

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ - UTFPR  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL  
PROFMAT

MARIA CARLA FERREIRA PEREIRA TAVARES

**SUPERFÍCIES E SÓLIDOS ESFÉRICOS**

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2020

MARIA CARLA FERREIRA PEREIRA TAVARES

## **SUPERFÍCIES E SÓLIDOS ESFÉRICOS**

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná em Curitiba - PROFMAT-UTCT como requisito parcial para obtenção do grau de “Mestre”.

Orientador: Prof. Dr. Rudimar Luiz Nós

**CURITIBA**

**2020**

#### **Dados Internacionais de Catalogação na Publicação**

Tavares, Maria Carla Ferreira Pereira

Superfícies e sólidos esféricos [recurso eletrônico] / Maria Carla Ferreira Pereira Tavares. -- 2019.

1 arquivo eletrônico (128 f.) : PDF ; 5,84 MB.

Modo de acesso: World Wide Web.

Texto em português com resumo em inglês.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2019.

Bibliografia: f. 118-120.

1. Matemática - Dissertações. 2. Cavalieri, Bonaventura, 1598-1647. 3. Arquimedes, 287 A.C.-212 A.C. 4. Pappus, de Alexandria. 5. Cálculo - Estudo e ensino. 6. Geometria espacial - Estudo e ensino. 7. Abordagem interdisciplinar do conhecimento na educação. 8. GeoGebra (Software). 9. Imagem tridimensional. 10. Prática de ensino. 11. Professores de matemática - Formação. I. Nós, Rudimar Luiz, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD: Ed. 23 -- 510

**Biblioteca Central do Câmpus Curitiba - UTFPR**  
**Bibliotecária: Luiza Aquemi Matsumoto CRB-9/794**

## **TERMO DE APROVAÇÃO DE DISSERTAÇÃO Nº 72**

A Dissertação de Mestrado intitulada “Superfícies e sólidos esféricos”, defendida em sessão pública pela candidata Maria Carla Ferreira Pereira Tavares, no dia 20 de dezembro de 2019, foi julgada para a obtenção do título de Mestre, área de concentração Matemática, e aprovada em sua forma final, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

### **BANCA EXAMINADORA:**

Prof. Dr. Rudimar Luiz Nós - Presidente - UTFPR  
Prof. Dr. Carlos Eduardo Durán Fernández - UFPR  
Prof. Dr. Márcio Rostirolla Adames - UTFPR

A via original deste documento encontra-se arquivada na Secretaria do Programa, contendo a assinatura da Coordenação após a entrega da versão corrigida do trabalho.

Curitiba, 20 de dezembro de 2019.

Carimbo e Assinatura do(a) Coordenador(a) do Programa

Dedico essa nova realização aos meus familiares, sobretudo ao meu esposo Márcio e à minha filha Maria Valentina, que todos os dias ofereceram força, apoio e motivação para superar as dificuldades e persistir no sonho de fazer o mestrado. Obrigada por fazerem o possível e o impossível por mim, com todo amor do mundo.

## **AGRADECIMENTOS**

- Ao professor Rudimar Luiz Nós, que se esforçou ao máximo para transmitir seus conhecimentos e que tanta ajuda forneceu para que este trabalho fosse concluído com o êxito esperado.
- À Professora Mari Sano, pelas contribuições na demonstração do volume da esfera pelo método da exaustão através da inscrição de troncos de cone retos de bases paralelas na semiesfera.
- À CAPES, pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.
- À Sociedade Brasileira de Matemática que, na busca da melhoria do ensino de matemática na Educação Básica, viabilizou a implementação do PROFMAT.
- O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*Os únicos princípios que eu aceito, ou necessito, na Física são os da Geometria e da Matemática Pura; estes princípios explicam todos os fenômenos naturais e nos permitem fazer demonstrações bastante acertadas a respeito deles.*

René Descartes (1596-1650)

Filósofo, físico e matemático francês.

Um dos mais importantes filósofos do período moderno, geralmente lembrado pela ênfase na autoridade da razão em filosofia e ciências naturais, bem como pelo desenvolvimento de métodos de verificação.

