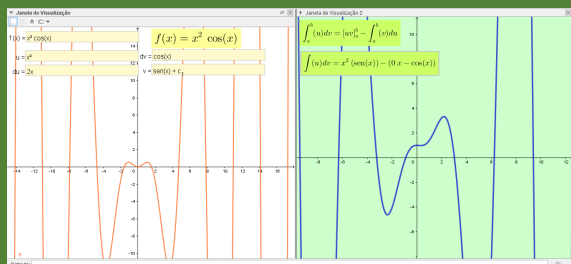
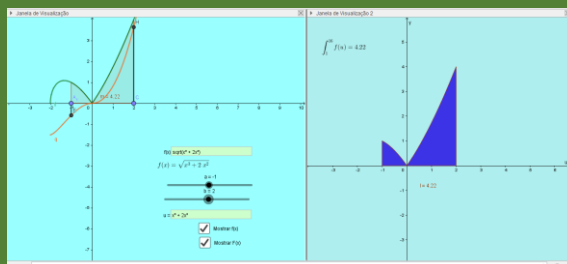
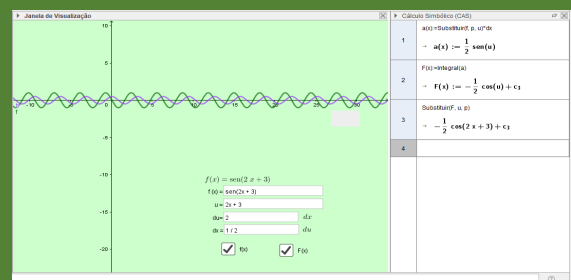
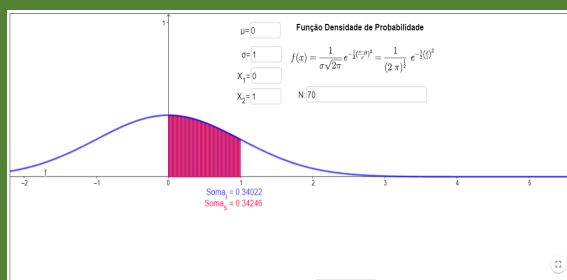


UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO PROGRAMA DE
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA
CÂMPUS LONDRINA/CORNÉLIO PROCÓPIO
PPGMAT

Acadêmico: Rodrigo Tavares da Silva

Orientadora: Dra. Adriana Helena Borssoi

ATIVIDADES DO GEOGEBRA PARA O ESTUDO DE INTEGRAIS EM UMA ABORDAGEM HÍBRIDA DE ENSINO



**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO PROGRAMA DE
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA
CÂMPUS LONDRINA/CORNÉLIO PROCÓPIO
PPGMAT**

RODRIGO TAVARES DA SILVA

**FOLHAS DE TRABALHO NO GEOGEBRA EM UMA ABORDAGEM
HÍBRIDA PARA O ENSINO DE INTEGRAIS**

Produto Educacional apresentado no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática Câmpus Londrina/Cornélio Procópio – PPGMAT, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial para obtenção do título de mestre.

Orientadora: Prof. Dra. Adriana Helena Borssoi

**LONDRINA
2019**

TERMO DE LICENCIAMENTO

Esta Dissertação e o seu respectivo Produto Educacional estão licenciados sob uma Licença Creative Commons *atribuição uso não-comercial/compartilhamento sob a mesma licença 4.0 Brasil*. Para ver uma cópia desta licença, visite o endereço <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/> ou envie uma carta para Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, Califórnia 94105, USA.



LISTA DE FIGURAS

Figura 1 -Zona híbrida de ensino _____	12
Figura 2- Página inicial da plataforma do GeoGebra _____	15
Figura 3 - Página de login na plataforma do GeoGebra _____	16
Figura 4 - Aba para acesso aos Grupos _____	16
Figura 5 - Página de login para criar Grupos _____	17
Figura 6 - Configurações para criar um Grupo _____	17
Figura 7 - Configurando permissões de edição do Grupo _____	18
Figura 8 - Configurações padrão do Grupo _____	19
Figura 9 - Gravando as configurações do Grupo _____	19
Figura 10 - Página inicial após criação do Grupo _____	20
Figura 11 - Visualização da aba membros do Grupo _____	21
Figura 12 - Opções disponíveis ao proprietário do Grupo _____	21
Figura 13 -Configurações iniciais para criar uma Folha de Trabalho _____	22
Figura 14 - Configurando prazo para entrega da Folha de Trabalho _____	23
Figura 15 - Opções para acrescentar diferentes materiais _____	24
Figura 16 - Início de uma Folha de Trabalho _____	24
Figura 17 - Janela para editar, configurar e adicionar texto na Folha de Trabalho _____	26
Figura 18 - Janela para editar, configurar e adicionar expressões matemáticas _____	26
Figura 19 - Janela para inclusão de applet do GeoGebra _____	27
Figura 20 - Janela para incluir página da Web na Folha de Trabalho _____	27
Figura 21 - Janela para incluir questão aberta ou de múltipla escolha _____	28
Figura 22 - Janela para incluir vídeo _____	28
Figura 23 - Opções para incluir novos elementos na Folha de Trabalho _____	29
Figura 24 - Configurações para o applet inserido na Folha de Trabalho _____	29
Figura 25 - Conceitos do Método da Exaustão (parte 1) _____	34
Figura 26 - Conceitos do Método da Exaustão (parte 2) _____	34
Figura 27 - Conceitos sobre o Teorema Fundamental do Cálculo (parte 1) _____	39
Figura 28 - Conceitos do Teorema Fundamental do Cálculo (parte 2) _____	40
Figura 29 - Vídeo para o Teorema Fundamental do Cálculo _____	41
Figura 30 - Vídeo para estudo da tangente pelo Teorema Fundamental do Cálculo _____	41
Figura 31 - Área da região abaixo da curva em um intervalo fechado _____	44

Figura 32 - Área da região entre a curva e o eixo x em seções _____	45
Figura 33 - Movimento retilíneo revisto usando integração (a) _____	49
Figura 34 - Movimento retilíneo revisto usando integração (b) _____	49
Figura 35 - Movimento retilíneo revisto usando integração (c) _____	50
Figura 34 – Conceitos da integral por substituição (parte 1) _____	55
Figura 35 – Conceitos da integral por substituição (parte 2) _____	55
Figura 36 - Conceitos da integração por partes _____	66
Figura 37 - Folha de Trabalho para a integral por partes _____	67
Figura 38 - Folha de Trabalho para $f(x) = x^2 \cdot \cos(x)$ _____	70
Figura 39 - Folha de Trabalho para função $f(x) = \ln(x)$ _____	72

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Opções para inserir na Folha de Trabalho.....	25
Quadro 2 - Opções disponíveis para o proprietário na Folha de Trabalho.....	30
Quadro 3 - Algumas opções disponíveis para proprietários, membros e visitantes da Folha de Trabalho.....	31
Quadro 4 - Folha de Trabalho para explorar o Método da Exaustão	35
Quadro 5 - Folha de Trabalho para a Função Densidade da Distribuição Normal	36
Quadro 6 - Folha de Trabalho para o Teorema Fundamental do Cálculo	42
Quadro 7 -Folha de Trabalho para a Função $f(x) = x$	45
Quadro 8 - Folha de Trabalho para a Função $f(x) = x^3$	47
Quadro 9 - Folha de Trabalho do Movimento da Partícula.....	50
Quadro 10 - Folha de Trabalho para a Função Seno	53
Quadro 11 – Folha de Trabalho proposta na pesquisa	56
Quadro 12 - Folha de Trabalho para Algumas Funções Polinomiais.....	59
Quadro 13 - Folha de Trabalho para algumas Funções Trigonométricas.....	61
Quadro 14 - Folha de Trabalho para Função Exponencial.....	63

SUMÁRIO

1. APRESENTAÇÃO	7
2. ENSINO HÍBRIDO.....	10
3. A ORGANIZAÇÃO DE UM AMBIENTE VIRTUAL DE ENSINO E APRENDIZAGEM.....	14
4. TAREFAS SOBRE TÓPICOS DE INTEGRAIS PARA COMPOR UMA PROPOSTA HÍBRIDA DE ENSINO	33
4.1. NOÇÃO INTUITIVA DA SOMA DE RIEMANN: FUNÇÃO DENSIDADE DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL	33
4.2. TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO	39
Teorema Fundamental do Cálculo	42
Relação entre Integral Definida e Área: $f(x) = x$	44
Relação entre Integral Definida e Área: $f(x) = x^3$	47
Movimento de uma partícula	49
Outras Folhas de Trabalho para Integral Definida	52
4.3. INTEGRAL POR SUBSTITUIÇÃO (u e du)	55
Algumas Funções Polinomiais	59
Algumas Funções Trigonométricas.....	61
Algumas Funções Exponenciais	63
4.4 INTEGRAL POR PARTES.....	66
Integral por partes (u, v, du e dv) para $f(x) = x^2 \cdot \cos(x)$	70
Integral por partes (u, v, du e dv) para $f(x) = \ln(x)$	72
CONSIDERAÇÕES FINAIS	75
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	76

1. APRESENTAÇÃO

Prezado Professor, prezada Professora, esse material é um Produto Educacional do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, o qual está vinculado à dissertação intitulada “*Atividades para Estudo de Integrais em um Ambiente de Ensino Híbrido*”.

O que trazemos neste texto é produto da pesquisa desenvolvida durante o mestrado profissional, parte do qual foi aplicado em condições reais de ensino. É prerrogativa dessa modalidade de programa de pós-graduação, pois

O mestrando deve desenvolver um processo ou produto educativo e utilizá-lo em condições reais de sala de aula ou espaços não-formais ou informais de ensino, em formato artesanal ou em protótipo. Esse produto pode ser por exemplo, uma sequência didática, um aplicativo computacional, um jogo, um vídeo, um conjunto de vídeo-aulas, um equipamento, uma exposição etc. O trabalho final deve incluir necessariamente o relato fundamentado desta experiência, no qual o produto educacional desenvolvido é parte integrante (CAPES, 2013, p. 24).

A pesquisa de mestrado teve por finalidade investigar “*como o uso da tecnologia pode contribuir para o estudo da integral de funções de uma variável real, a partir de tarefas propostas em uma perspectiva de Ensino Híbrido?*”. O acesso ao texto completo da dissertação pode ser feito a partir do Repositório Institucional da UTFPR – RIUT, disponível em <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/2119>.

No intuito de responder à questão, investigamos as possíveis contribuições de tarefas envolvendo conceitos de integral. Mais especificamente, referente a funções de uma variável real para um curso do Ensino Superior, mediadas pelo uso de um ambiente virtual de aprendizagem.

Entre as disciplinas do Ensino Superior, optamos pela disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, devido ao fato de ela estar inserida em diferentes cursos, como, por exemplo, nas áreas de exatas e de engenharias. A fim de contribuir com a pesquisa no âmbito da Educação Matemática, bem como para aprimorar a prática na sala de aula, optamos pela implementação da tecnologia para o estudo de integrais.

Notamos que há estudos nessa linha, como, por exemplo, em relação ao baixo índice de rendimento dos alunos, e aos altos índices de evasão e reprovação, que têm sido observado e apontado como uma preocupação por parte de pesquisadores (SILVA, 2017; BEZERRA,

2015; REZENDE, 2003, entre outros), os quais salientam a necessidade de mudanças na dinâmica das aulas.

Em relação as aulas nas instituições de ensino, Morelatti (2001) menciona que

Nas salas de aula de Cálculo Diferencial e Integral, a metodologia usada pela maioria dos professores prioriza exclusivamente a aula expositiva, centrada na fala do professor, com conteúdos apresentados como prontos e incontestáveis. Os alunos, após a aula, resolvem mecanicamente uma série de exercícios que enfatizam as técnicas de resolução em vez de conceitos e estratégias de resolução. Estes alunos não são envolvidos afetivamente com a disciplina e muitas vezes questionam a importância desta dentro do curso por não entenderem seus objetivos. (MORELATTI, 2001, p. 22)

Nesse viés, elaboramos e aplicamos três tarefas em um contexto de ensino de tópicos do Cálculo Diferencial e Integral para que, a partir da coleta de dados, pudéssemos refletir sobre a questão de investigação. Esse Produto Educacional é um material que foi organizado a partir da revisão e ajustes às três tarefas aplicadas no contexto educacional. Houve necessidade de rever as primeiras tarefas, entretanto, novas tarefas foram adicionadas como sugestão nas Folhas de Trabalho¹.

O Produto Educacional está organizado em quatro capítulos. O primeiro contempla a apresentação, onde elencamos o entendimento quanto ao Produto Educacional, assim como, a questão de pesquisa e a escolha pelo tópico de Integrais.

Já no segundo capítulo, trazemos referenciais teóricos sobre o *Blended Learning* - ou Ensino Híbrido - como tem sido definido e, de acordo com sua abordagem, como tem sido classificado no âmbito da Educação.

O terceiro capítulo trata sobre a organização de um ambiente virtual de ensino e aprendizagem, em que elencamos o entendimento sobre o Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) e sobre o uso da plataforma do GeoGebra. Mostramos como criar um Grupo, uma Folha de Trabalho, como adicionar os alunos ao Grupo, além de como dar *feedback* na Folha de Trabalho.

No quarto capítulo, apresentamos as tarefas sobre tópicos de integrais para compor uma proposta híbrida de ensino. Os tópicos contemplados nas Folhas de Trabalho são: Teorema Fundamental do Cálculo, Integral por substituição e Integral por partes. Em cada

¹ No início da pesquisa, o recurso utilizado para disponibilizar as tarefas no ambiente virtual do GeoGebra era denominado “Folha de Trabalho”, mas, recentemente esse recurso passou a ser denominado como “Atividade”. Neste texto, optamos por manter a denominação Folha de Trabalho.

tarefa, sugerimos como a mesma pode ser implementada, seguindo os encaminhamentos do Ensino Híbrido.

2. ENSINO HÍBRIDO

Bezerra (2015) menciona que o uso da tecnologia tem modificado a maneira de pensar e de agir, e ainda ele destaca que “não há mais espaço para um ensino desconectado da realidade, pois vivemos a era da informação, as gerações mais novas desde muito cedo já estão em contato com a tecnologia, realizando atividades complexas de maneira muito simples” (p. 12).

Nessa perspectiva, Silva (2016) aponta que é possível, na Educação, mesclar a sala de aula com os ambientes virtuais de aprendizagem, por meio das tecnologias de informação e comunicação. Porvir (2013), por exemplo, discute uma modalidade de ensino, o chamado de *Blended Learning*, que seria a combinação de momentos que o aluno estuda sozinho, virtualmente, com momentos que há interação entre alunos e professor.

O *Blended Learning* tem sido estudado por pesquisadores (HORN, STAKER, 2015; BACICH, TANZI NETO, TREVISANI, 2015) quanto as suas contribuições para o ensino. Nesse sentido, Moran (2015) aponta o que entende por *blended*, ou seja,

Híbrido significa misturado, mesclado, *blended*. A educação sempre foi misturada, híbrida, sempre combinou vários espaços, tempos, atividades, metodologias, públicos. Esse processo, agora, com a conectividade, é muito mais perceptível, amplo e profundo: é um ecossistema mais aberto e criativo. Podemos ensinar e aprender de inúmeras formas, em todos os momentos, em múltiplos espaços. Híbrido é um conceito rico, apropriado e complicado. Tudo pode ser misturado, combinado e podemos com os mesmos ingredientes, preparar diversos “pratos”, com sabores muito diferentes. (MORAN, 2015, p. 27)

Porvir (2013) menciona que a combinação entre o momento em que o aluno estuda em uma proposta virtual com outros instantes em que a aprendizagem é proporcionada presencialmente, podem ser complementares, não sendo isolados. No entanto, o Ensino Híbrido possui determinadas características que descrevem e definem como deve ocorrer sua implementação em sala de aula.

Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2015, p. 54) apontam quatro modelos de ensino, considerados para a pesquisa, que são caracterizados como híbridos: rotação, *flex*, *à la carte* e virtual enriquecido, os quais serão detalhados a seguir.

O modelo de rotação pode ser organizado em estações, *laboratório rotacional*, *sala de aula invertida* e rotação individual. Na *rotação por estações*, por exemplo, os alunos, organizados em grupos, recebem orientações e são colocados a participar de diferentes

atividades, organizadas por estações. Cada grupo faz uma atividade, e alternam-se após concluírem, em rodízio, de modo de todos os grupos passem por todas estações, e que pelo menos uma delas seja *on-line*.

No *laboratório rotacional*, embora tenha semelhanças com a rotação por estações, os alunos trabalham individualmente, revezando atividades em sala de aula e laboratório. Já na *sala de aula invertida*, o primeiro momento é feito antes da aula, estudando os conceitos em um material disponibilizado no formato *on-line*, com antecedência. A aula torna-se o momento reservado para perguntas, discussões e atividades práticas (EDUCAUSE, 2012). Na rotação individual, um cronograma de atividades é apresentado para cada estudante, que deverá ser seguido.

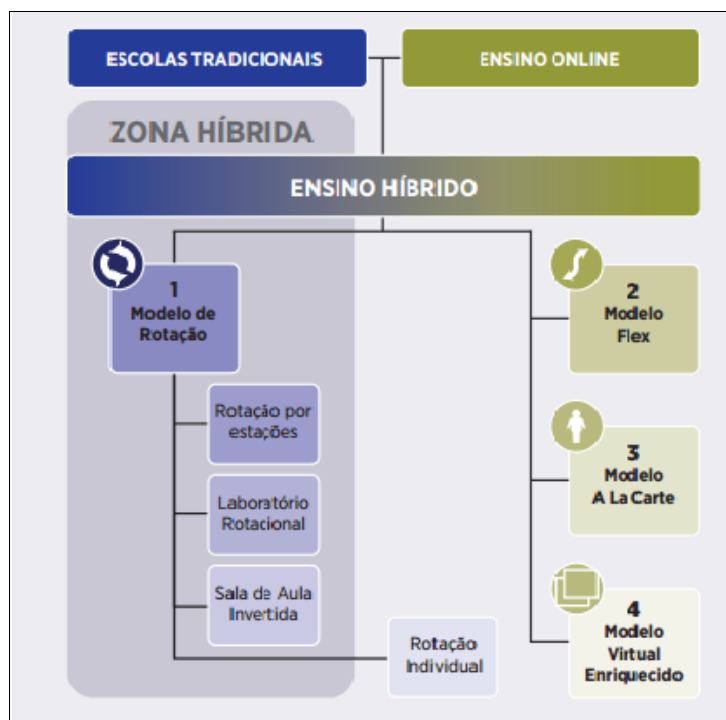
O segundo modelo apresentado pelos autores, o *Modelo flex*, é elaborado de acordo com o ritmo de cada estudante. Nesse caso, o aluno deve cumprir o que foi proposto, com ênfase no ensino *on-line*. O professor teria um papel passivo: diferente de tomar a frente das atividades, ficaria à disposição para identificar e sanar as dúvidas. Ou seja, o professor não ficaria à frente da turma para ensinar o conteúdo, mas para orientar e auxiliar individualmente, no intuito de dar subsídios aos estudantes, ao invés de mostrar o que deve ser feito.

Outro modelo é o *à la carte*, que tem uma organização diferente dos modelos apresentados anteriormente. Consiste na oferta do curso totalmente *on-line*, em que as atividades a serem realizadas são propostas sem distinção do ano escolar. Dessa forma, é imprescindível a disciplina do estudante para atingir os objetivos de ensino, ou seja, organizar horários de estudos e seguir uma rotina. Embora o curso seja apenas *on-line*, pode ser oferecido suporte por meio de um professor tutor para auxiliar e sanar as dúvidas.

E o último modelo, *virtual enriquecido*, envolve uma organização da escola, em todas as disciplinas, para trabalhar em um formato *on-line*. Nesse modelo de ensino, os estudantes dividem seu tempo entre o momento presencial e *on-line*.

A Figura 1 apresenta uma reorganização da escola tradicional aliada com ensino *on-line*, por meio de um esquema idealizado por Christensen, Horn e Staker (2013), que mostra a zona híbrida, a qual mescla o ensino presencial e virtual.

Figura 1 -Zona híbrida de ensino



Fonte: Christensen, Horn e Staker (2013, p. 28)

Em relação aos apontamentos apresentados na Figura 1, a região da zona híbrida, por exemplo, pode aliar o que é desenvolvido na sala de aula com a implementação da tecnologia, e avaliar qual dos modelos definidos anteriormente é o mais apropriado para a realidade do professor e do contexto educacional em que atua.

Quanto a implementação do Ensino Híbrido, Lima e Moura (2015, p. 100) indicam que “a mudança não ocorre de um dia para o outro, nem existem receitas ou fórmulas prontas”. Diante disso, os referidos autores complementam que o professor que escolhe inserir o Ensino Híbrido em sua prática docente precisa seguir alguns encaminhamentos, os quais seriam: conhecer, testar, pesquisar, escolher e validar as ferramentas digitais. Esses encaminhamentos devem ser pensados no intuito de atender as necessidades de cada turma, avaliando o que é viável, para, assim, definir quais os objetivos almejam-se alcançar com o uso da tecnologia.

Para Moran (2015), o professor que pretende abordar o híbrido em sua prática docente poderá fazê-lo por dois caminhos. Um primeiro caminho - mais suave -, propondo alterações progressivas, que priorizem o envolvimento do aluno, como, por exemplo, *sala de aula invertida* (EDUCAUSE, 2012; BACICH, TANZI NETO, TREVISANI, 2015), mas que permaneça o modelo curricular; após a implementação, verificar os resultados atingidos. O segundo caminho seria mais amplo e complexo, com disciplinas em uma abordagem não

linear. Ou seja, são redesenhados os projetos e os espaços; já a metodologia é proposta para que cada aluno aprenda no seu próprio ritmo, sozinho ou com seus colegas, sob a supervisão de professores orientadores.

O próximo capítulo contempla a organização de um ambiente virtual de ensino e aprendizagem; a plataforma do GeoGebra.

3. A ORGANIZAÇÃO DE UM AMBIENTE VIRTUAL DE ENSINO E APRENDIZAGEM

A *internet* tem sido utilizada para os mais diferentes fins, como, por exemplo, para uso pessoal ou ainda com intuito de aprendizagem. No âmbito da Educação, o Ensino Superior tem promovido seu uso de diferentes formas, seja por meio de disciplinas, ou então, por meio da oferta de cursos na modalidade presencial, semipresencial ou à distância. A implementação da tecnologia no Ensino Superior tem sido percebida, por exemplo, por meio do ambiente virtual de aprendizagem (AVA).

Em Brasil (2007), AVA é definido como

Programas que permitem armazenamento, a administração e a disponibilização de conteúdos no formato Web. Dentre esses, destacam-se: aulas virtuais, objetos de aprendizagem, simuladores, fóruns, salas de bate-papo, conexões a materiais externos, atividades interativas, tarefas virtuais (webquest), modeladores, animações, textos colaborativos (wiki) (p. 11).

Nesse contexto, os AVAs permitem aproximar o uso da tecnologia para promover a aprendizagem. Para o aluno, é uma alternativa para seus estudos; já para o professor, é uma forma de propor materiais, atividades, vídeos, e ainda, promover a interação professor/aluno ou mesmo entre os alunos.

O GeoGebra foi o ambiente virtual utilizado na pesquisa, devido a estrutura da plataforma possibilitar o armazenamento de dados, bem como, permitir interação entre usuários e ainda possibilitar *feedback*. Essa interação pode ser entre professor e aluno ou entre alunos. Isso é possível pois o professor pode criar e gerenciar um Grupo para a turma ou disciplina.

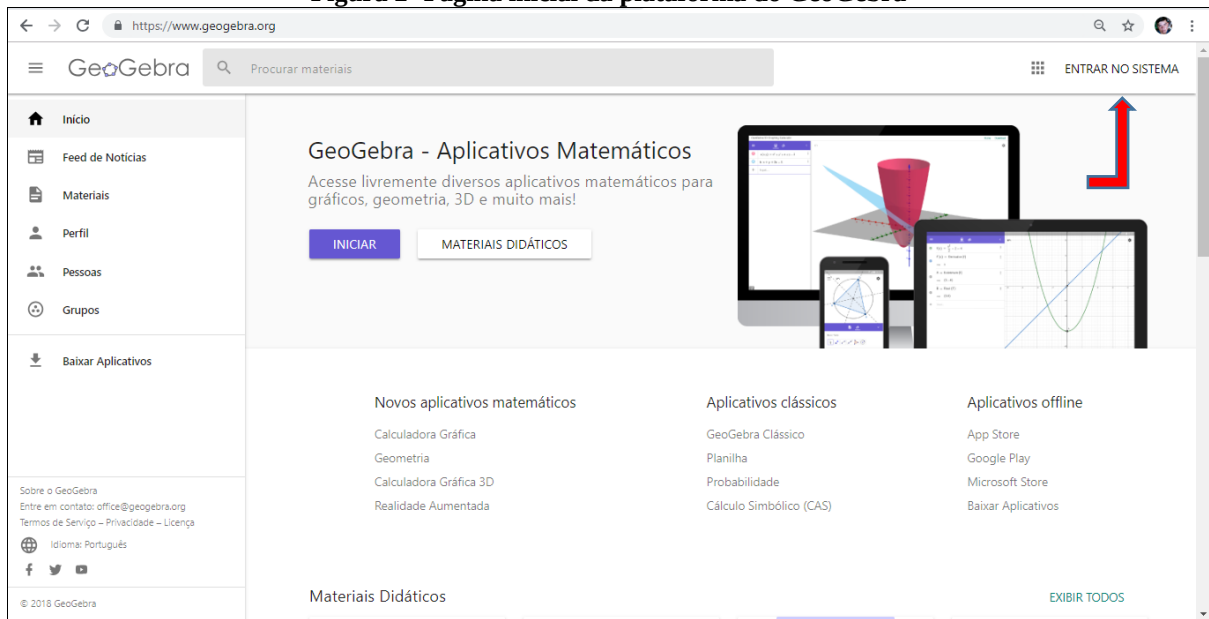
A plataforma oferece diferentes opções, entre elas: inserir vídeos, materiais (formato .pdf), imagem, *applet* do GeoGebra e, ainda, criar Folha de Trabalho. Essas opções serão apresentadas na seção 3.1.

Folhas de Trabalho podem ser organizadas pelo professor, por meio de questões e/ou materiais e/ou *applet*. Podem ser feitas buscas, na plataforma, para encontrar Folha de Trabalho já elaborada por algum membro. Sendo assim, pode reutilizar a mesma folha, ou modificá-la para atender as necessidades para determinada aula, ou ainda, pode utilizar apenas o *applet*. O professor pode, inclusive, postar sua atividade, permitindo que ela seja compartilhada.

3.1. Conhecendo a plataforma do GeoGebra para organização do ambiente virtual

Primeiramente, é preciso acessar a página: <www.geogebra.org>, onde se visualiza a tela inicial da plataforma, conforme mostra a Figura 2, acessando em seguida a aba “Entrar no Sistema”.

Figura 2- Página inicial da plataforma do GeoGebra



Fonte: o autor

Após ser escolhida a aba “Entrar no Sistema”, uma nova janela mostra as opções de login na plataforma, como ilustra a Figura 3. O acesso pode ser feito, por exemplo, pela conta Gmail, ou ainda, pela conta do Facebook.

Figura 3 - Página de login na plataforma do GeoGebra

Entrar no sistema

com uma conta já existente do

Google Facebook Outras

Com a conta do GeoGebra

Nome do usuário

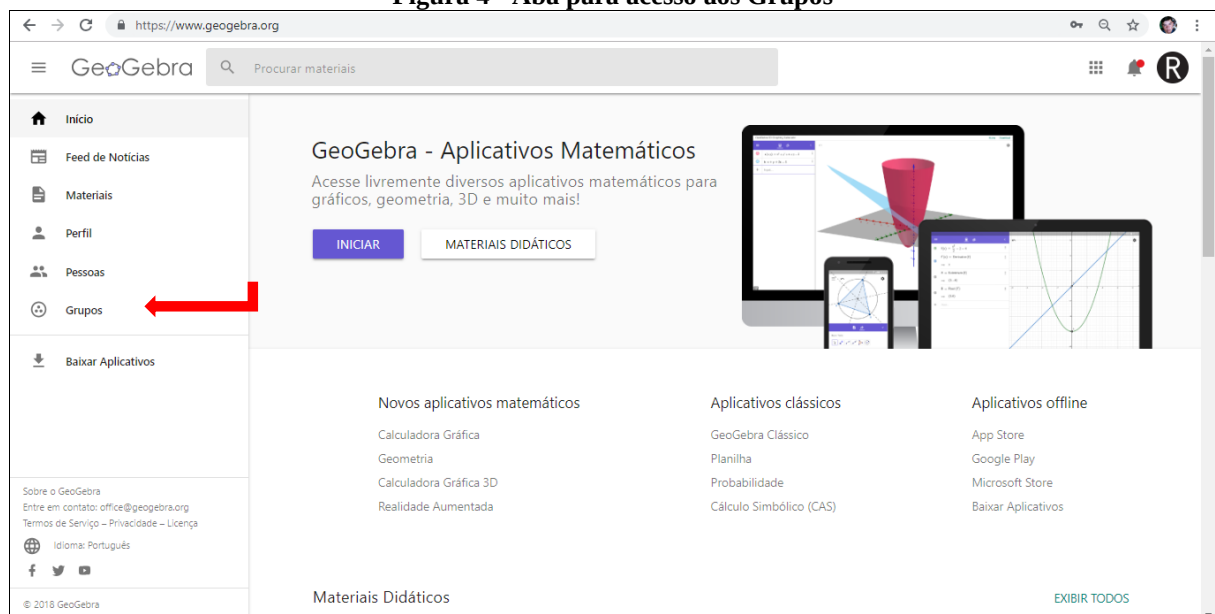
senha

Esqueceu a Senha? Criar uma Conta

CANCEL ENTRAR NO SISTEMA

Fonte: o autor

Com o acesso realizado, as opções da janela inicial estão ativas para o usuário fazer uso, como mostra a Figura 4. Acessando a aba “Grupos”, tem-se a opção utilizada na pesquisa para propor as tarefas.

Figura 4 - Aba para acesso aos Grupos**Fonte: o autor**

As opções para acessar o GeoGebra Grupos, como ilustra a Figura 5, podem ser feitas de diferentes formas. Caso o grupo já tenha sido criado, pode ser acessado inserindo o “Código do Grupo” ou então, acessar a aba “Ir para meus Grupos”, que mostra todos os seus grupos existentes. Mas, se for o primeiro acesso, a aba “Criar Grupo” permite iniciar um novo grupo.

Figura 5 - Página de login para criar Grupos



Fonte: o autor

Algumas informações iniciais são necessárias para configurar o acesso ao grupo. Entre elas (Figura 6), é obrigatório inserir um “Nome do grupo” e, se preferir, pode-se acrescentar informações que caracterizem-no.

Figura 6 - Configurações para criar um Grupo

Fonte: o autor

Quanto a aba “Permissões”, diz respeito a quem poderá incluir materiais e postagens no grupo. As opções que podem ser escolhidas são: “Proprietários somente” ou então “Proprietários e membros”, como mostra a Figura 7. Nesse caso, deve-se avaliar qual das opções é a mais apropriada.

Figura 7 - Configurando permissões de edição do Grupo

The screenshot shows the 'Configurações' (Settings) page for a GeoGebra group. The page is titled 'Configurações' and has a back arrow labeled 'Criar Grupo'. The settings are organized into sections: 'Nome do grupo' (Group Name) with a text input field containing 'Título'; 'Descrição' (Description) with a rich text editor; 'Permissões' (Permissions) with a dropdown menu labeled 'Pode incluir Materiais ou Postagens:' showing three options: 'Proprietários somente' (highlighted with a red arrow), 'Proprietários e Membros', and 'Configuração padrão de criação'; 'Configuração Padrão' (Default Configuration) with a dropdown menu showing 'Autores apenas'; and 'Notificações do Grupo' (Group Notifications) with a checkbox 'Use as configurações padrão das configurações do meu perfil. Você pode modificá-las em seu [Configurações de conta](#).' At the bottom, there are 'Gravar' (Save) and 'Cancelar' (Cancel) buttons.

Fonte: o autor

Já a aba “Configuração Padrão”, (Figura 8) mostra as opções disponíveis, na qual é possível que “autores apenas” ou “autores e proprietários do grupo” ou “autores, proprietários e membros” tenham permissão para realizar alterações no grupo, como por exemplo, incluir ou excluir os membros, as atividades e os materiais. Assim, deve-se escolher a opção mais conveniente a sua necessidade.

Figura 8 - Configurações padrão do Grupo

GeoGebra

← Criar Grupo

Configurações

Nome do grupo: Título

Descrição: Descrição

Permissões: Pode incluir Materiais ou Postagens: Proprietários somente

Configuração Padrão: Configuração Padrão de Edição: Autores apenas

Notificações do Grupo: ☒ Use as configurações padrão das configurações do meu perfil. Você pode modificá-las em seu [Configurações de conta](#).

Gravar Cancelar

Fonte: o autor

Concluídas essas primeiras informações basta selecionar o botão “Gravar”, como mostra a Figura 9, que as configurações do grupo estarão definidas.

Figura 9 - Gravando as configurações do Grupo

GeoGebra

← Criar Grupo

Configurações

Nome do grupo: EXEMPLO

Descrição: Grupo para estudos da aulas

Permissões: Pode incluir Materiais ou Postagens: Proprietários somente

Configuração Padrão: Configuração Padrão de Edição: Autores e Proprietários do Grupo

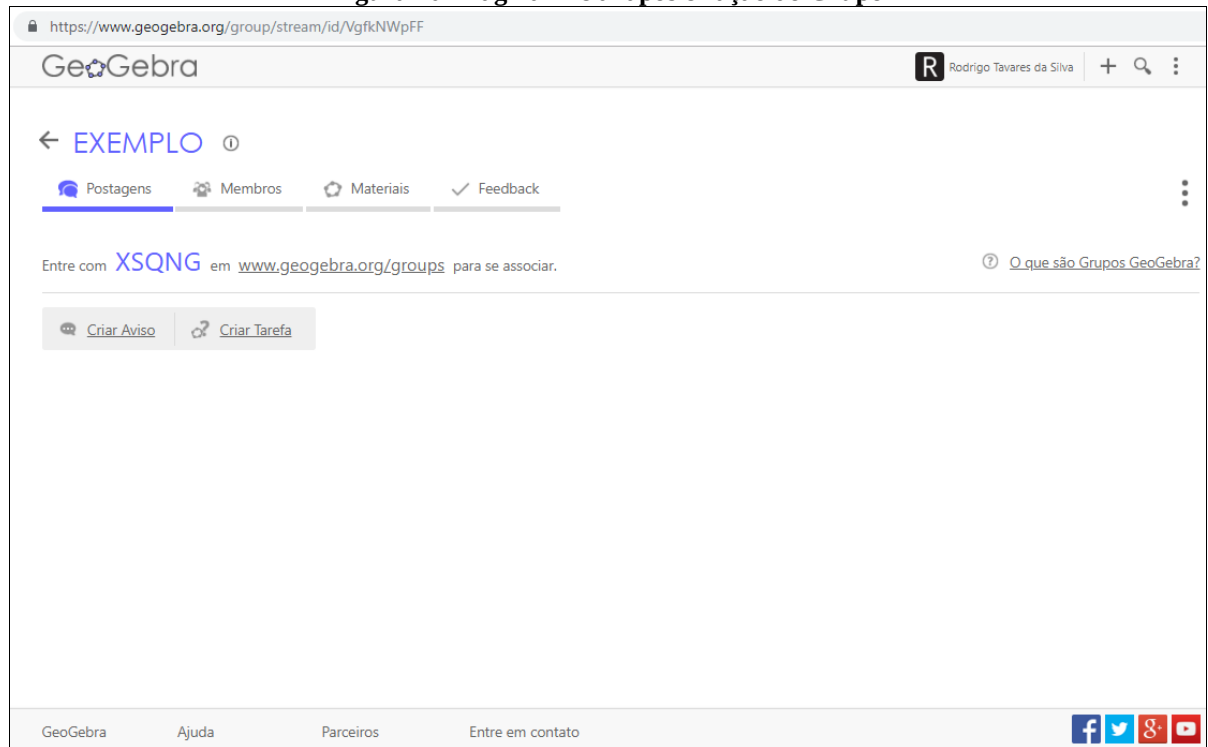
Notificações do Grupo: ☒ Use as configurações padrão das configurações do meu perfil. Você pode modificá-las em seu [Configurações de conta](#).

Gravar Cancelar

Fonte: o autor

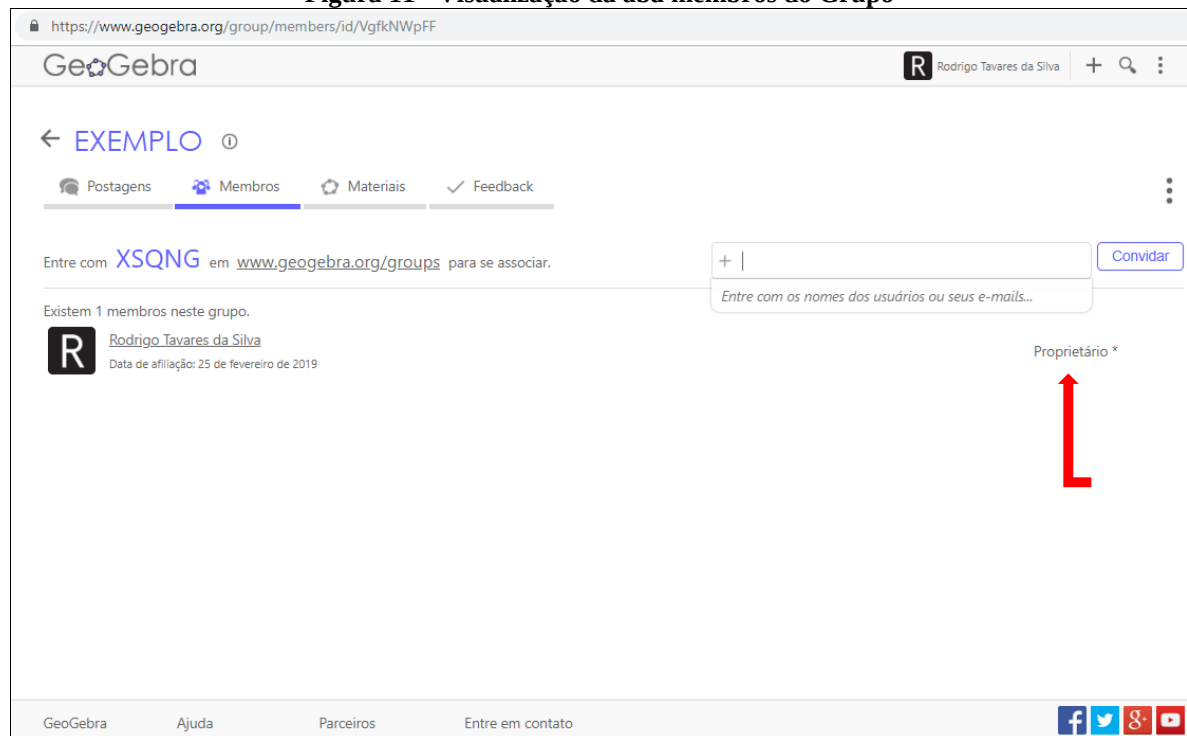
A Figura 10 mostra como será o *layout* do grupo, bem como todas as opções que poderão ser utilizadas, e ainda o código que pode ser utilizado por qualquer um que deseja ter acesso ao grupo.

Figura 10 - Página inicial após criação do Grupo

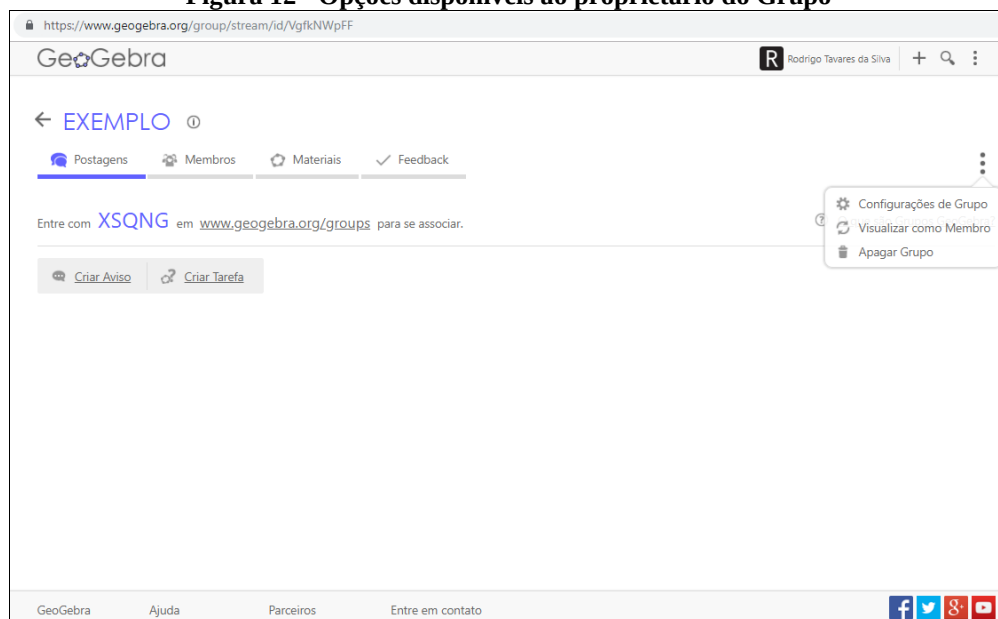


Fonte: o autor

Acessando a aba “Membros”, é permitido que sejam incluídos participantes utilizando apenas um endereço de *e-mail*. Nesse caso, após incluir o novo membro, este receberá uma notificação em seu *e-mail* com o convite para primeiro acesso ao grupo. Concluída a etapa de inserir membros, todos serão classificados inicialmente como membro. Caso queira que alguém tenha acesso para inserir materiais ou atividades, ou que possa inserir membros e excluí-los, deverá ser alterada a opção de membro para proprietário, como mostra a Figura 11.