## RESUMO

TAVARES, M. C. F. P. **Superfícies e sólidos esféricos**. 128 f. Dissertação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR. Curitiba, 2020.

Apresentamos neste trabalho estratégias para determinar as relações para o cálculo do volume da esfera e da área da superfície esférica. Algumas dessas estratégias dependem de uma noção intuitiva de limite, porém todas elas independem de noções de cálculo diferencial e integral e podem ser adaptadas pelo professor de matemática para serem usadas no Ensino Médio. Em uma das estratégias para o volume da esfera, empregamos o método da exaustão inscrevendo troncos de cone retos de bases paralelas na semiesfera. Diferentemente da literatura sobre o tema, que aborda o método da exaustão com a inscrição de cilindros na semiesfera, a metodologia que descrevemos conduz a uma série numérica finita cujo limite provamos empregando o teorema do confronto. Além disso, mencionamos aplicações do tema no cotidiano e descrevemos três atividades sobre o volume da esfera, uma delas com o GeoGebra 3D, para a sala de aula. O trabalho é interdisciplinar, associando álgebra, geometria e teoria dos números, e pode ser utilizado pelo professor de matemática na Educação Básica e também no Ensino Superior, principalmente no Curso de Licenciatura em Matemática.

**Palavras-chave:** Método da exaustão, princípio de Cavalieri, lei da alavanca de Arquimedes, teoremas de Pappus, teorema do confronto, GeoGebra 3D.

## ABSTRACT

TAVARES, M. C. F. P. **Spherical surfaces and solids**. 128 f. Dissertação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR. Curitiba, 2020.

We present in this work strategies to determine the relationships for calculating the sphere volume and the spherical surface area. Some of these strategies depend on an intuitive notion of limit, but all of them are independent of notions of differential and integral calculus and can be adapted by the mathematics teacher for use in High School. In one of the strategies for the sphere volume, we employed the method of exhaustion inscribing straight truncated cones of parallel bases into the semisphere. Unlike the literature on the subject, which deals the method of exhaustion with inscribed cylinders in the semisphere, the methodology we describe leads to a finite numerical series whose limit we prove using the squeeze theorem. In addition, we mention daily life applications of the theme and describe three activities for the classroom about sphere volume, one of them with GeoGebra 3D. The work is interdisciplinary, associating algebra, geometry and number theory, and can be used by the mathematics teacher in Basic Education and also in Higher Education, especially in Mathematics Degree Course.

**Keywords:** Method of exhaustion, Cavalieri's principle, Archimedes' law of the lever, Pappus theorems, squeeze theorem, GeoGebra 3D.