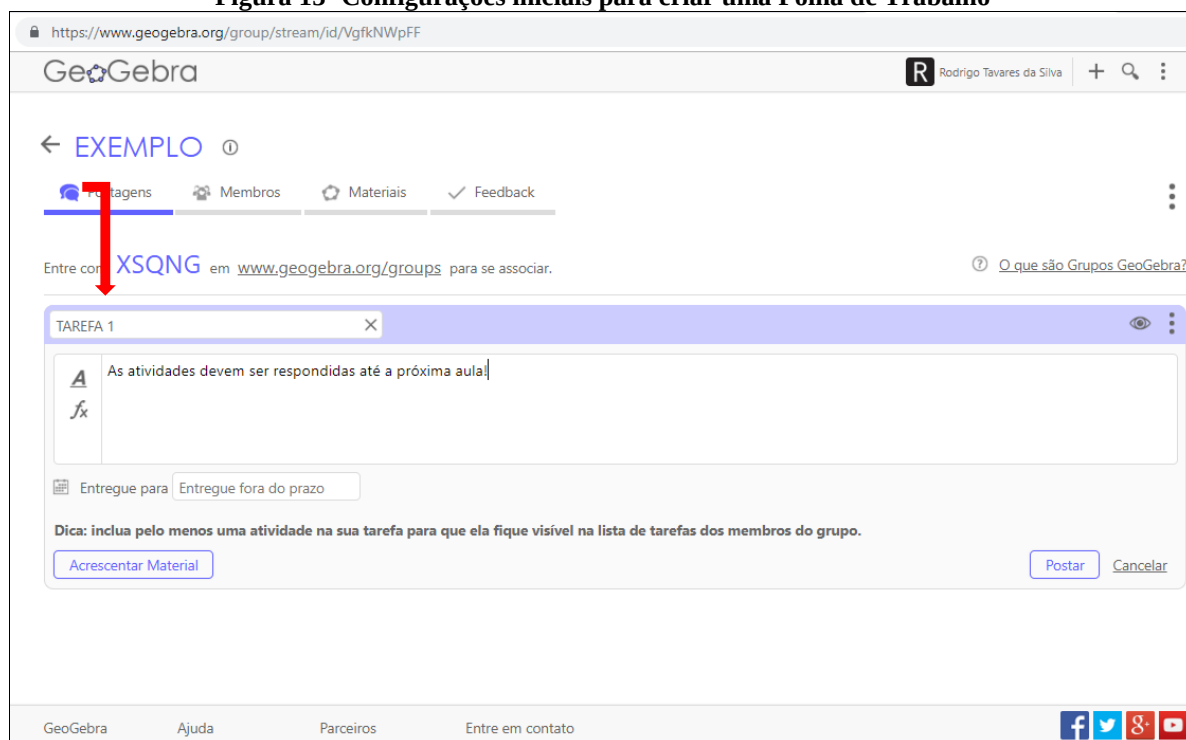
Figura 11 - Visualização da aba membros do Grupo**Fonte: o autor**

A Figura 12 mostra a página inicial do grupo, na qual é possível acessar as “configurações do grupo”, “visualizar como membro” ou “apagar o grupo”, que estão disponíveis para o proprietário, ou para quem tenha tido permissão (ver Figura 6).

Figura 12 - Opções disponíveis ao proprietário do Grupo**Fonte: o autor**

Caso queira deixar algum aviso aos membros do grupo, a aba “Criar aviso” pode ser utilizada para que informações e recados fiquem visíveis a todos. E, para iniciar uma Folha de Trabalho com as atividades, basta acessar a aba “Criar Tarefa”, que aparecerão os campos para colocar um nome para a Tarefa, como mostra a Figura 13. Se preferir, pode escrever alguma observação sobre a tarefa.

Figura 13 -Configurações iniciais para criar uma Folha de Trabalho

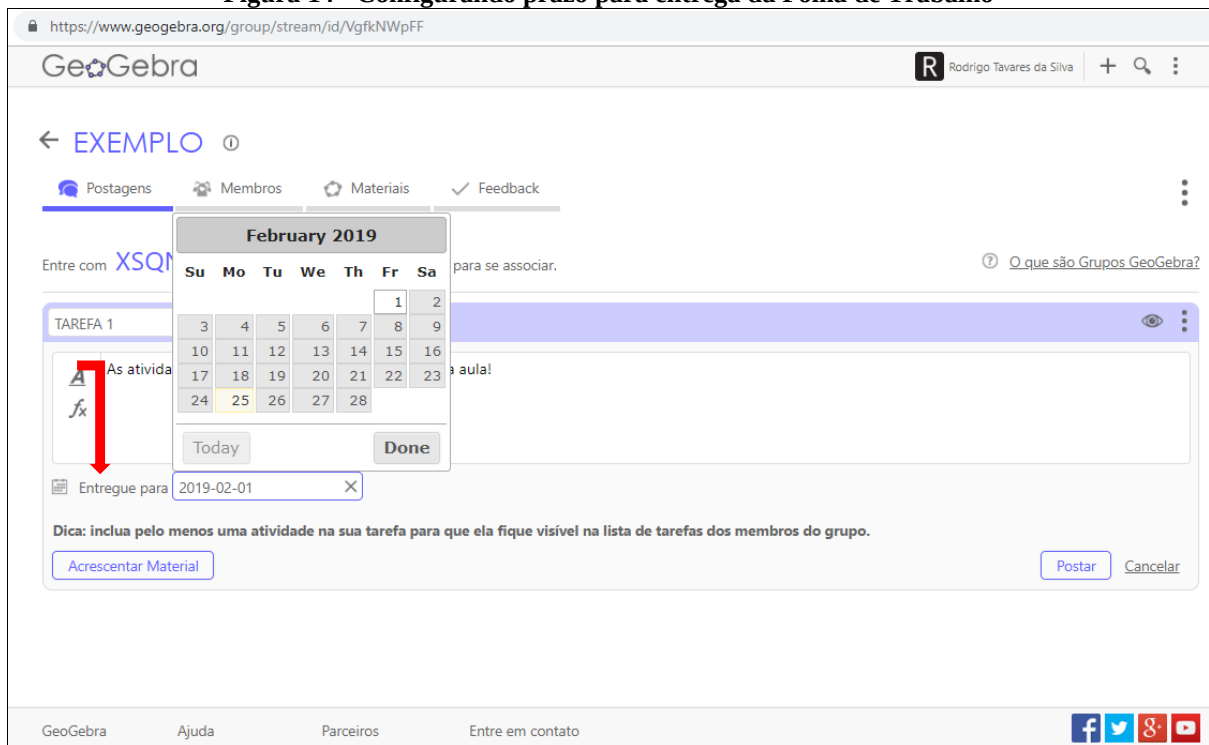


The screenshot shows the GeoGebra web interface for creating a task. At the top, the URL is <https://www.geogebra.org/group/stream/id/VgfkNWpFF>. The user is logged in as 'Rodrigo Tavares da Silva'. The main navigation bar includes 'EXEMPLO', 'Tags', 'Membros', 'Materiais', and 'Feedback'. A red arrow points to the 'Tags' tab. Below the navigation bar, there is a text input field for a code (currently 'XSQNG') and a link to 'www.geogebra.org/groups'. The main form is titled 'TAREFA 1' and contains a text area with the placeholder text 'As atividades devem ser respondidas até a próxima aula!'. Below the text area, there is a dropdown menu for 'Entregue para' with the option 'Entregue fora do prazo' selected. At the bottom of the form, there is a 'Postar' button and a 'Cancelar' button. A footer bar contains links for 'GeoGebra', 'Ajuda', 'Parceiros', and 'Entre em contato', along with social media icons for Facebook, Twitter, Google+, and YouTube.

Fonte: o autor

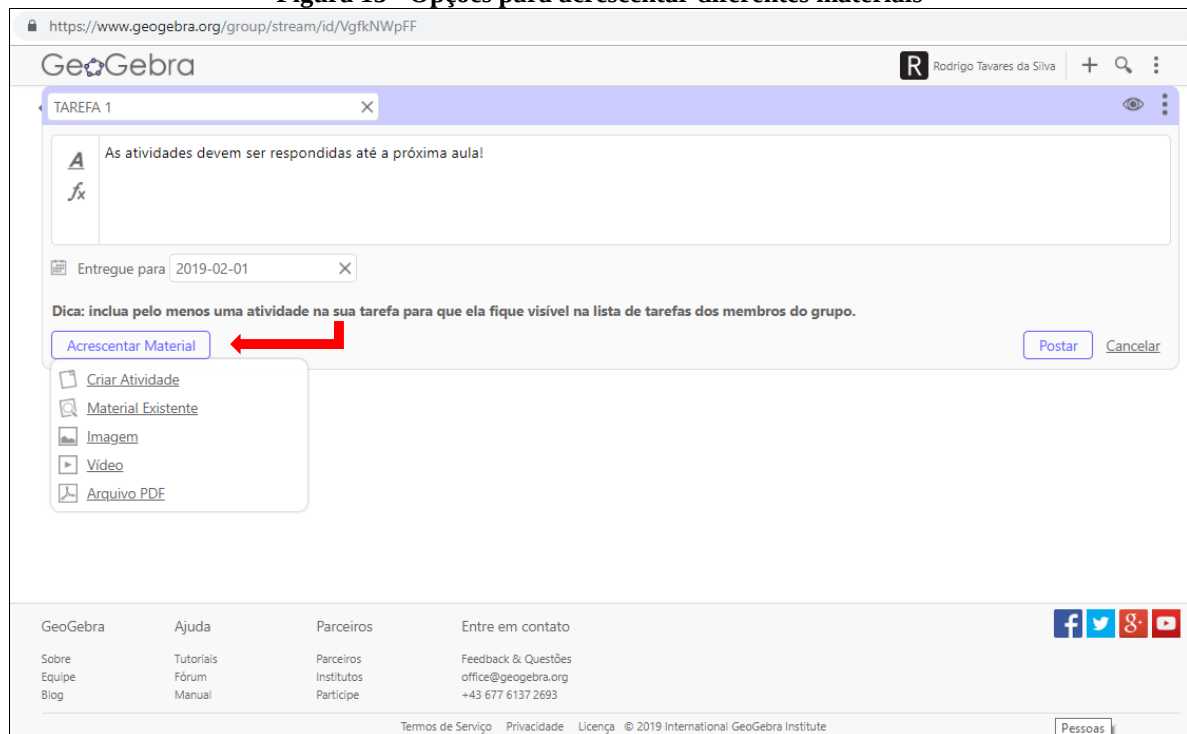
Além das opções citadas anteriormente, é possível colocar um prazo para que os membros respondam essa tarefa. Para isso, basta acessar a aba “Entregue para” e determinar qual é data limite para finalizar a tarefa, como mostra a Figura 14. Embora possa deixar um prazo, não impede que a resolução seja enviada pelos membros após a data de entrega. Porém, fica visível ao proprietário do grupo que o membro fez a entrega com atraso.

Figura 14 - Configurando prazo para entrega da Folha de Trabalho

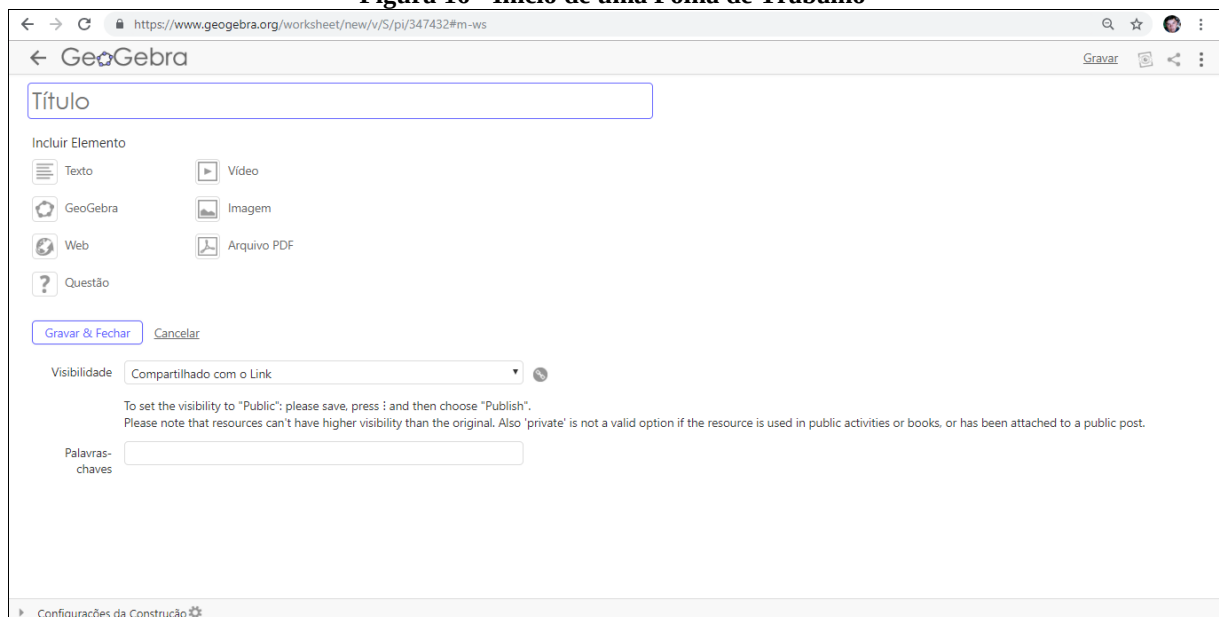


Fonte: o autor

Em seguida é necessário acessar a aba “Acrescentar Material”, como mostra a Figura 15, na qual irão aparecer opções, dentre as quais são: “Criar Atividade”, para iniciar uma Folha de Tarefa; “Material Existente”, que é possível procurar alguma atividade, sem modificá-la; é possível inserir “Imagem” do *desktop*; ou ainda, “Vídeo”, sendo necessário o inserir o seu *link* de acesso na *web*; ou então, um “Arquivo PDF”, que esteja no *desktop*.

Figura 15 - Opções para acrescentar diferentes materiais**Fonte: o autor**

Para iniciar uma nova atividade, deve-se escolher a aba “Criar Atividade”. Em seguida, será redirecionado para uma Folha de Trabalho em branco. Nela, deve-se nomear com um “Título” da tarefa e escolher qual dos elementos que deseja utilizar inicialmente, conforme mostra a Figura 16.

Figura 16 - Início de uma Folha de Trabalho**Fonte: o autor**

As opções disponíveis para a Folha de Trabalho, ilustradas na Figura 15, são definidas no Quadro 1.

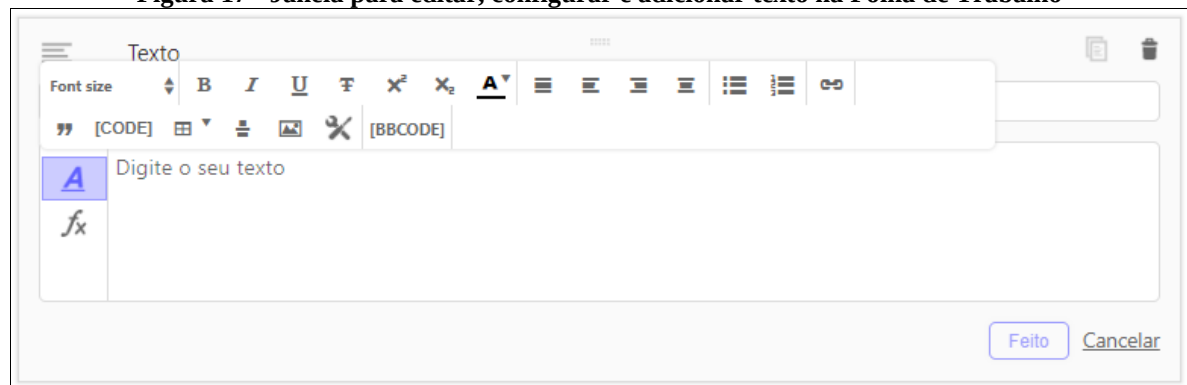
Quadro 1 - Opções para inserir na Folha de Trabalho

Ícone	Função
 Texto	Permite inserir texto na Folha de Tarefa, que pode trazer instruções, apontamentos teóricos, observações, entre outros.
 GeoGebra	Esse ícone permite localizar um <i>applet</i> , o qual pode estar inserido na conta do GeoGebra, pode buscar por uma construção já pronta de outros membros, ou ainda, procurar uma pasta do próprio <i>desktop</i> .
 Web	Com o ícone <i>Web</i> é possível inserir apenas o <i>link</i> de uma página, que em seguida, será carregada para a Folha de Tarefa.
 Questão	A Folha de Tarefa pode ser composta por questões, que podem ser aberta, para os casos que é necessário dissertar, ou então de múltipla escolha.
 Vídeo	Vídeo também poderá ser inserido na Folha de Tarefa, basta inserir o link.
 Imagem	Ainda, podem ser utilizadas imagens, carregadas do desktop ou por meio do link, a partir de pesquisas na Web.
 Arquivo PDF	Arquivos em formato PDF poderão compor ou fazer parte da Folha de Tarefa.

Fonte: o autor

Caso selecione a opção “Texto”, um quadro para editar texto ou alguma expressão matemática fica disponível, e ainda, permite configurar e formatar o texto, como mostra a Figura 17.

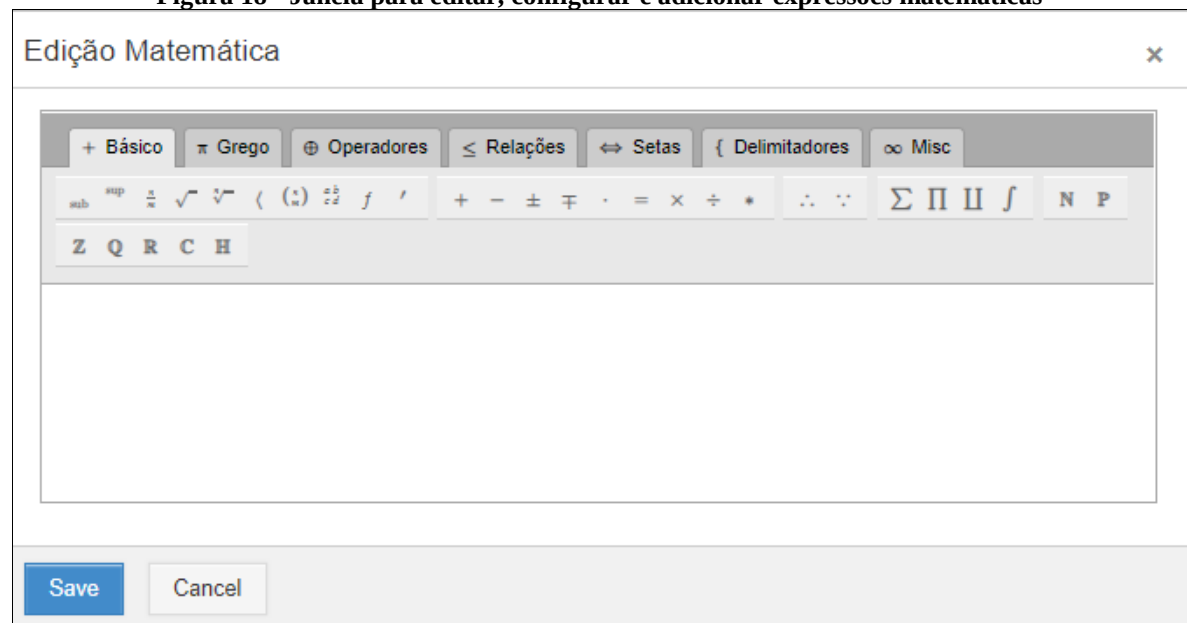
Figura 17 - Janela para editar, configurar e adicionar texto na Folha de Trabalho



Fonte: o autor

Se for inserir uma expressão matemática, como ilustra a Figura 18, é possível escolher, por exemplo, alfabeto grego, símbolos, relações, setas ou então delimitadores.

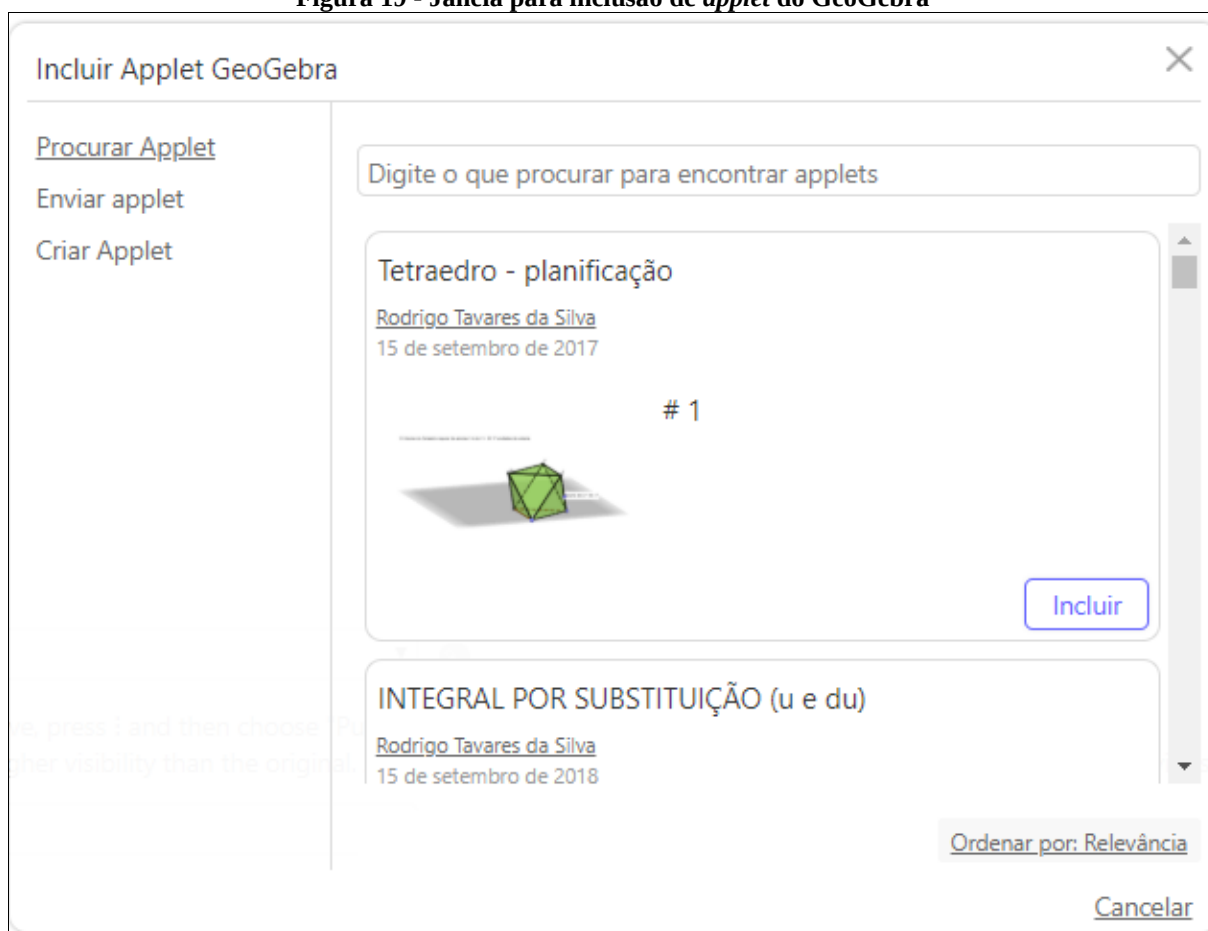
Figura 18 - Janela para editar, configurar e adicionar expressões matemáticas



Fonte: o autor

Além da opção texto, como mostra a Figura 18, é possível inserir, na Folha de Trabalho, algum *applet*, que pode ser feito pelo proprietário. Nesse caso, é preciso “Enviar *applet*” ou escolher algum *applet* compartilhado por outros membros da plataforma do GeoGebra; ou ainda, “Criar *Applet*”, que pode ser feito na tarefa.

Figura 19 - Janela para inclusão de *applet* do GeoGebra



Fonte: o autor

Uma outra opção para a Folha de Tarefa é inserir uma página da Web, conforme a Figura 20, para que os membros possam acessar, visitar e explorar algum site.

Figura 20 - Janela para incluir página da Web na Folha de Trabalho



Fonte: o autor

Ao acessar a aba “Inserir questão”, entre as opções disponíveis, a questão proposta pode ser aberta, caso queria que sua resposta seja dissertativa. Ou então, se for de múltipla escolha, além de inserir alternativas, pode-se indicar a alternativa correta. Dessa forma,

quando for resolvida essa questão pelo membro do grupo, ele já tem um *feedback* assim que finalizar a atividade.

Figura 21 - Janela para incluir questão aberta ou de múltipla escolha

Fonte: o autor

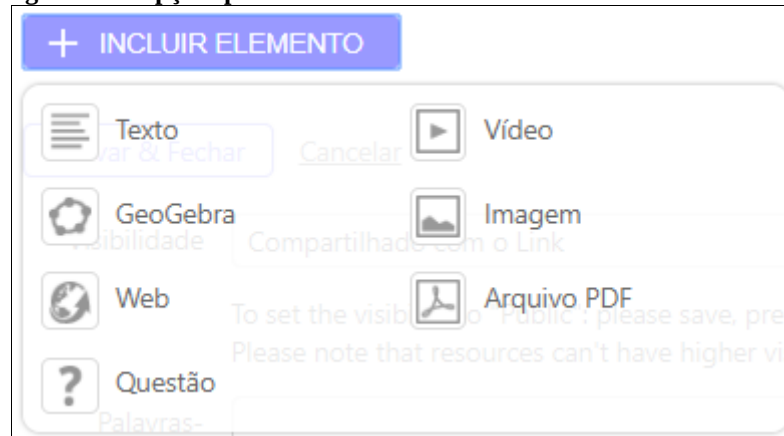
Ao inserir vídeo na Folha de Tarefa, é possível deixá-lo para que o membro possa visualizar na própria tarefa. É necessário apenas que o endereço do vídeo seja inserido no campo “Vídeo”, indicado na Figura 22.

Figura 22 - Janela para incluir vídeo

Fonte: o autor

A Folha de Trabalho pode ser composta por qualquer uma das opções citadas, e ainda ser escolhida quaisquer outras que sejam necessárias, podendo combinar diferentes opções. Para isso, é necessário apenas escolher a aba “Incluir tarefa”, conforme mostra a Figura 23.

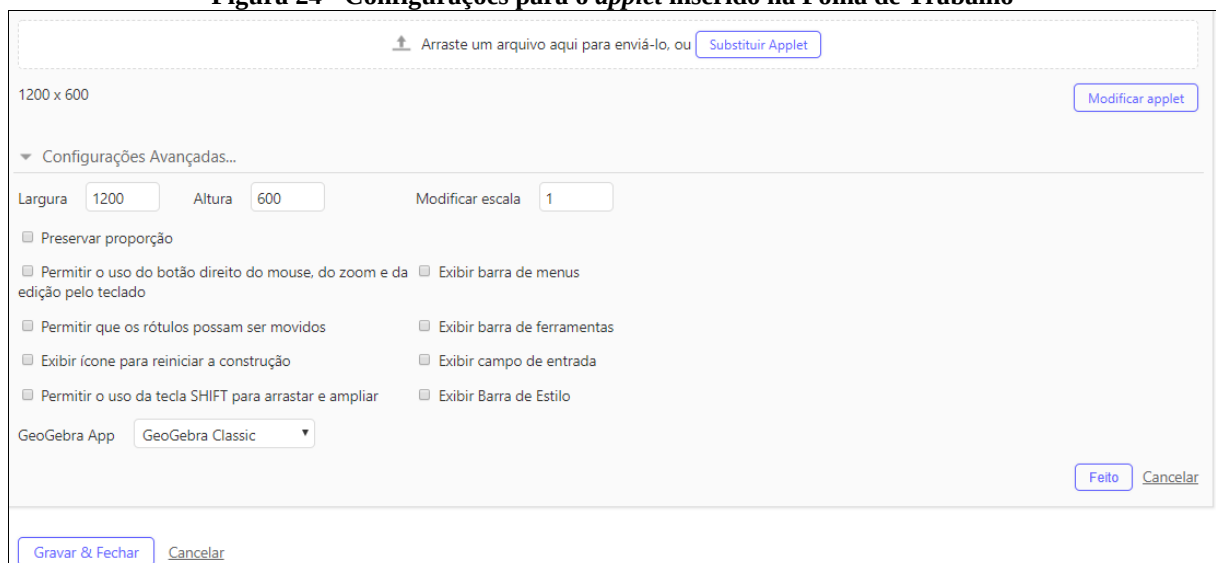
Figura 23 - Opções para incluir novos elementos na Folha de Trabalho



Fonte: o autor

Ao escolher a opção GeoGebra, pode ser utilizado um *applet* que já esteja em uma conta do GeoGebra publicada por outros membros, ou pode-se buscar no *desktop*. O *applet* será carregado na Folha de Tarefa, e ainda poderá ser modificado ou ajustado seu tamanho, conforme mostra a Figura 24.

Figura 24 - Configurações para o *applet* inserido na Folha de Trabalho

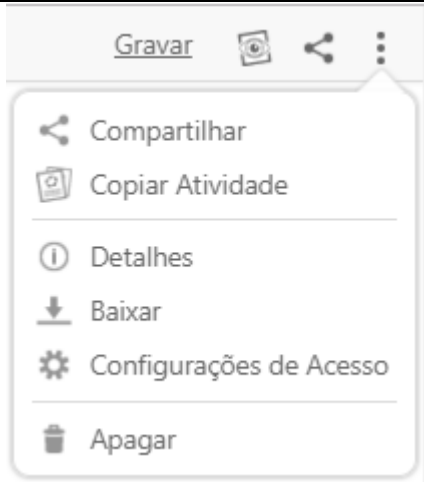


Fonte: o autor

A qualquer momento, enquanto está sendo editada a atividade podem ser gravadas ao selecionar a opção **Gravar**. Caso deseje visualizar como os membros acessam, basta ir na aba . A Folha de Trabalho pode ser compartilhada acessando a aba , suas opções estão

elencadas no Quadro 2. Ou então, acessando a opção , que outras opções para a Folha de Trabalho poderão ser utilizadas, todas as opções estão elencadas no Quadro.

Quadro 2 - Opções disponíveis para o proprietário na Folha de Trabalho

Quem pode acessar?	Opções visíveis
Opções para proprietários e membros do grupo que tenham permissão para editar a Folha de Trabalho.	
Opções disponíveis para proprietários, membros do grupo, ou para usuários do GeoGebra Tube acessam a atividade.	

Fonte: o autor

Cada uma das opções mostradas no Quadro 2, são discutidas no Quadro 3, quanto suas possibilidades para cada ícone, discutindo como podem ser exploradas e aproveitadas.

Quadro 3 - Algumas opções disponíveis para proprietários, membros e visitantes da Folha de Trabalho

Opção	O que pode ser feito:
 Compartilhar	Essa opção permite compartilhar com outro grupo, que pode ser algum já existente ou criar um novo grupo. Ou ainda, compartilhar o link da atividade no Facebook, Twitter, Google+, Google Classroom, entre outros. Ou então, pode ser encaminhada via e-mail, sendo preciso inserir o destinatário.
 Acrescentar a um Livro	Se preferir organizar um livro com diferentes atividades, pode acrescentar apenas a Folha de Trabalho ao livro on-line, também criado na plataforma do GeoGebra.
 Abrir com GeoGebra App	Em uma versão <i>Web</i> , é possível utilizar apenas o <i>applet</i> em uma versão virtual do GeoGebra.
 Editar Atividade	Essa opção é possível para apenas proprietários e membros com permissão para editar, podem ser acrescentados, editados ou mesmo excluídos quaisquer itens da Folha de Trabalho.
 Copiar Atividade	Você pode copiar o material caso deseje modificá-lo ou traduzi-lo, mesmo utilizando essa opção, a referência do autor original irá aparecer.
 Detalhes	Os detalhes como, por exemplo, dia de criação, nome do autor, tipo de material serão exibidos.
 Baixar	Caso prefira baixar para fazer uso em modo <i>off-line</i> é possível fazer o download para o <i>desktop</i> .
 Configurações de Acesso	Nessa opção é possível disponibilizar a Folha de Trabalho: em modo público, nesse caso, fica visível a qualquer pessoa que tenha conta no GeoGebra Tube; ou compartilhar via <i>link</i> , que apenas é possível ver acessada com o endereço eletrônico; ou então, deixar modo particular,

	para que apenas o proprietário e os membros tenham acesso.
	Caso o proprietário ou outro membro que tenha permissão para fazer edição no grupo, pode excluir a atividade

Fonte: o autor

Na próxima seção são apresentadas tarefas elaboradas na perspectiva do Ensino Híbrido, bem como, são apontados em cada Folha de Trabalho quais os objetivos e como poderiam ser propostas.

4. TAREFAS SOBRE TÓPICOS DE INTEGRAIS PARA COMPOR UMA PROPOSTA HÍBRIDA DE ENSINO

As tarefas que compõem essa seção foram repensadas e/ou reelaboradas a partir da primeira versão, a qual foi aplicada em condições reais de ensino (SILVA, 2019). A partir das primeiras três tarefas, foram pensadas e desencadeadas novas atividades, como, por exemplo, utilizando um mesmo ou elaborando um novo *applet*.

O intuito dessa seção é apresentar propostas de tarefas por meio de Folhas de Trabalho, que estão organizadas e apresentadas por conteúdo, ou ainda, por *applet*. Caso o professor, a professora, queira utilizar uma tarefa, pode vinculá-la ao seu Grupo, conforme explicamos na seção 3.1. Uma outra opção seria apenas fazer uso do *applet*, e, a partir dele, propor um novo encaminhamento, visto que cada Folha de Trabalho permite compartilhamento, ou então, fazer o *download* de toda tarefa, ou ainda, apenas do *applet*.

Cada Folha de Trabalho mostra um encaminhamento possível. Porém, permite que o professor, a professora, possa customizar e fazer as alterações e adaptações que julgar necessárias para sua realidade, considerando os objetivos que deseja alcançar.

Para que o professor, a professora, compreenda como cada Folha de Trabalho foi pensada pelo pesquisador é que são mencionados os objetivos em cada tarefa, bem como a forma com que ela pode ser implementada em sala de aula, seguindo os encaminhamentos do Ensino Híbrido.

Na sequência, são apresentadas as Folhas de Trabalhos conforme foram pensadas para serem propostas em uma abordagem híbrida. Ao final de cada Folha de Trabalho é proposta uma questão para que o membro possa deixar comentários, dúvidas e sugestões quanto a manipulação do *applet* e resolução das questões propostas.

4.1. NOÇÃO INTUITIVA DA SOMA DE RIEMANN: FUNÇÃO DENSIDADE DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL

Professor (a), essa Folha de Trabalho permite explorar os conceitos da Soma de Riemann, como o Método da Exaustão para encontrar a soma superior ou a soma inferior da região limitada pela curva e pelo eixo x .

Essa tarefa pode ser explorada em sala de aula, no entanto, é recomendável que apresente os conceitos iniciais, como na Figura 25 e Figura 26, e assim explore o *applet* em aula com algumas funções, permitindo que os alunos observem o comportamento do resultado da integral na soma superior e inferior.

Figura 25 - Conceitos do Método da Exaustão (a)

■

O PROBLEMA DA ÁREA

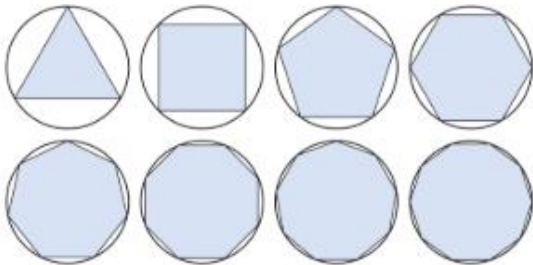
Muitas civilizações primitivas conheciam as fórmulas para a área de polígonos como quadrados, retângulos, triângulos e trapézios. Contudo, os matemáticos primitivos se deparavam com muitas dificuldades para encontrar fórmulas para a área de regiões com contornos curvilíneos, das quais o círculo é o exemplo mais simples.

O primeiro progresso real no trato com o problema geral da área foi obtido pelo matemático grego Arquimedes, que obteve áreas de regiões delimitadas por arcos de círculos, parábolas, espirais e vários outros tipos de curvas, usando um procedimento genial mais tarde denominado *método de exaustão*. Esse método, quando aplicado ao círculo, consiste na inscrição de uma sucessão de polígonos regulares no círculo, permitindo que o número de lados dos polígonos cresça indefinidamente (Figura 5.1.1). À medida que cresce o número de lados, os polígonos tendem a “exaurir” a região do círculo e suas áreas se aproximam cada vez mais da área exata do círculo.

Para ver como isso funciona numericamente, denote por $A(n)$ a área de um polígono regular de n lados inscrito em um círculo de raio 1. A Tabela 5.1.1 mostra os valores de $A(n)$

Fonte: Anton (2014, p. 316)

Figura 26 - Conceitos do Método da Exaustão (b)



n	$A(n)$
100	3,13952597647
200	3,14107590781
300	3,14136298250
400	3,14146346236
500	3,14150997084
1.000	3,14157198278
2.000	3,14158748588
3.000	3,14159035683
4.000	3,14159136166
5.000	3,14159182676
10.000	3,14159244688

Figura 5.1.1

com várias escolhas de n . Observe que, com valores grandes de n , como é de esperar, a área $A(n)$ parece estar próxima de π (unidades de área). Isso sugere que, para um círculo de raio 1, o método da exaustão é equivalente a uma equação da forma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(n) = \pi$$

Como os matemáticos gregos suspeitavam muito do conceito de “infinito”, eles evitavam seu uso em argumentos matemáticos. Desse modo, o cálculo de áreas pelo método de exaustão era um procedimento muito complicado. Acabou ficando para Newton e Leibniz a descoberta de um método geral de obtenção de áreas que utilizasse explicitamente a noção de limite. Discutiremos o método desses matemáticos no contexto do problema seguinte.

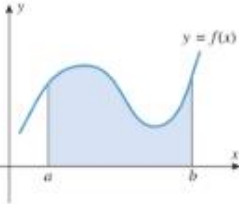


Figura 5.1.2

5.1.1 O PROBLEMA DA ÁREA Dada uma função f contínua e não negativa em um intervalo $[a, b]$, encontre a área da região entre o gráfico de f e o intervalo $[a, b]$ no eixo x (Figura 5.1.2).

Fonte: Anton (2014, p. 317)

O *applet* disponível nessa Folha de Trabalho foi elaborado pelo pesquisador e está disponível para acesso e *download*. A tabela de probabilidade da Distribuição Normal (Z) está disponibilizada com a fonte.

A tarefa, disponível em: <<https://ggbm.at/egnbekts>>, foi proposta na pesquisa seguindo os encaminhamentos do *laboratório rotacional* (BACICH, TANZI NETO, TREVISANI, 2015), em que, no primeiro momento, foram discutidos os conceitos e resolvidos alguns exemplos. Em seguida, foi proposta essa Folha de Trabalho, no intuito de dar continuidade ao estudo iniciado na aula, em uma abordagem virtual.

Quadro 4 - Folha de Trabalho para explorar o Método da Exaustão
INTEGRAÇÃO

Problema da área:

Dada uma função f contínua e não-negativa em um intervalo $[x_1, x_2]$, encontre a área da região entre o gráfico de f e o intervalo $[x_1, x_2]$.

O método dos retângulos para encontrar áreas:

Utilizando o método da exaustão de Arquimedes da seguinte maneira:

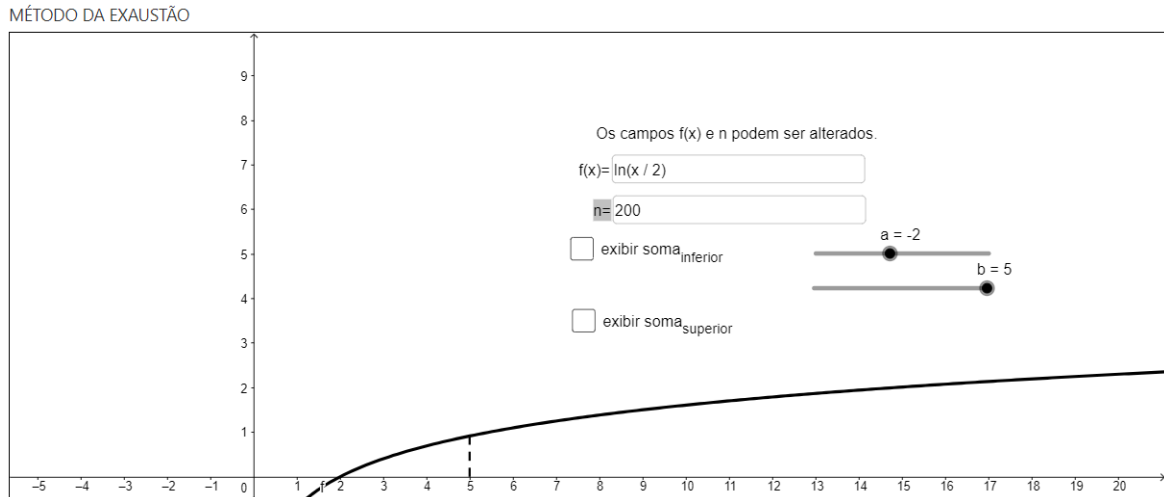
- Dividir o intervalo $[x_1, x_2]$ em n subintervalos iguais e em cada um deles construir um retângulo que se estende desde o eixo x até algum ponto da curva $y = f(x)$ entre o subintervalo.
- Para cada n , a área total dos retângulos pode ser vista como uma aproximação à área sob a curva acima do intervalo $[x_1, x_2]$. Além disso, fica intuitivamente evidente que, quando n cresce, essas aproximações irão se tornar cada vez melhores e tender à área exata como um limite. Assim, se A denota a área exata sobre a curva então, A_n denota a aproximação de A usando n retângulos.

Instruções para uso do recurso do GeoGebra:

- Inserir a função, no campo de entrada $f(x)$;
- Ajuste o valor inicial “a” e o final “b”, nos controles deslizantes, para o intervalo $[x_1, x_2]$;
- No botão “exibir soma”, tem a opção de exibir a soma superior e a soma inferior para o método da exaustão;

- E no campo de entrada “ n ”, é possível inserir a quantidade de retângulos para aproximar com a área abaixo da curva da função $f(x)$ e acima do eixo x .

Figura 1 – Recurso para a tarefa 1



Fonte: Disponível em <<https://ggbm.at/g6zybt5a>>

Fonte: Disponível em <<https://www.geogebra.org/m/gvtuaajg>>

Quadro 5 - Folha de Trabalho para a Função Densidade da Distribuição Normal

Distribuição Normal - função densidade

A função densidade da distribuição Normal (Z), definida por $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1}\right)^2}$, é uma função contínua, a qual é representada por meio de uma curva simétrica em relação à média (μ). O ponto máximo de $f(x)$ é o ponto $X = \mu$.

A probabilidade, nessa distribuição, é representada pela área abaixo da curva, com ponto inicial $x_i = 0$ e o ponto final $x_f = b$, sendo b maior que zero. A distribuição normal, como é comumente denominada, é de grande importância na área de Estatística e, normalmente, os livros trazem como anexo uma tabela de probabilidade. No entanto, os valores da tabela podem ser obtidos com a aproximação desejada a partir da soma de Riemann. Na distribuição Normal (Z) é considerado:

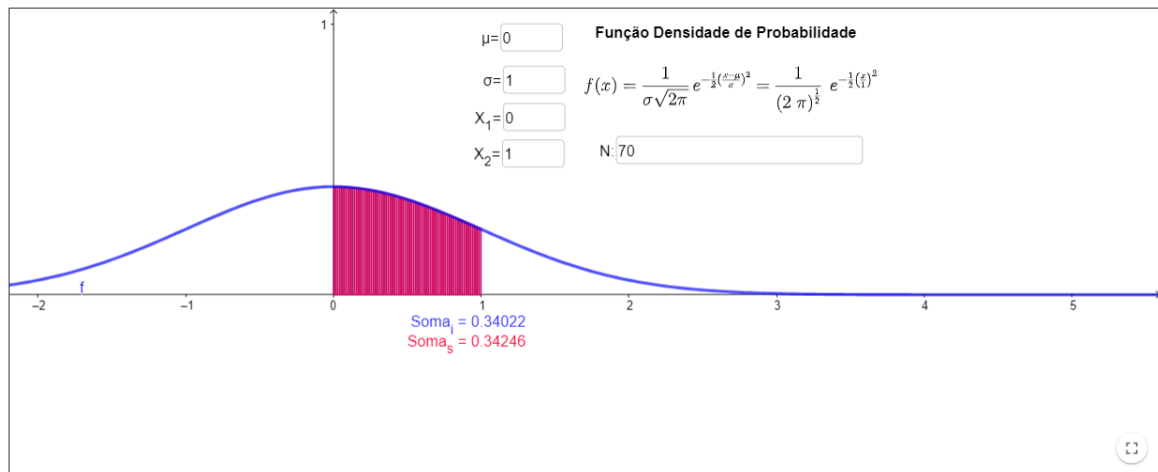
- A média (μ);
- O desvio padrão (σ);
- Os parâmetros, x_1 e x_2 do intervalo que se deseja conhecer a probabilidade.

Figura 2: Tabela de probabilidade da distribuição Normal (Z)

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Fonte: Estatística Aplicada – Engenharia Alimentar. Disponível em
http://w3.ualg.pt/~eesteves/docs/TabelasEstatistica_08.pdf
 Acesso em 10 de maio de 2018.

Figura 3 – Applet para função densidade de probabilidade



Fonte: <https://ggbm.at/xmkemkq9>

ATIVIDADE 1:

Com média igual a zero e desvio padrão igual a 1, explore cada item no recurso digital (GeoGebra) e compare o resultado obtido com a tabela da distribuição Normal (Z).

- $P(0 \leq x \leq 0,5)$
- $P(0 \leq x \leq 0,6)$
- $P(0 \leq x \leq 3)$
- $P(0 \leq x \leq 4)$
- $P(0 \leq x \leq 0,5)$

Para cada item acima, escreva o resultado obtido no recurso e o número de retângulos (N) que ficou mais próximo do valor fornecido na tabela (aproximação até a 4ª casa decimal)

ATIVIDADE 2:

Qual seria o valor de " α ", em $P(0 \leq x \leq \alpha)$, de modo que a probabilidade seja igual a 0,5 (meio). E indique o número "n" de retângulos necessários para obter tal resultado.

ATIVIDADE 3:

Comente sobre sua experiência (positiva e/ou negativa) com a realização dessa atividade. Houve dificuldade?

Fonte: Disponível em <<https://ggbm.at/egnbekts>>

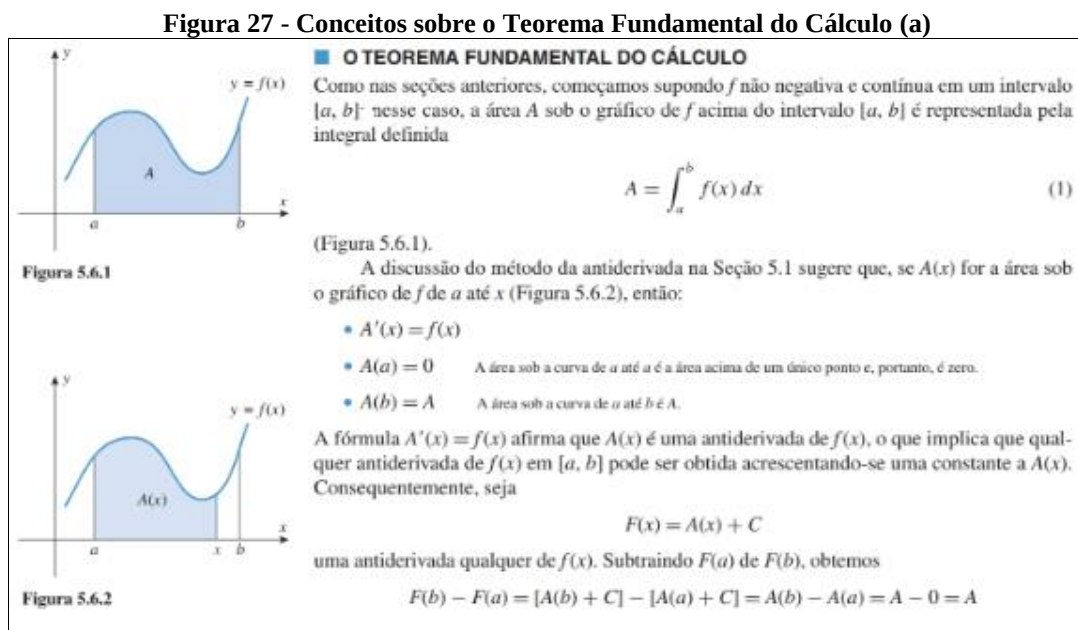
4.2. TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

O Teorema Fundamental do Cálculo permite explorar a integral definida e compreender a relação entre o cálculo diferencial e o cálculo integral.

Utilizar um *applet* que represente essa integral possibilita propor questionamentos e reflexões em relação a compreensão do conceito. O *applet* que foi inserido nas Folhas de Trabalho é um recurso elaborado por Lemke (2017) para sua pesquisa de mestrado. O recurso disponibilizado pela autora foi adaptado para compor as Folhas de Trabalho dessa seção.

A Folha de Trabalho: Teorema Fundamental do Cálculo (ver p. 41) foi proposta na pesquisa com as mesmas atividades e com o mesmo *applet*, disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/fkurttvty>>. Essa permitiu que outras questões fossem pensadas para compor novas tarefas no ambiente virtual.

É interessante, em um primeiro momento, que sejam discutidos os conceitos, como por exemplo, os que constam nas Figuras 27 e 28, que permitem enunciar o Teorema Fundamental do Cálculo (ANTON, 2007, 2014). Este processo pode anteceder a Folha de Trabalho para auxiliar na compreensão dos alunos quanto aos conceitos.



Fonte: Anton (2014, p. 362)

Figura 28 - Conceitos do Teorema Fundamental do Cálculo (b)

Logo, (1) pode ser expressa como

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Em palavras, essa equação afirma:

A integral definida pode ser calculada encontrando-se uma antiderivada do integrando e, então, subtraindo-se o valor dessa antiderivada no extremo inferior de integração de seu valor no extremo superior de integração.

Embora esse resultado tenha sido obtido sujeito à hipótese de que f é não negativa em $[a, b]$, essa hipótese não é essencial.

5.6.1 TEOREMA (*Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 1*) Se f for contínua em $[a, b]$ e F for uma antiderivada de f em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (2)$$

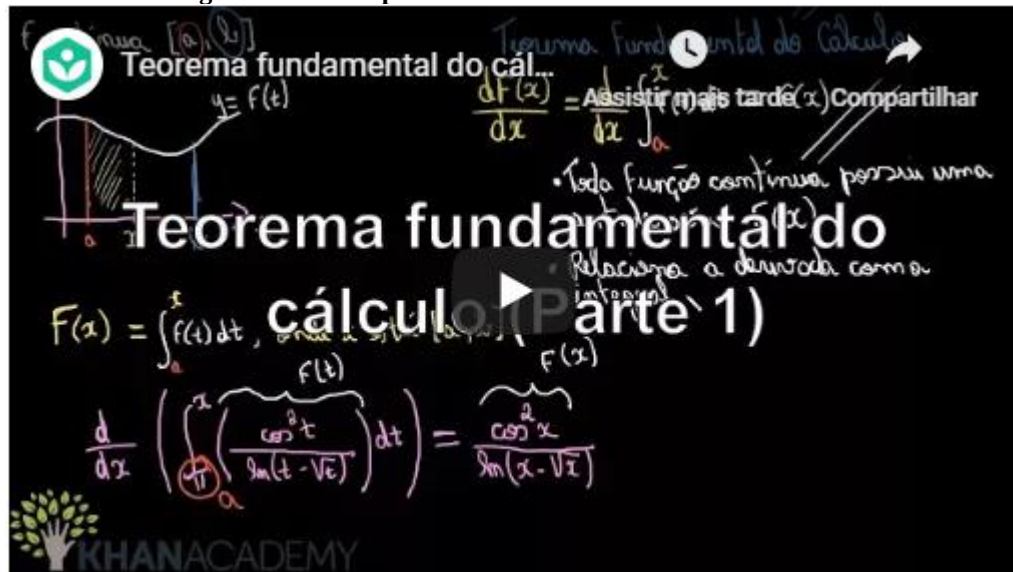
Fonte: Anton (2014, p. 363)

Além dos conceitos que podem ser abordados em aula, o professor pode sugerir vídeos para que os alunos assistam, ou pode solicitar que procurem por vídeos que permitam complementar as tarefas e sanar as dúvidas que possam surgir. Ou ainda, para auxiliar com as aulas.

A seguir, sugerimos vídeos da Khan Academy² - uma organização educacional que tem por finalidade contribuir com educadores e estudantes por meio de materiais disponíveis gratuitamente, tais como exercícios e vídeos de instrução para diferentes disciplinas. Os vídeos estão disponíveis em: <<https://youtu.be/CSISjVq00TA>>

² <https://pt.khanacademy.org>

Figura 29 - Vídeo para o Teorema Fundamental do Cálculo



Fonte: Disponível em <<https://youtu.be/CSISjVq00TA>>

Um outro vídeo que pode ser deixado para estudo, como sugestão, para compreender um pouco sobre a primitiva da função trigonométrica: a tangente.

Figura 30 - Vídeo para estudo da tangente pelo Teorema Fundamental do Cálculo



Fonte: Disponível em <<https://youtu.be/XTBdggOq7BM>>

Teorema Fundamental do Cálculo

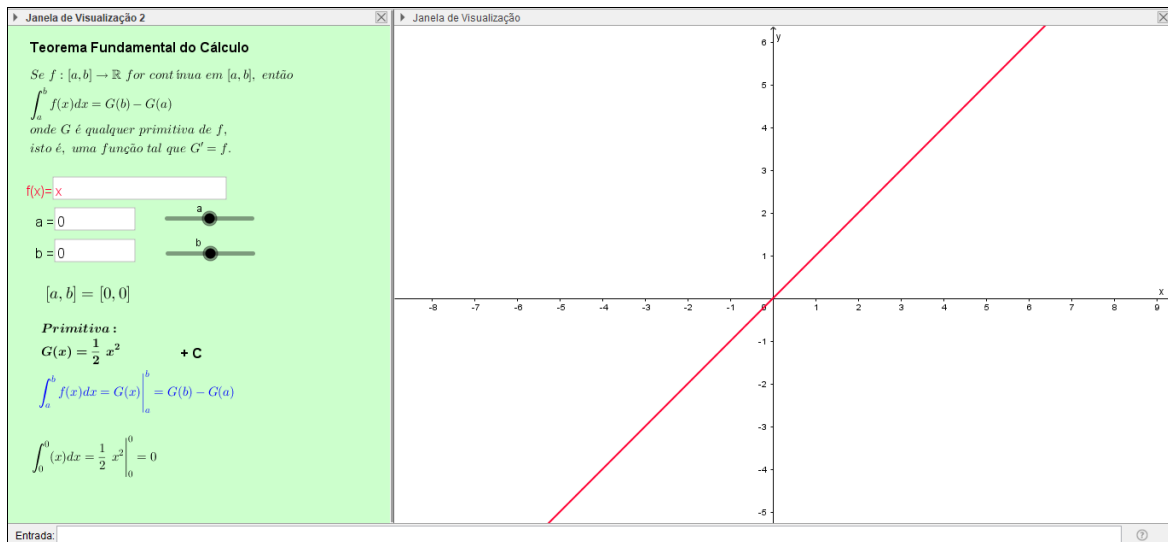
Professor (a), essa tarefa explora alguns conceitos iniciais sobre o Teorema Fundamental do Cálculo, e pode ser proposta seguindo os encaminhamentos da *sala de aula invertida* (EDUCAUSE, 2012; BACICH, TANZI NETO, TREVISANI, 2015). Se optar por essa abordagem, é necessário disponibilizar aos estudantes algum material que possa ajudar e contribuir para estudo dos conceitos, ou que possa servir como auxílio para as tarefas.

Uma sugestão de material, como sugestão, é apresentada no site Khan Academy, disponível em: <https://youtu.be/JYZy4pmT_mI>

As primeiras três questões da Folha de Trabalho têm por intuito permitir que o estudante explore o *applet* para assinalar a resposta correta em cada questão. A quarta questão tem por finalidade que o estudante escreva, de forma sucinta, o que compreendeu sobre os conceitos. A partir dessa resposta, o professor pode dar um *feedback*, com indagações quanto a resposta dada. E, para a aula presencial, utilizar essas respostas para planejar quais encaminhamentos serão dados para discutir o conteúdo.

Quadro 6 - Folha de Trabalho para o Teorema Fundamental do Cálculo

Por meio do *applet*, explore os itens a seguir:



Caso precise estudar um pouco sobre o Teorema Fundamental do Cálculo, acesse esse material do Khan Academy, acessando o link: <<https://pt.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-integration-new/ab-6-7/a/proof-of-fundamental-theorem-of-calculus>>

1) Qual das alternativas abaixo é uma solução para $\int x^2 dx$

() $\frac{x}{3}$

() $2x^2$

() x^3

() $\frac{x^3}{3}$

2) Qual a opção correta para $\int 4dx$

() $4x + c$

() $2x^2 + c$

() $x + 4$

() $\frac{x^4}{4}$

3) Marque a alternativa correta para a $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$

() $\frac{1}{4}$

() $\frac{1}{2}$

() $\frac{3}{4}$

() 1

4) Escreva, com suas palavras, sobre o Teorema Fundamental do Cálculo.

5) Espaço para comentários, dúvidas e sugestões sobre essa tarefa.

Fonte: Disponível em <<https://www.geogebra.org/m/dbgh8ams>>

Relação entre Integral Definida e Área: $f(x) = x$

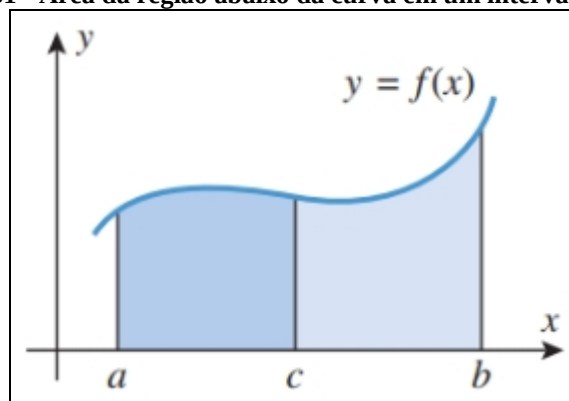
Professor (a), essa tarefa tem por intuito explorar a simetria entre os intervalos, de forma que o estudante, durante a manipulação, perceba que a integral definida nem sempre representa a área, isso é possível apenas quando a função é positiva no intervalo dado.

O *applet* disponível permite a visualização geométrica da região delimitada pela função, o intervalo fechado $[a, b]$ e o eixo x .

Essa Folha de Trabalho pode ser explorada em formato de *laboratório rotacional* (BACICH, TANZI NETO, TREVISANI, 2015), em que o professor pode orientar os alunos a explorar algumas funções, alterando o intervalo para que se familiarizem com o *applet*, em seguida, pode propor essa tarefa, com intuito de interpretar algumas propriedades, tais como:

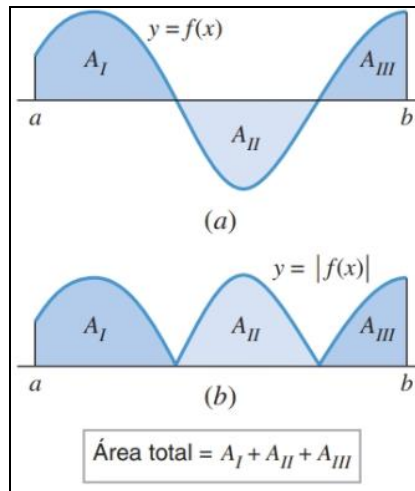
“Se $f(x)$ for integrável em um intervalo fechado contendo os três pontos a , b e c , então $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, não importando como os pontos estejam ordenados”, conforme ilustra a Figura 31 e “Se $f(x)$ for uma função continua no intervalo $[a, b]$, definimos a área total entre a curva $y = f(x)$ e o intervalo $[a, b]$ como $\text{área}_{total} = \int_a^b |f(x)|dx$ ”, como ilustra a Figura 32.

Figura 31 - Área da região abaixo da curva em um intervalo fechado



Fonte: Anton (2014, p. 357)

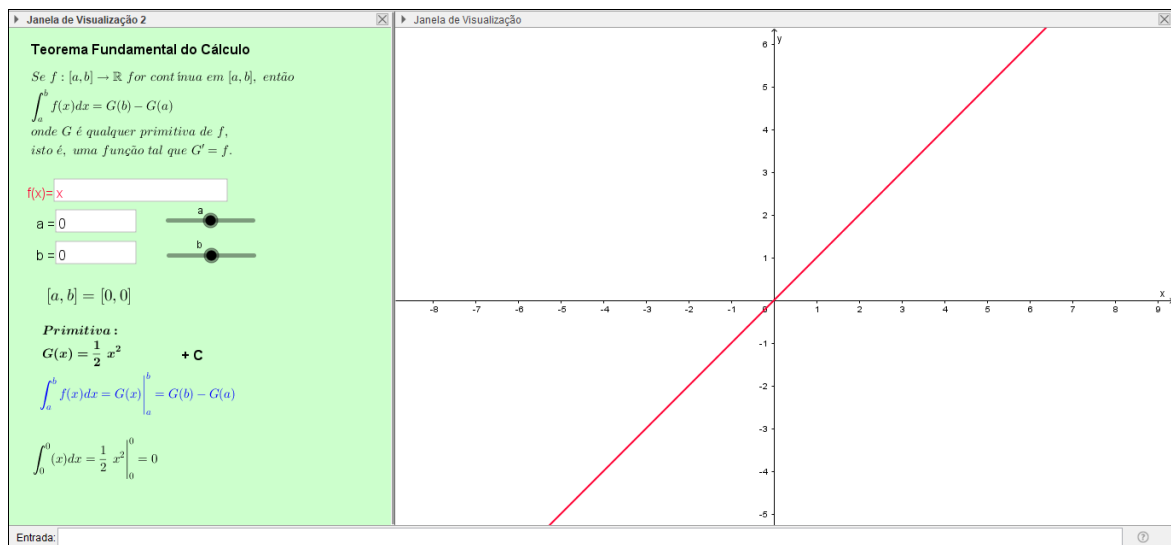
Figura 32 - Área da região entre a curva e o eixo x em seções



Fonte: Anton (2014, p. 367)

Quadro 7 -Folha de Trabalho para a Função $f(x) = x$

Segue o *applet* para auxiliar na resolução das questões a seguir:



QUESTÃO 1

Considere a função $f(x) = x$, para responder cada item a seguir:

a) Qual o resultado da $\int_0^2 f(x)dx$?

b) Qual o valor da $\int_0^4 f(x)dx$?

c) Calcule a $\int_{-2}^0 f(x)dx$

d) Qual o valor da $\int_{-4}^0 f(x)dx$?

e) Calcule $\int_{-4}^4 f(x)dx$

f) Encontre o valor da $\int_{-2}^2 f(x)dx$.

QUESTÃO 2

Em relação aos itens (e) e (f) da Questão 1, você percebeu que em ambos apareceu o valor zero como resultado final? Interprete esse resultado.

QUESTÃO 3

Em relação aos resultados obtidos nos itens (e) e (f), que propriedade poderia ser utilizada para calcular a área nesse intervalo? Em que circunstâncias podemos afirmar que a integral definida representa a área de uma região?

QUESTÃO 4

Espaço para comentários, dúvidas e sugestões sobre essa tarefa.

Fonte: Disponível em <<https://ggbm.at/tucjzz9x>>

Relação entre Integral Definida e Área: $f(x) = x^3$

Assim como na Folha de Trabalho anterior, essa tarefa também tem por finalidade explorar a ideia de que o resultado da integral definida nem sempre representa a área total em dado intervalo.

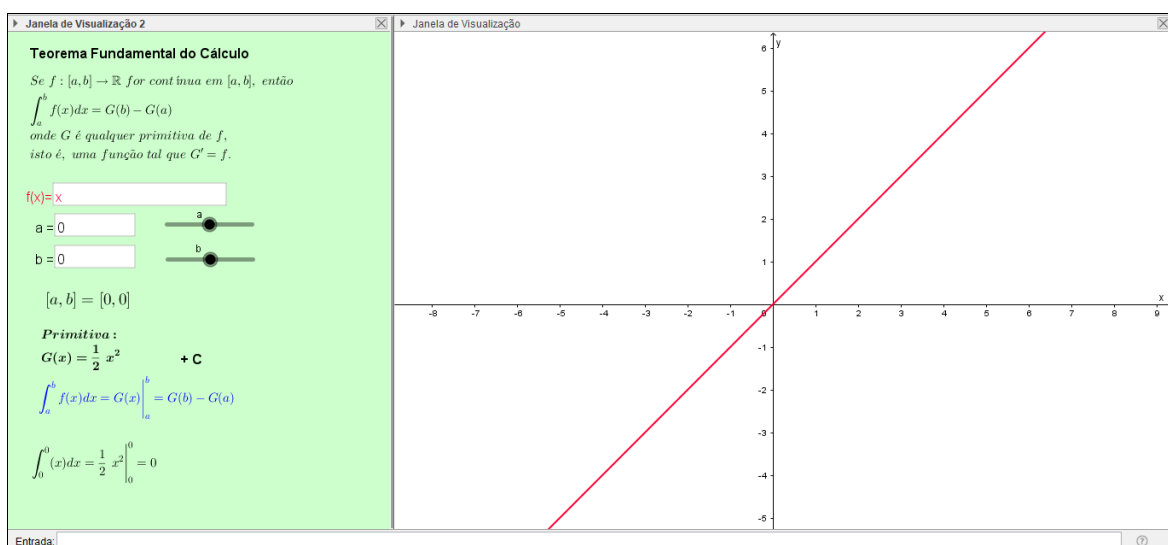
Essa Folha de Trabalho pode ser explorada em formato de *laboratório rotacional* (BACICH, TANZI NETO, TREVISANI, 2015), juntamente com as propriedades mencionadas na Folha de Trabalho anterior, tais como:

“Se $f(x)$ for integrável em um intervalo fechado contendo os três pontos a , b e c , então $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, não importando como os pontos estejam ordenados”, conforme ilustra a Figura 31 e “Se $f(x)$ for uma função contínua no intervalo $[a, b]$, definimos a área total entre a curva $y = f(x)$ e o intervalo $[a, b]$ como $\text{área}_{\text{total}} = \int_a^b |f(x)|dx$ ”, como ilustra a Figura 32.

Quanto a questão 2, nessa tarefa, é interessante dar um *feedback*, perguntando se durante a resolução os alunos perceberam que os itens (c) e o (f) se anulam, quando calculado.

Quadro 8 - Folha de Trabalho para a Função $f(x) = x^3$

Para explorar as questões a seguir, utilize o *applet* para ajudar



QUESTÃO 1

Em relação à função $f(x) = x^3$, responda cada item a seguir:

- a) Encontre o valor da $\int_{-1,5}^0 f(x)dx$?
- b) Qual o resultado da $\int_0^{1,5} f(x)dx$?
- c) Qual o valor da $\int_{-1,5}^{1,5} f(x)dx$?
- d) Calcule a $\int_{-0,5}^0 f(x)dx$?
- e) Qual o valor da $\int_0^{0,5} f(x)dx$?
- f) Calcule a $\int_{-0,5}^{0,5} f(x)dx$?

QUESTÃO 2

O resultado dos itens (c) e (f) representam a área da região abaixo da curva? Interprete os resultados e, usando integral definida, escreva uma expressão que representa a área total em um intervalo em que a função dada é simétrica.

QUESTÃO 3

Espaço para comentários, dúvidas e sugestões sobre essa tarefa.

Fonte: Disponível em <<https://ggbm.at/s8ghfgja>>

Movimento de uma partícula

As tarefas desta Folha de Trabalho foi adaptada do livro de Cálculo do Anton (2014, p. 376-377) para ser explorada geometricamente. As questões propostas tem por finalidade discutir e explorar no *applet* a família de soluções, dada a função do movimento de uma partícula. Entretanto, podem ser propostas e exploradas outras funções similares.

Uma ressalva é que no estudo do movimento de uma partícula a variável independente é em função do tempo, em geral indicada por t , entretanto, a janela gráfica do GeoGebra tem como padrão o uso da variável x . Então para essa Folha de Trabalho a variável x será adota para representar o tempo.

Uma discussão que pode ser feita para essa Folha de Trabalho, é que usamos a derivada para definir as noções de velocidade e aceleração instantâneas para uma partícula em movimento retilíneo. Da mesma forma se fazem necessários conceitos sobre antiderivada, ou integral, dependendo da função que é conhecida. Assim, é importante o estudo dos conceitos indicados na Figura 33, Figura 34 e Figura 35.

Figura 33 - Movimento retilíneo revisto usando integração (a)

■ ENCONTRANDO POSIÇÃO E VELOCIDADE POR INTEGRAÇÃO

Lembre que, na Seção 4.6 (ver Fórmulas (1) e (3)), vimos que, se uma partícula em movimento retilíneo tem uma função posição $s(t)$, então sua velocidade e aceleração instantâneas são dadas pelas fórmulas

$$v(t) = s'(t) \quad \text{e} \quad a(t) = v'(t)$$

Segue dessas fórmulas que $s(t)$ é uma antiderivada de $v(t)$ e que $v(t)$ é uma antiderivada de $a(t)$, ou seja,

$s(t) = \int v(t) dt$

e

$v(t) = \int a(t) dt$

(1-2)

Fonte: Anton (2014, p. 376)

Figura 34 - Movimento retilíneo revisto usando integração (b)

■ CALCULANDO DESLOCAMENTO E DISTÂNCIA PERCORRIDA POR INTEGRAÇÃO

Lembre que o deslocamento de uma partícula em movimento retilíneo ao longo de um intervalo de tempo é sua coordenada final menos sua coordenada inicial. Assim, se a função

Fonte: Anton (2014, p. 376)

Figura 35 - Movimento retilíneo revisto usando integração (c)

posição da partícula for $s(t)$, então seu deslocamento ao longo do intervalo de tempo $[t_0, t_1]$ é $s(t_1) - s(t_0)$. Isso pode ser escrito em forma integral como

$$\left[\begin{array}{c} \text{deslocamento} \\ \text{ao longo do} \\ \text{intervalo } [t_0, t_1] \end{array} \right] = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} s'(t) dt = s(t_1) - s(t_0) \quad (3)$$

No entanto, para encontrar a distância percorrida pela partícula ao longo do intervalo de tempo $[t_0, t_1]$ (ou seja, o total da distância percorrida no sentido positivo mais a distância percorrida no sentido negativo), precisamos integrar o valor absoluto da função velocidade, ou seja,

$$\left[\begin{array}{c} \text{distância total percorrida} \\ \text{em um intervalo de} \\ \text{tempo } [t_0, t_1] \end{array} \right] = \int_{t_0}^{t_1} |v(t)| dt \quad (4)$$

Como o valor absoluto da velocidade é a velocidade escalar, podemos, informalmente, resumir as Fórmulas (3) e (4) como segue.

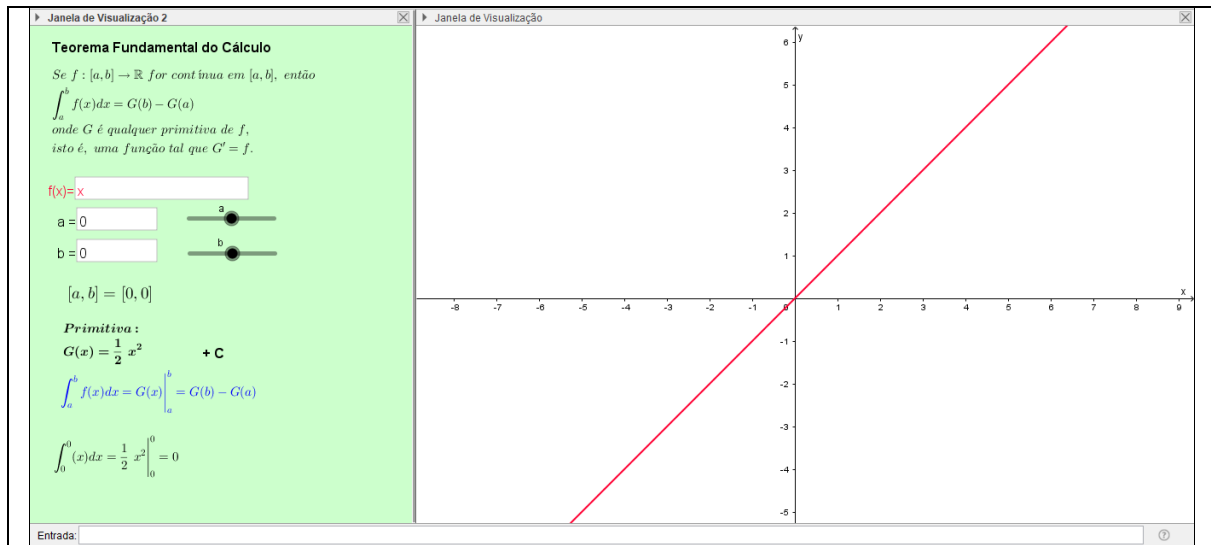
Integrando a velocidade ao longo de um intervalo de tempo, obtemos o deslocamento; integrando a velocidade escalar ao longo de um intervalo de tempo, obtemos a distância percorrida.

Fonte: Anton (2014, p. 377)

Essa tarefa pode ser proposta em uma abordagem de *sala de aula invertida* (EDUCAUSE, 2012; BACICH, TANZI NETO, TREVISANI, 2015), e antes da aula o professor poderá analisar as respostas enviadas pelos membros, dar um *feedback* para investigar os conceitos compreendidos no comportamento da partícula.

Quadro 9 - Folha de Trabalho do Movimento da Partícula

As questões a seguir foram adaptadas do livro de Cálculo Diferencial e Integral do Anton (2014, p. 376-377) para o estudo do movimento de uma partícula. Uma ressalva é que a variável independente é em função do tempo (t), entretanto, a janela gráfica do GeoGebra tem como padrão o uso da variável x . Então para responder as questões a seguir a variável x será adota para representar o tempo.



QUESTÃO 1

Uma partícula move-se ao longo de um eixo coordenado de tal forma que sua velocidade no instante t é $v(t) = t^2 - 2t$ m/s.

- Encontre o deslocamento da partícula no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 3$.
- Encontre a distância total percorrida pela partícula no intervalo $0 \leq t \leq 3$.

QUESTÃO 2

Resolva os itens a) e b) em seu caderno e insira uma imagem da sua resolução. Confirme o resultado encontrado com os resultados obtidos na Questão 1.

QUESTÃO 3

Espaço para comentários, dúvidas e sugestões sobre essa tarefa.

Fonte: Disponível em <<https://ggbm.at/mtm5z3bt>>

Outras Folhas de Trabalho para Integral Definida

As questões propostas nessa próxima tarefa têm como intuito explorar a integral definida da função seno, possibilitando ainda discutir conceitos como domínio, imagem e período da função.

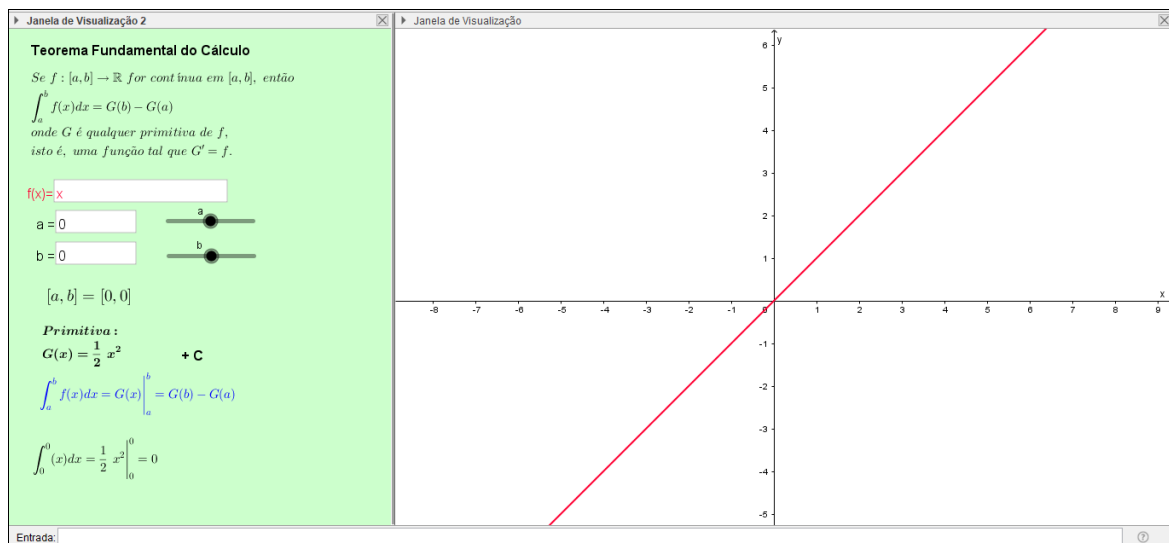
Alguns cuidados devem ser tomados para inserir valores nos campos de entrada, como por exemplo, em números decimais: no GeoGebra deve-se utilizar o ponto, ao invés da vírgula (0,5 (meio) deve ser escrito “0.5”); o símbolo π deve ser escrito como “pi” ou “Pi”.

Na segunda questão, espera-se que o aluno manipule o *applet* e encontre diferentes possibilidades para os parâmetros “a” e “b” e que verifique se esses parâmetros são únicos ou não, justificando sua resposta. Embora o aluno possa manipular os controles deslizantes e obter uma boa aproximação do resultado 1,5, o professor, a professora, pode estimulá-lo a buscar resultados precisos, associando a representação algébrica a partir do resultado da primitiva e uso do Teorema Fundamental do Cálculo: $-\cos(x) + C|_a^b = -\cos(b) - C + \cos(a) + C = 1,5$ e escolhendo um valor para a , então $b = \arccos(\cos(a) - 1,5)$.

Essa tarefa pode ser explorada seguindo os encaminhamentos da *sala de aula invertida* (EDUCAUSE, 2012; BACICH, TANZI NETO, TREVISANI, 2015). O professor deve verificar, antes da aula, as respostas dadas e, a partir delas, planejar os encaminhamentos para a aula.

Quadro 10 - Folha de Trabalho para a Função Seno

Explore a função seno, utilizando o *applet* para auxiliar nas soluções



QUESTÃO 1

Seja a função $f(x) = \text{sen}(x)$, utilize-a para responder cada item a seguir:

- Calcule $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$?
- Determine o valor da $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) dx$
- Calcule o valor de $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx$

QUESTÃO 2

Considerando a $\int_a^b f(x) dx = 1,5$, quais seriam os valores dos extremos do intervalo “a” e “b”, para obter o resultado de 1,5? Interprete o resultado

QUESTÃO 3

Espaço para comentários, dúvidas e sugestões sobre essa tarefa.

Fonte: Disponível em <<https://ggbm.at/dagyaeu>>

O mesmo *applet* pode ser usado para propor o estudo de outras funções, de acordo com os objetivos de ensino do professor, da professora. Assim, na mesma linha das Folhas de Trabalho da seção 4.2 estão relacionados os *links* para tarefas envolvendo outras funções:

- Função Seno: <<https://ggbm.at/dagyaeeu>>
- Função Cosseno: <<https://ggbm.at/eejpinp>>
- Função Tangente: <<https://ggbm.at/q2jkngpu>>
- Função Exponencial: <<https://ggbm.at/tkbskty7>>
- Função Logarítmica: <<https://ggbm.at/frmjruy9>>

4.3. INTEGRAL POR SUBSTITUIÇÃO (u e du)

Professor (a), em um primeiro momento, pode-se contemplar os conceitos sobre o uso da substituição para o cálculo de integrais, deixando explícito para quais funções podem ser utilizados adequadamente “u” e “du”. As Figuras 34 e 35 mostram os conceitos para a integral por substituição, os quais foram discutidos durante a aula para a Folha de Trabalho proposta na pesquisa.

Figura 36 – Conceitos da integral por substituição (a)

■ SUBSTITUIÇÃO u

O método da substituição pode ser motivado examinando-se a regra da cadeia do ponto de vista da antidiferenciação. Com esse propósito, suponhamos que F seja uma antiderivada de f e que g seja uma função diferenciável. A derivada de $F(g(x))$ pode, pela regra da cadeia, ser expressa como

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x)$$

Fonte: Anton (2014, p. 332)

Figura 37 – Conceitos da integral por substituição (b)

e, em forma integral, ser escrita como

$$\int F'(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C \quad (1)$$

ou, ainda, uma vez que F é uma antiderivada de f ,

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C \quad (2)$$

Para nossos propósitos, será útil tomar $u = g(x)$ e escrever $du/dx = g'(x)$ na forma diferencial $du = g'(x) dx$. Com essa notação, (2) pode ser expressa como

$$\int f(u) du = F(u) + C \quad (3)$$

O processo de calcular uma integral da forma (2) convertida na forma (3) com a substituição

$$u = g(x) \quad \text{e} \quad du = g'(x) dx$$

é denominado **método da substituição u**. Aqui, nossa ênfase *não* é a interpretação da expressão $du = g'(x) dx$. Em vez disso, a notação de diferencial tem a função básica de servir como uma maneira conveniente de executar o método da substituição u . O exemplo a seguir ilustra como funciona o método.

Fonte: Anton (2014, p. 332)

Os conceitos da integral por substituição podem ser discutidos e explorados, enquanto se manipula o *applet*. O Quadro 11 mostra, na íntegra, a tarefa como foi proposta aos alunos em Silva (2019).

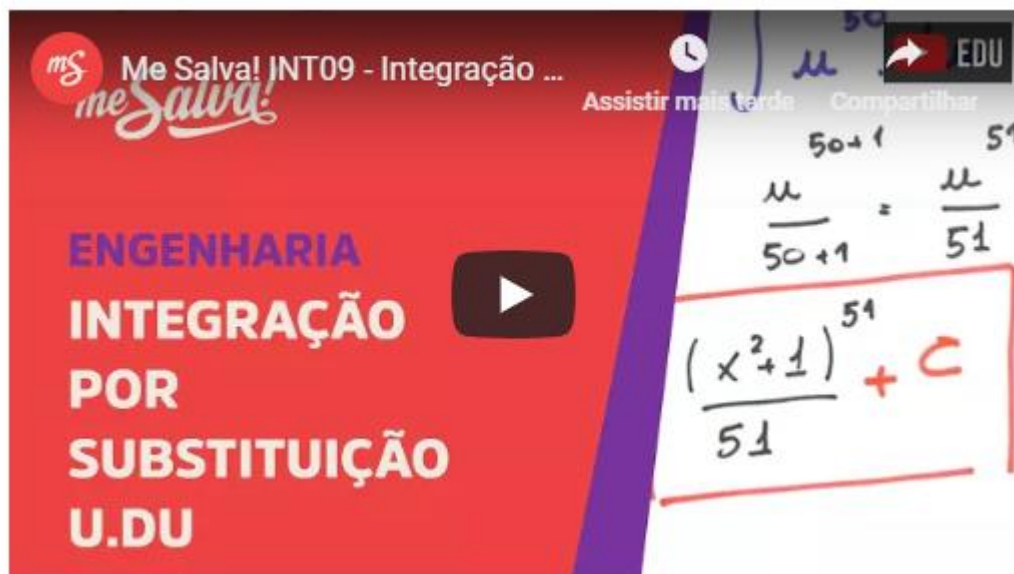
Quadro 11 – Folha de Trabalho proposta na pesquisa
INTEGRAL POR SUBSTITUIÇÃO – u e du

Teorema: Seja g uma função diferenciável e seja o intervalo I a imagem de g . Suponha que f seja uma função definida em I e que F seja uma antiderivada de f em I . Então,

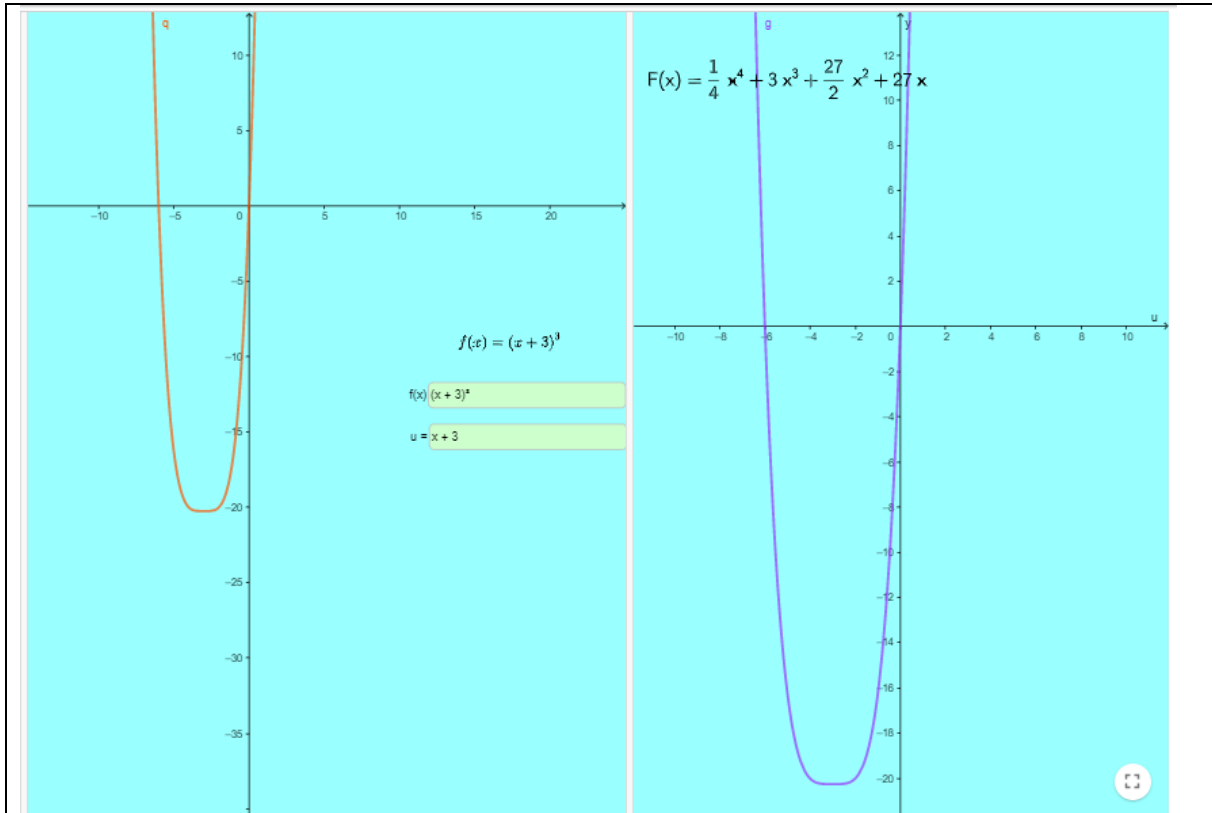
$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + c$$

Se $u = g(x)$ e $du = g'(x)dx$ então:

$$\int f(u)du = F(u) + c$$



Disponível em: <<https://youtu.be/Z-KvGPL4W3k>>



Disponível em: <<https://ggbm.at/wcsyh7tv>>

QUESTÃO 1:

Em cada questão a seguir, utilize a janela do GeoGebra acima, inserindo na primeira janela (à esquerda) a função e a partir dela identifique qual termo será chamado de “ u ”. E obtenha na segunda janela (à direita) a primitiva. E anote o resultado obtido para:

1- Calcule $\int (3x+5)^4 dx$

2- Calcule $\int (2x-5)^3 dx$

3- Calcule $\int (\sqrt{3x+1}) dx$

4- Determine $\int \frac{1}{(x+5)^2} dx$

5- Calcule $\int \frac{3}{4+x} dx$

QUESTÃO 2:

Comente sua impressão, quanto a manipulação do GeoGebra, às questões propostas e, quais observações para essa atividade.

Fonte: Disponível em <<https://www.geogebra.org/m/kj3hnedz>>

A análise desta tarefa proposta na pesquisa indicou a necessidade de realizar uma adaptação, pois na primeira versão (Quadro 11) percebemos que a primitiva dada no *applet* é expressa na forma expandida, o que não facilitou para comparar com a forma reduzida, normalmente obtida quando se calcula “à mão”. Esta foi uma constatação feita pelos alunos que nos levou a revisar a construção do *applet* para compor este Produto Educacional. Uma alternativa foi utilizar a janela de Cálculo Simbólico (CAS) para que, na resolução, fosse possível indicar quem seria o termo “*u*” e “*du*”, para que a janela do CAS pudesse mostrar a primitiva e, no final, o aluno possa indicar a substituição para finalizar a resolução.

O intuito era a elaboração de um *applet* que resolvesse um abrangente conjunto de funções pelo método da substituição. No entanto, encontramos limitações que não conseguimos resolver em tempo, assim, indicaremos uma relação de funções cujo *applet* foi testado e se mostrou preciso.

Na sequência é apresentada a Folha de Trabalho, já com o *applet* reformulado.

Algumas Funções Polinomiais

Nesse *applet* é importante que as funções inseridas sejam simples, para que o resultado dado na janela CAS seja correto. Algumas sugestões que podem ser utilizadas são:

- $f(x) = (x \pm 5)^3$
- $f(x) = (3 \pm x)^{-2}$
- $f(x) = (2x \pm 6)^{-3}$

O *applet* da Folha de Trabalho inserida no Quadro 12 pode ser usado para propor o estudo de outras funções, como, por exemplo, as que foram citadas acima. Além dessas, podem ser pensadas em outras e para elas serem elaboradas questões de acordo com os objetivos de ensino do professor, da professora.

As questões propostas nessa tarefa (ver Quadro 12) têm como intuito explorar a primitiva da função polinomial, possibilitando discutir a substituição, inserindo corretamente “*u*”, “*du*”. Professor (a), é possível explorar a relação entre a integral e a derivada, solicitando que o aluno verifique se derivando a primitiva obtém a função $f(x)$.

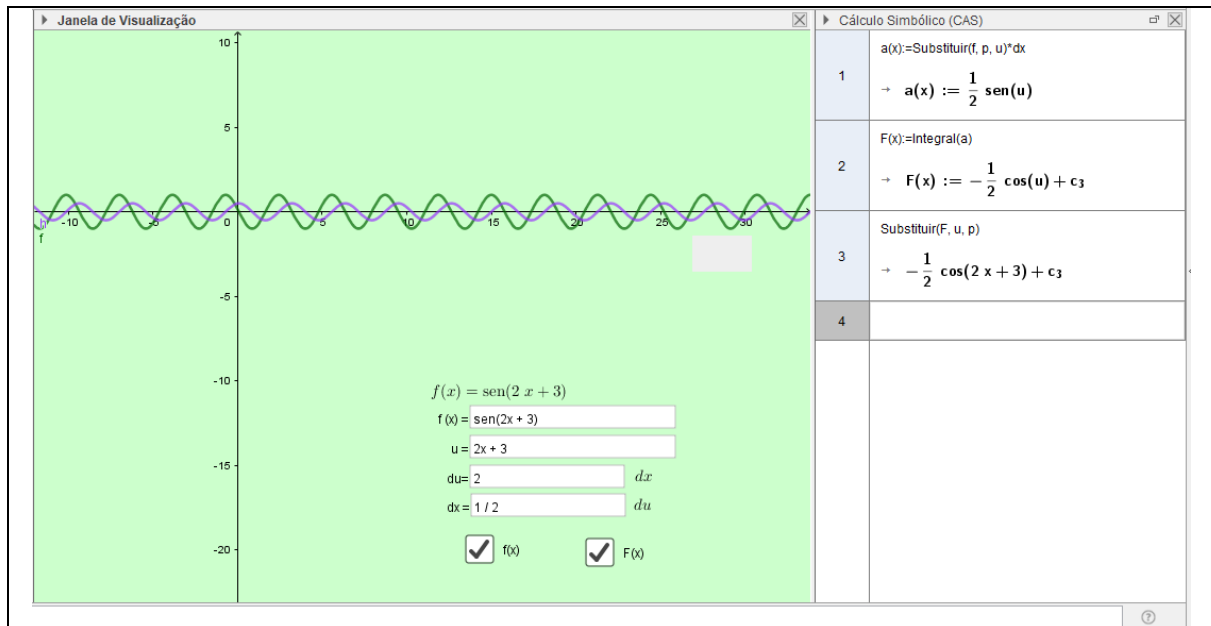
Uma sugestão para a tarefa a seguir, é que pode ser explorada em uma abordagem de *laboratório rotacional* (BACICH, TANZI NETO, TREVISANI, 2015). Assim o professor pode realizar essa tarefa no laboratório de informática, de modo que sejam mesclados o uso do computador e o uso de uma lousa.

Quadro 12 - Folha de Trabalho para Algumas Funções Polinomiais

Esse *applet* visa ajudar a responder as questões a seguir. Leve em conta algumas dicas que ajudarão a fazer um bom uso dele:

Na janela de visualização, é preciso primeiro inserir a função $f(x)$ no respectivo campo de entrada, assim como, escolher quem será chamado de “*u*”. Em seguida, “*du*” será calculado e, a partir de “*du*”, você deve indicar quem é “*dx*” no respectivo campo de entrada. Observe que após inserir cada expressão é necessário “*dar enter*” para que o *applet* execute a expressão inserida. Assim que forem preenchidos os campos de entrada, na janela de visualização serão exibidos os gráficos da função $f(x)$ e de sua primitiva $F(x)$, ambos os gráficos podem ser escondidos desmarcando o botão na parte inferior da janela.

Na janela Cálculo Simbólico (CAS) será exibida a primitiva da função $f(x)$ a partir de uma programação que precisa ser alterada.



QUESTÃO 1

Considerando a função $f(x) = (x + 2)^8$, que aparece no *applet*, responda:

- Qual foi a escolha para o termo “ u ”, na substituição?
- Por qual expressão “ dx ” foi substituído?
- Qual é a relação entre o gráfico de $f(x)$ e o gráfico de $F(x)$?

QUESTÃO 2

Considerando a função $f(x) = (4 - 3x)^5$ altere adequadamente os campos de entrada no *applet* e responda:

- Quem deve ser o termo “ u ”, na substituição?
- Por qual expressão “ dx ” deve ser substituído?
- Qual a expressão resultante para $F(x)$?
- Se você derivar $F(x)$ o que espera obter como resultado? Justifique.

QUESTÃO 3

Resolva a integral $\int (3x + 2)^{-6} dx$ “à mão” e insira aqui uma imagem de sua resolução.

Em seguida use o *applet* fazendo as substituições adequadas, compare as respostas e diga se são equivalentes.

QUESTÃO 4

Espaço para comentários, dúvidas e sugestões sobre essa tarefa.

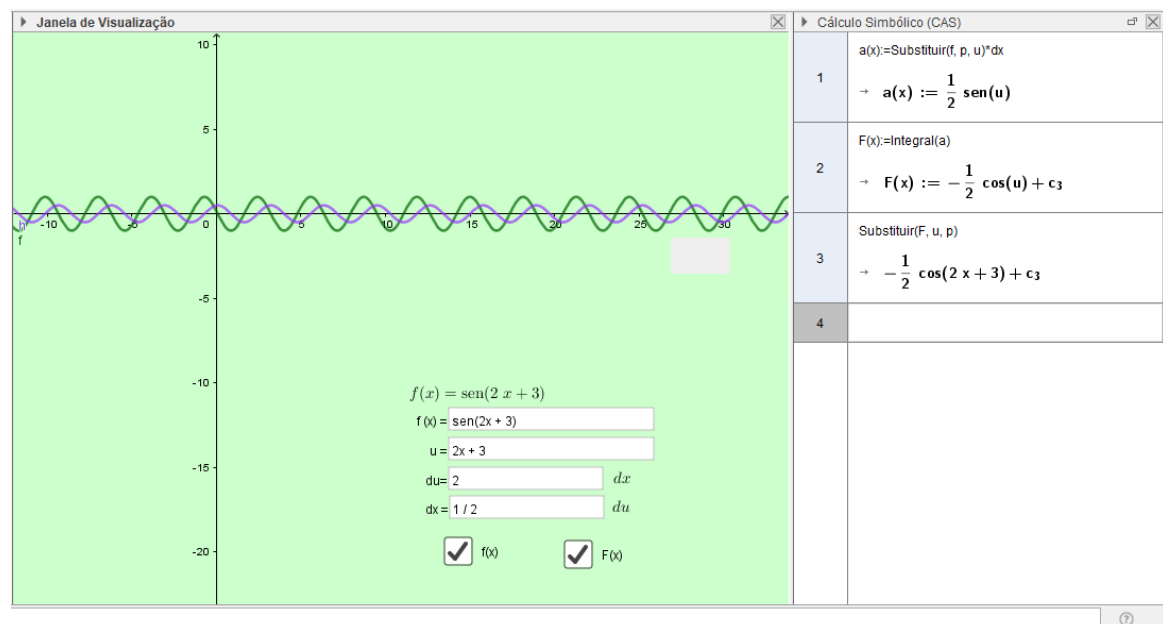
Algumas Funções Trigonômicas

Quadro 13 - Folha de Trabalho para algumas Funções Trigonômicas

Esse *applet* visa ajudar a responder as questões a seguir. Leve em conta algumas dicas que ajudarão a fazer um bom uso dele:

Na janela de visualização, é preciso primeiro inserir a função $f(x)$ no respectivo campo de entrada, assim como, escolher quem será chamado de " u ". Em seguida, " du " será calculado e, a partir de " du ", você deve indicar quem é " dx " no respectivo campo de entrada. Observe que após inserir cada expressão é necessário "*dar enter*" para que o *applet* execute a expressão inserida. Assim que forem preenchidos os campos de entrada, na janela de visualização serão exibidos os gráficos da função $f(x)$ e de sua primitiva $F(x)$, ambos os gráficos podem ser escondidos desmarcando o botão na parte inferior da janela.

Na janela Cálculo Simbólico (CAS) será exibida a primitiva da função $f(x)$ a partir de uma programação que precisa ser alterada.



QUESTÃO 1

Considerando a função $f(x) = \text{sen}(x + 3)$, altere adequadamente os campos de entrada no *applet* e responda:

a) Quem deve ser o termo " u ", na substituição?

- b) Por qual expressão “ dx ” deve ser substituído?
- c) Qual a expressão resultante para $F(x)$?
- d) Se você derivar $F(x)$ o que espera obter como resultado? Justifique.

QUESTÃO 2

Considerando a função $f(x) = \text{sen}(5x)$, altere adequadamente os campos de entrada no *applet* e responda:

- a) Quem deve ser o termo “ u ”, na substituição?
- b) Por qual expressão “ dx ” deve ser substituído?
- c) Qual a expressão resultante para $F(x)$?
- d) Calcule $f(0)$ e explique o que essa resposta indica que está ocorrendo no gráfico de $F(x)$ quando $x = 0$.

QUESTÃO 3

Antes de usar o *applet*, calcule $\int 2\cos(5x + 1)dx$ em um rascunho e, se possível, insira uma imagem de seus cálculos aqui. Depois responda com auxílio do *applet*:

- a) Quem deve ser o termo “ u ”, na substituição?
- b) Por qual expressão “ dx ” deve ser substituído?
- c) Qual a expressão resultante para $F(x)$?
- d) Se possível, insira uma imagem do *applet* com a resposta encontrada.

QUESTÃO 4

Espaço para comentários, dúvidas e sugestões sobre essa tarefa.

Fonte: Disponível em <<https://www.geogebra.org/m/uweegppr>>

Algumas Funções Exponenciais

A Folha de Trabalho, apresentada no Quadro 14, têm como intuito explorar a integral da função exponencial, bem como, identificar quem são “ u ”, “ du ” e explorar a antiderivada da função.

Recomendamos que tome alguns cuidados: para inserir o “e” no campo de entrada utilize a caixa de símbolos, que fica localizada no canto direito no campo de entrada; no caso da fração, no GeoGebra pode ser escrita em número decimal, e deve utilizar o ponto, ao invés da vírgula (0,5 (meio) deve ser escrito “0.5”).

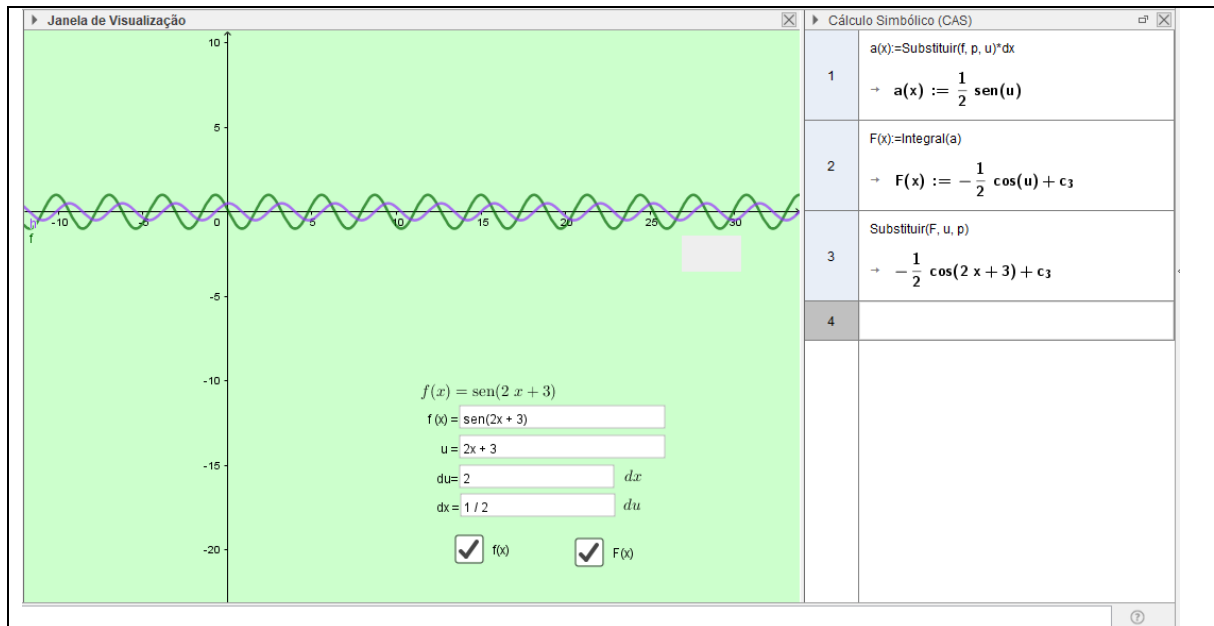
Uma sugestão para essa tarefa, é que seja explorada seguindo os encaminhamentos do *laboratório rotacional* (BACICH, TANZI NETO, TREVISANI, 2015). Assim, podem ser propostas em aula atividades para determinar a primitiva da função exponencial e, em seguida, propor a Folha de Trabalho para verificar o desempenho dos alunos.

Quadro 14 - Folha de Trabalho para Função Exponencial

Esse *applet* visa ajudar a responder as questões a seguir. Leve em conta algumas dicas que ajudarão a fazer um bom uso dele:

Na janela de visualização, é preciso primeiro inserir a função $f(x)$ no respectivo campo de entrada, assim como, escolher quem será chamado de “ u ”. Em seguida, “ du ” será calculado e, a partir de “ du ”, você deve indicar quem é “ dx ” no respectivo campo de entrada. Observe que após inserir cada expressão é necessário “*dar enter*” para que o *applet* execute a expressão inserida. Assim que forem preenchidos os campos de entrada, na janela de visualização serão exibidos os gráficos da função $f(x)$ e de sua primitiva $F(x)$, ambos os gráficos podem ser escondidos desmarcando o botão na parte inferior da janela.

Na janela Cálculo Simbólico (CAS) será exibida a primitiva da função $f(x)$ a partir de uma programação que precisa ser alterada.



QUESTÃO 1

Considerando a função $f(x) = e^{2x+1}$, altere adequadamente os campos de entrada no *applet* e responda:

- Quem deve ser o termo “ u ”, na substituição?
- Por qual expressão “ dx ” deve ser substituído?
- Qual a expressão resultante para $F(x)$?
- Se você derivar $F(x)$ o que espera obter como resultado? Justifique.

QUESTÃO 2

Considerando a função $f(x) = e^{-3x}$, altere adequadamente os campos de entrada no *applet* e responda:

- Quem deve ser o termo “ u ”, na substituição?
- Por qual expressão “ dx ” deve ser substituído?
- Qual a expressão resultante para $F(x)$?
- Calcule $f(0)$ e explique o que essa resposta indica que está ocorrendo no gráfico de $F(x)$ quando $x = 0$.

QUESTÃO 3

Antes de usar o *applet*, calcule $\int 4e^{\frac{1}{2}x} dx$ em um rascunho e, se possível, insira uma imagem de seus cálculos aqui. Depois responda com auxílio do *applet*:

- a) Quem deve ser o termo “ u ”, na substituição?
- b) Por qual expressão “ dx ” deve ser substituído?
- c) Qual a expressão resultante para $F(x)$?
- d) Se possível, insira uma imagem do *applet* com a resposta encontrada.

QUESTÃO 4

Espaço para comentários, dúvidas e sugestões sobre essa tarefa.

Fonte: Disponível em <<https://ggbm.at/kzbmp3th>>

4.4 INTEGRAL POR PARTES

Embora a integral por partes não tenha sido elaborada para a coleta e análise de dados para a dissertação (SILVA, 2019), ela foi pensada após reflexão das três atividades que foram implementadas no ambiente virtual.

Essa seção, composta por diferentes Folhas de Trabalho, apresenta apenas uma sugestão para que você, professor, possa implementar em sala de aula. A Figura 36, mostra os conceitos que podem ser discutidos inicialmente em aula, antes de propor a Folha de Trabalho.

Figura 38 - Conceitos da integração por partes

12.3. INTEGRAÇÃO POR PARTES

Suponhamos f e g definidas e deriváveis num mesmo intervalo I . Temos:

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

ou

$$f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]' - f'(x)g(x).$$

Supondo, então, que $f'(x)g(x)$ admita primitiva em I e observando que $f(x)g(x)$ é uma primitiva de $[f(x)g(x)]'$, então $f(x)g'(x)$ também admitirá primitiva em I e

$$\textcircled{1} \quad \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

que é a regra de *integração por partes*.

Fazendo $u = f(x)$ e $v = g(x)$ teremos $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)dx$, o que nos permite escrever a regra $\textcircled{1}$ na seguinte forma usual:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Suponha, agora, que se tenha que calcular $\int \alpha(x)\beta(x)dx$. Se você perceber que, multiplicando a derivada de uma das funções do integrando por uma primitiva da outra, chega-se a uma função que possui primitiva imediata, então aplique a regra de integração por partes.

Fonte: Guidorizzi (2001, p. 354)

As Folhas de Trabalho a seguir foram apenas elaboradas, ainda carecem ser aplicadas em condições reais de ensino. Dessa forma, professor, você pode escolher entre as abordagens híbridas (ver Capítulo 2, p. 10) que atendam sua realidade de ensino.

Integral por partes (u, v, du e dv)

Professor (a), no início da seção deixamos elencados os conceitos da integral por partes (ver Figura 36) como uma sugestão para ser discutido em aula.

Na tarefa apresentada a seguir, sobre os conceitos da integral por partes, na primeira questão tem por finalidade verificar as habilidades em identificar em uma função $f(x)$, quem são " u ", " du ", " v " e " dv " para a técnica de integração por partes.

Na segunda questão o aluno precisa verificar se as escolhas para primeira questão foram adequadas, para isso, deve fazer a resolução de cada item em seu caderno e enviar a imagem com as resoluções. Caso tenha dúvidas, foi recomendado um vídeo para que possa ajudar a sanar as dificuldades.

Para essa tarefa é que seja proposta em uma abordagem de *laboratório rotacional* (BACICH, TANZI NETO, TREVISANI, 2015). Em um primeiro momento podem ser discutidos e explorados os conceitos sobre a integral por partes, em seguida, propor aos estudantes que façam a resolução das questões da Folha de Trabalho como uma verificação de aprendizagem. Nesse encaminhamento, o professor verifica as resoluções enviadas e na próxima aula busca sanar as dúvidas.

Figura 39 - Folha de Trabalho para a integral por partes

Suponhamos que f e g definidas e deriváveis num mesmo intervalo I . Temos:

$$[f(x)g(x)]' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

ou

$$f(x).g'(x) = [f(x).g'(x)]' - f'(x).g(x)$$

Supondo então, que $f'(x)g(x)$ admita primitiva em I e observamos que $f(x).g(x)$ é uma primitiva de $[f(x).g(x)]'$, então $f(x).g'(x)$ também admitirá primitiva em I e

$$(1) \int f(x).g'(x)dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)dx$$

que é a regra de integração por partes.

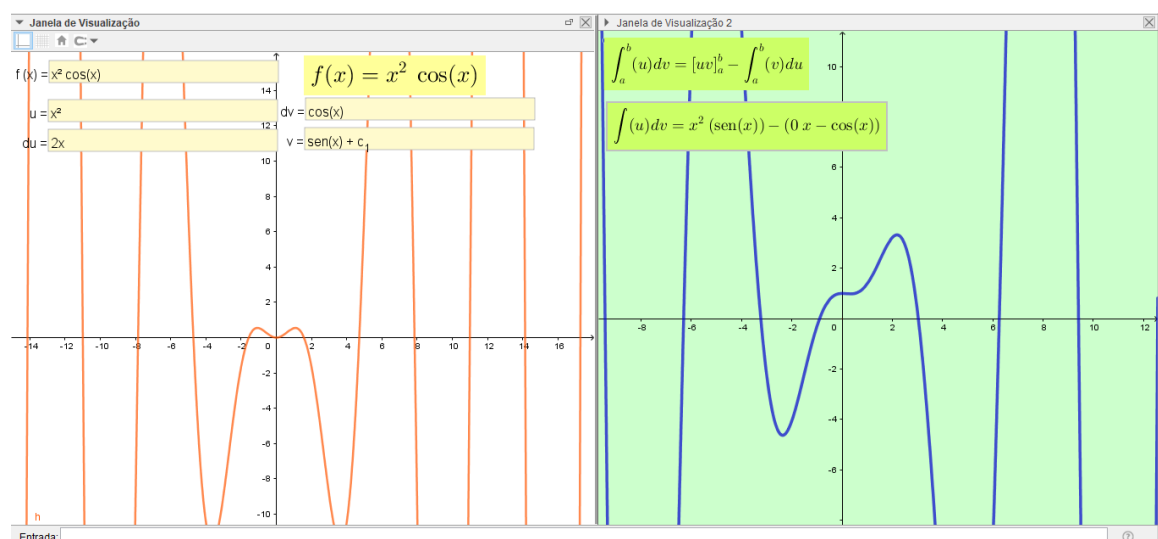
Fazendo $u = f(x)$ e $v = g(x)$ teremos $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)dx$, o que nos permite escrever a regra (1) na seguinte forma usual:

$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$$

DANDO CONTINUIDADE ...

Para explorar o *applet* a seguir é necessário inserir a função no campo de entrada " $f(x)$ ", e assim será exibido seu gráfico. Em seguida é preciso escolher e inserir nos respectivos campos de entrada quem são " u " e " dv ". Assim os outros campos de entrada, " du " e " v " serão mostrados automaticamente.

Na janela de visualização 2 serão mostrados: o resultado da integral de $f(x)$ e o gráfico para uma solução (constante de integração $C = 0$).



As questões a seguir são para verificar habilidades a identificar em uma função $f(x)$, quem são " u ", " du ", " v " e " dv " para a técnica de integração por partes. Se as escolhas forem adequadas o *applet* exibirá a solução da integral e o gráfico da função, por isso é necessária uma verificação quanto a validade do resultado.

QUESTÃO 1

Para as funções nas integrais $\int f(x) \, dx$ dos itens a seguir, quais são as escolhas para " u " e " dv " e qual o resultado obtido em cada item?

1) $\int x \cdot e^x \, dx$

$$2) \int x^2 \cdot e^{-x} dx$$

$$3) \int x \cdot \ln(x) dx$$

$$4) \int x \cdot e^{3x} dx$$

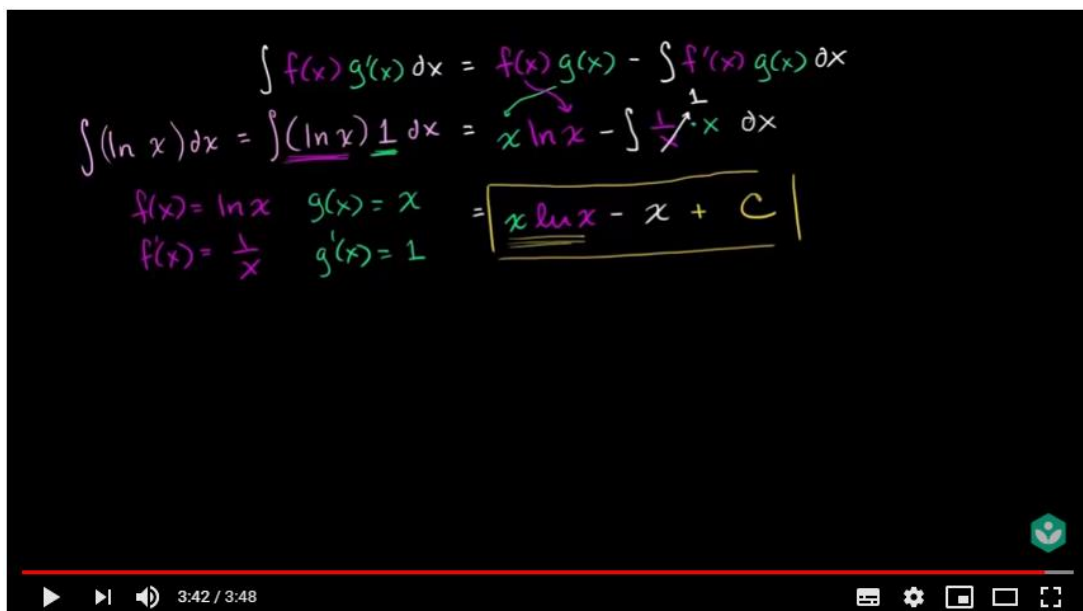
$$5) \int x^3 \cdot e^{x^2} dx$$

$$6) \int x^2 \cdot e^x dx$$

QUESTÃO 2

Usando o comando $integral(<função>)$ do GeoGebra Classic (<https://www.geogebra.org/classic>), verifique se suas escolhas para cada função da questão 1 foram adequadas, ou seja se levaram à resultados corretos. Deixe um comentário analisando seus resultados.

Este vídeo pode contribuir para a compreensão do método de integração por partes:



The image shows a handwritten derivation of the integral of $\ln(x)$ using integration by parts. The steps are as follows:

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

$$\int (\ln x) dx = \int (\ln x) \underline{1} dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx$$

Below the main derivation, the functions and their derivatives are listed:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \ln x & g(x) = x \\ f'(x) = \frac{1}{x} & g'(x) = 1 \end{array}$$

The final result is boxed:

$$= \underline{x \ln x - x + C}$$

Fonte: Disponível em <https://youtu.be/5fEV_q9MKiY>

QUESTÃO 3

Espaço para comentários, dúvidas e sugestões sobre essa tarefa.

Fonte: Disponível em <<https://ggbm.at/zvxktdxm>>

Integral por partes (u, v, du e dv) para $f(x) = x^2 \cdot \cos(x)$

Professor recomendamos que dê uma olhada nos conceitos (ver Figura 36) que deixamos como sugestão para ser discutido em aula.

Na tarefa apresentada a seguir, sobre os conceitos da integral por partes, na primeira questão serve para verificar as habilidades em identificar em uma função $f(x)$, sobre sua continuidade, bem como, quem são " u ", " du ", " v " e " dv " para a técnica de integração por partes.

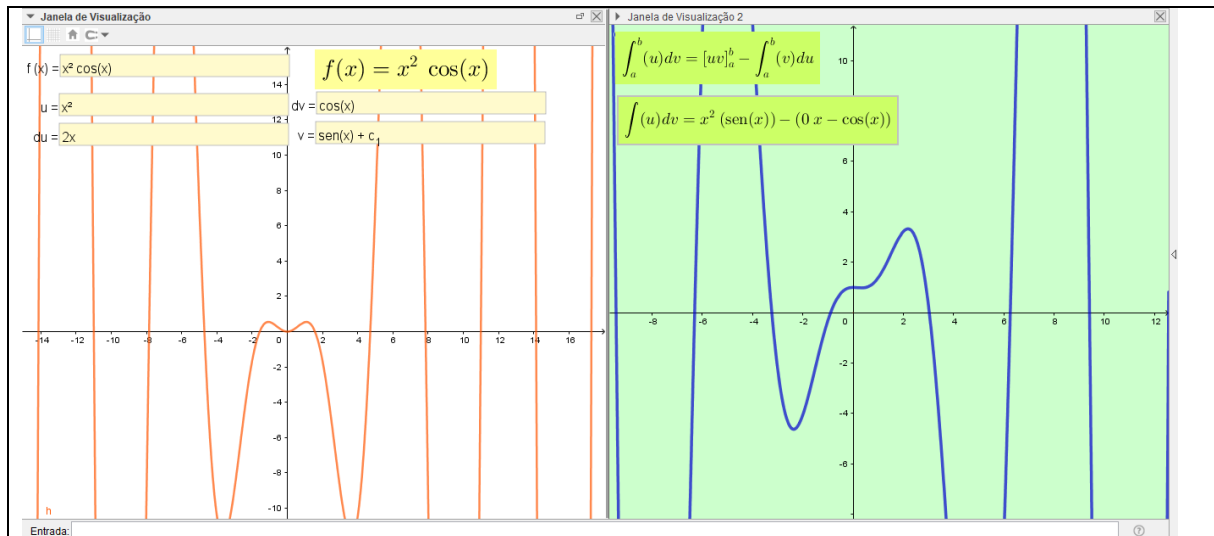
Na segunda questão o aluno precisa verificar se as escolhas para primeira questão foram adequadas, para isso, deve fazer a resolução de cada item em seu caderno e enviar a imagem com as resoluções.

Essa tarefa pode ser proposta em uma abordagem de *laboratório rotacional* (BACICH, TANZI NETO, TREVISANI, 2015). Em um primeiro momento podem ser discutidos e explorados os conceitos sobre a integral por partes, em seguida, propor aos estudantes que façam a resolução das questões da Folha de Trabalho como uma verificação de aprendizagem. Nesse encaminhamento, o professor pode analisar, individualmente, como foi o desempenho de cada estudante na compreensão dos conceitos, e dar um *feedback* no intuito de sanar as dúvidas.

Figura 40 - Folha de Trabalho para $f(x) = x^2 \cdot \cos(x)$

Serão explorados alguns conceitos de uma função $f(x)$ dada, a qual será analisada de acordo com o que se pede em cada item das questões.

Para auxiliar nos estudos, está disponível o *applet* a seguir, o qual deverá ser preenchido inicialmente nos campos de entrada, primeiro com a função $f(x)$, e em seguida, escolher quem serão respectivamente " u " e " dv ". Então, os outros campos de entrada serão automaticamente fornecidos de acordo com as escolhas feitas inicialmente (para " u " e " dv ").



QUESTÃO 1

Dada a função $f(x) = x^2 \cdot \cos(x)$, responda os itens a seguir:

- A função $f(x)$ é contínua?
- Para resolver a primitiva da função, pela integração por partes, quem devem ser “ u ” e “ dv ”?
- Qual a primitiva da função $f(x)$, a partir das escolhas do item b?
- Calculando a derivada da primitiva obtida você afirmaria que suas escolhas estão adequadas? Comente.

QUESTÃO 2

É importante que você tenha habilidades de calcular integrais por partes por si só, então, procure resolver essa integral e, se possível, anexe uma imagem com sua resolução.

QUESTÃO 3

Espaço para comentários, dúvidas e sugestões sobre essa tarefa.

Integral por partes (u, v, du e dv) para $f(x) = \ln(x)$

Professor (a), recomendamos que dê uma olhada nos conceitos (ver Figura 36) que deixamos como sugestão para ser discutido em aula.

Na tarefa apresentada a seguir, sobre os conceitos da integral por partes, na primeira questão serve para verificar as habilidade em identificar em uma função $f(x)$, quem são “u”, “du”, “v” e “dv” para a técnica de integração por partes, bem como, sua primitiva e o resultado em um dado intervalo [a,b].

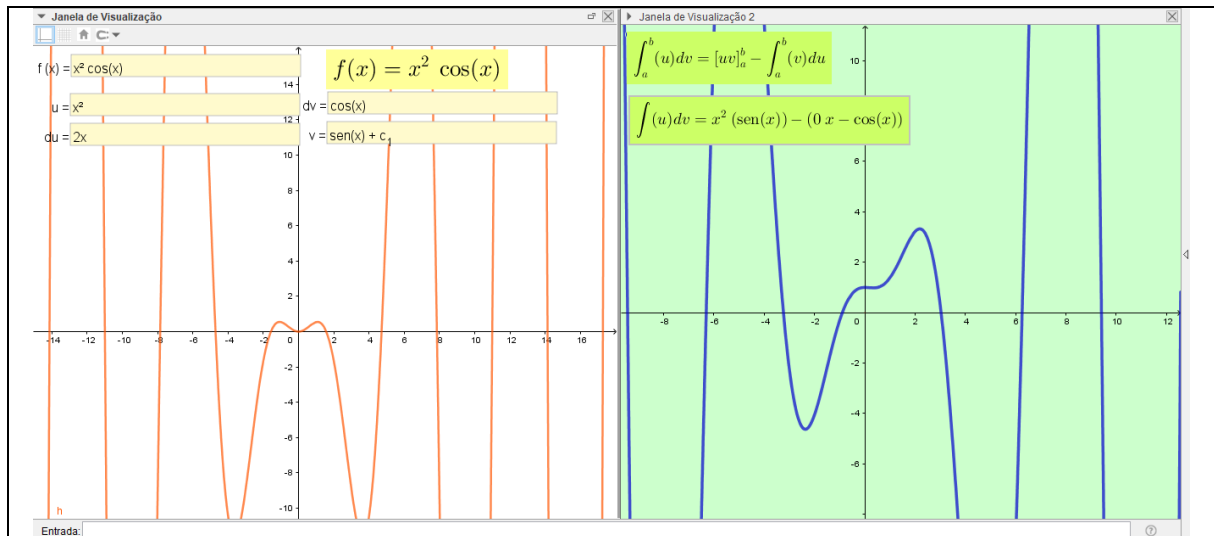
Essa tarefa pode ser explorada seguindo os encaminhamentos da *sala de aula invertida* (EDUCAUSE, 2012; BACICH, TANZI NETO, TREVISANI, 2015). Para isso deve ser disponibilizada essa Folha de Trabalho com antecedência, para que os alunos possam responder e o professor consiga verificar, por meio das resoluções, quais encaminhamentos devem ser tomados para a próxima aula, como exemplo, verificar quais dúvidas precisam ser retomadas.

Figura 41 - Folha de Trabalho para função $f(x) = \ln(x)$

Nessa tarefa será explorada a função do logaritmo natural de x , e o *applet* poderá ajudar a responder as questões.

Os campos de entrada que deverão ser preenchidos, é o da função $f(x)$, “u” e “dv”, os quais deverão ser escolhidos de acordo com a função inicial.

O gráfico da esquerda representa $f(x)$, e com “u” e “dv” escolhidos, “du” e “v” serão mostrados automaticamente. O gráfico à direita representa a primitiva de $f(x)$.

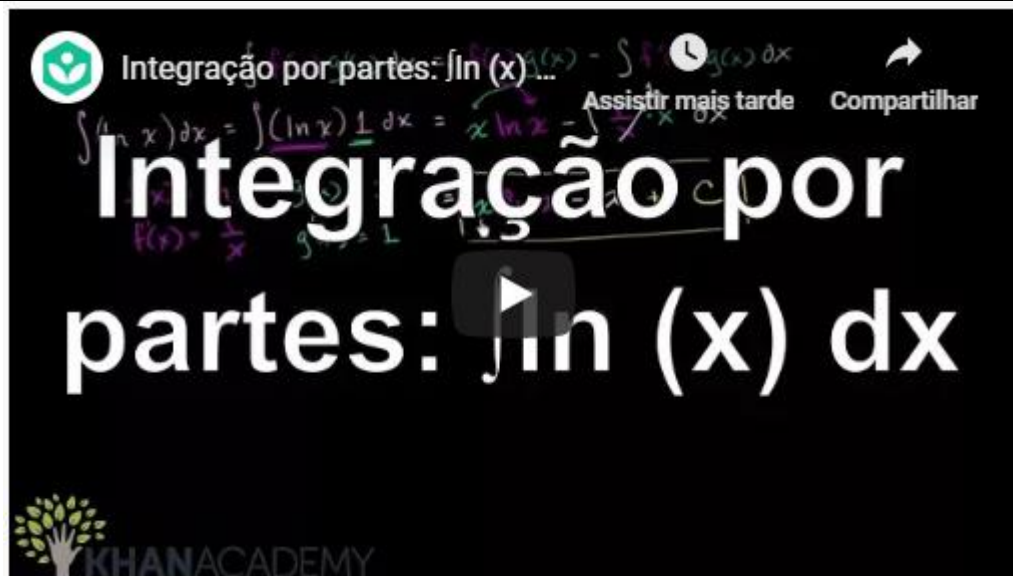


QUESTÃO 1

Dada a função $f(x) = \ln(x)$, responda os itens a seguir:

- Qual o domínio da função?
- Para calcular a primitiva, $\int \ln(x) dx$, pela integral por partes, quem você escolhe como “ u ” e “ dv ”?
- Qual a primitiva obtida para $f(x)$ a partir de suas escolhas?
- Que recurso você pode usar para verificar se a resposta obtida em c) está correta?
- Comente se é possível calcular $\int_0^1 f(x) dx$?

SUGESTÃO: Após a primeira tentativa de responder à questão 1, assista a esse vídeo para complementar seus estudos:



Fonte: Disponível em < https://youtu.be/5fEV_q9MKiY >

QUESTÃO 2

Espaço para comentários, dúvidas e sugestões sobre essa tarefa.

Fonte: Disponível em < <https://ggbm.at/nz5xegez> >

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Produto Educacional intitulado “Folhas de Trabalho no GeoGebra em uma Abordagem Híbrida para o Ensino de Integrais” busca apresentar Folhas de Trabalho, as quais foram elaboradas, planejadas e, em parte, implementadas em condições reais de ensino. Além disso procuramos, por meio deste material, orientar quanto ao uso do GeoGebra como um ambiente virtual de ensino e aprendizagem e quanto a elaboração de Folhas de Trabalho nesse ambiente.

Cada tarefa, além de ter como intuito oferecer uma alternativa para o estudo de tópicos de integral, também é o reflexo da vivência do pesquisador quanto a implementação de uma abordagem híbrida de ensino.

Nesse viés, optamos em compartilhar essas Folhas de Trabalho na plataforma do GeoGebra, para que outros educadores possam não apenas utilizar cada tarefa da forma como foi proposta nesse material, mas que possam reutilizar, fazer adaptações de acordo com sua realidade e objetivos a serem atingidos.

Esperamos que esse material possa servir a você, professor (a), como uma alternativa para implementar o uso do ambiente virtual de aprendizagem em suas aulas. E que possa propor sugestões, à medida que faça uso das Folhas de Trabalho, dando até mesmo, um *feedback* a nós sobre sua experiência. Nesse sentido disponibilizamos o endereço de e-mail: rodrigo.tavares.matematica@gmail.com para qualquer comunicação. É uma grata satisfação compartilharmos este Produto Educacional, resultado de nossa pesquisa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTON, H; BIVENS, I; DAVIS, S. **Cálculo: volume 1**. Tradução Claus Ivo Doering. – 8. ed. - Porto Alegre: Bookman, 2007.

_____. **Cálculo: volume 1**. Tradução Claus Ivo Doering. – 10. ed. - Porto Alegre: Bookman, 2014.

BACICH, L.; TANZI NETO, A.; TREVISANI, F. M. Ensino híbrido: personalização e tecnologia na educação. BACICH, TANZINETO e TREVISANI, L.; A.; F. M. (Org.). **Ensino híbrido: personalização e tecnologia na educação**. Porto Alegre: Penso, 2015.

BEZERRA, W. L. **O Uso de Ferramentas Pedagógicas para o Ensino de Cálculo de uma Variável em Cursos Semipresenciais: o caso do Instituto Federal do Ceará**. Profissionalizante em ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ, FORTALEZA Biblioteca Depositária: Matemática, 2015

BRASIL. **Ministério da Educação. Referenciais para elaboração de material didático para EaD no Ensino Profissional e Tecnológico**. 2007. Disponível em: <http://www.etecbrasil.mec.gov.br/>

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior; 2013.

Documento de área 2013. Disponível em

https://www.capes.gov.br/images/stories/download/avaliacaotrienal/Docs_de_area/Administra%C3%A7%C3%A3o_doc_area_e_comiss%C3%A3o_16out.pdf

Acessado em: 08/10/2018

CHRISTENSEN, C.; HORN, M. B.; STAKER, H. Ensino híbrido: uma inovação disruptiva. **Uma introdução à teoria dos híbridos**, 2013.

EDUCAUSE: Things you should know about flipped classrooms. 2012. Disponível em:

<http://net.educause.edu/ir/library/pdf/eli7081.pdf>

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um curso de Cálculo-Volume 1. **Rio de Janeiro. LTC–Livros Técnicos e Científicos. 5ª edição**, 2001.

HORN, M. B; STAKER, H. **Blended: usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação**. Porto Alegre: Penso, 2015.

LEMKE, R.; SIPLE, I. Z. Funções reais de duas variáveis e GeoGebra: um livro dinâmico para o Ensino de Cálculo. Dissertação (Mestrado): UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA. Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias, Joinville, 2017

LIMA, L. H. F.; MOURA, F. R. O professor no ensino híbrido. BACICH, TANZINETO e TREVISANI, L.; A.; F. M. (Orgs.). **Ensino híbrido: personalização e tecnologia na educação**. Porto Alegre: Penso, 2015.

MORAN, J. M. Educação Híbrida: um conceito-chave para a educação hoje. In: BACICH, L.; TANZI NETO, A.; TREVISANI, F. M. (Org.). **Ensino Híbrido: personalização e tecnologia na educação**. Porto Alegre: Penso, 2015.

MORELATTI, M. R. M. *Criando um ambiente construcionista de Aprendizagem em cálculo diferencial e integral I (Tese de Doutorado)* Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, SP, Brasil, 2001.

PORVIR. **Ensino Híbrido ou *Blended Learning***. 2013. Disponível em: <http://porvir.org/ensino-hibrido-ou-blended-learning/>

REZENDE, W. M. **Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica**. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

SILVA, A. P. **A modalidade EaD semipresencial e a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - Faculdade de Ciências, Bauru/SP, 2017.

SILVA, R. T. **Atividades para o estudo de integrais em um ambiente de ensino híbrido**. Dissertação (Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2019.