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                                                                                                |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| FIGURA 1.1 – Questão 170 da Prova Amarela do Enem 2018 - 2ª aplicação .....                                                                                    | 21 |
| FIGURA 1.2 – Questão 164 da Prova Amarela do Enem 2017 .....                                                                                                   | 22 |
| FIGURA 1.3 – Questão 180 da Prova Amarela do Enem 2017 .....                                                                                                   | 23 |
| FIGURA 1.4 – Questão 149 da Prova Amarela do Enem 2016 - 2ª aplicação .....                                                                                    | 24 |
| FIGURA 1.5 – Questão 172 da Prova Amarela do Enem 2016 .....                                                                                                   | 25 |
| FIGURA 1.6 – Questão 166 da Prova Amarela do Enem 2012 .....                                                                                                   | 26 |
| FIGURA 1.7 – Questão 168 da Prova Amarela do Enem 2010 .....                                                                                                   | 27 |
| FIGURA 1.8 – Questão 61 da Prova Amarela do Enem 2005 .....                                                                                                    | 28 |
| FIGURA 1.9 – Questão 51 da Prova Amarela do Enem 2002 .....                                                                                                    | 28 |
| FIGURA 1.10– Questão 32 da Prova Amarela do Enem 2001 .....                                                                                                    | 29 |
| FIGURA 1.11– Questão 19 da Prova Amarela do Enem 2000 - Parte 1 .....                                                                                          | 30 |
| FIGURA 1.12– Questão 19 da Prova Amarela do Enem 2000 - Parte 2 .....                                                                                          | 30 |
| FIGURA 1.13– Questão 01 do Enem 1998 .....                                                                                                                     | 31 |
| FIGURA 1.14– Questão 02 do Enem 1998 .....                                                                                                                     | 31 |
| FIGURA 1.15– Unicamp - Vestibular 2010 .....                                                                                                                   | 32 |
| FIGURA 1.16– Udesc - Vestibular 2012 .....                                                                                                                     | 34 |
| FIGURA 2.1 – Esfera de centro $O$ e raio $r$ .....                                                                                                             | 39 |
| FIGURA 2.2 – A esfera como sólido de revolução .....                                                                                                           | 39 |
| FIGURA 2.3 – Sólidos de bases equivalentes e alturas congruentes intersectados por um plano paralelo às bases que determina em ambos seções equivalentes ..... | 40 |
| FIGURA 2.4 – Anticlépsidra e um dos cones que formam a clépsidra confeccionados em aço carbono .....                                                           | 41 |
| FIGURA 2.5 – Semianticlépsidra e semiesfera equivalentes .....                                                                                                 | 42 |
| FIGURA 2.6 – Segmento $\overline{AB}$ disjunto do eixo $e$ .....                                                                                               | 43 |
| FIGURA 2.7 – Rotação da figura $S$ em torno do eixo $e$ .....                                                                                                  | 44 |
| FIGURA 2.8 – Rotação de um triângulo retângulo em torno do eixo $e$ .....                                                                                      | 45 |
| FIGURA 2.9 – Rotação de um semicírculo em torno do eixo $e$ para gerar a esfera .....                                                                          | 47 |
| FIGURA 2.10– Relação entre os volumes do cilindro, da esfera e do cone .....                                                                                   | 49 |
| FIGURA 2.11– Esfera inscrita em um cilindro equilátero .....                                                                                                   | 50 |
| FIGURA 2.12– Alavanca em equilíbrio .....                                                                                                                      | 50 |
| FIGURA 2.13– Rotação do quadrado $ACGH$ em torno do eixo $CC'$ .....                                                                                           | 51 |
| FIGURA 2.14– Relação entre o volume do cone, da esfera e do cilindro pelo princípio de equilíbrio de Arquimedes .....                                          | 53 |
| FIGURA 2.15– (a) Comparação dos raios da esfera e do cone; (b) comparação dos raios da esfera, do cone e do cilindro .....                                     | 54 |
| FIGURA 2.16– Semiesfera com cilindros retos inscritos .....                                                                                                    | 55 |
| FIGURA 2.17– Raios dos cilindros retos inscritos na semiesfera .....                                                                                           | 56 |
| FIGURA 2.18– Semiesfera com troncos de cone retos de bases paralelas inscritos .....                                                                           | 59 |
| FIGURA 2.19– Raios dos troncos de cone retos inscritos na semiesfera .....                                                                                     | 59 |
| FIGURA 2.20– Plano $\alpha$ : (a) tangente à esfera de centro $O$ e raio $r$ ; (b) secante à esfera de centro $O$ e raio $r$ .....                             | 62 |
| FIGURA 2.21– Segmento circular: (a) de uma base; (b) de duas bases .....                                                                                       | 63 |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| FIGURA 2.22– Semisegmento circular: (a) de uma base; (b) de duas bases .....                                                                                                                                                                                                                                                   | 63  |
| FIGURA 2.23– Cunha esférica .....                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 64  |
| FIGURA 2.24– Segmento esférico de duas bases de raios $r_1$ e $r_2$ e altura $h$ .....                                                                                                                                                                                                                                         | 65  |
| FIGURA 2.25– Segmentos esféricos determinados por dois planos paralelos $\alpha$ e $\beta$ secantes à esfera .....                                                                                                                                                                                                             | 65  |
| FIGURA 2.26– Volume do segmento esférico de duas bases na esfera e na anticlépsidra .....                                                                                                                                                                                                                                      | 66  |
| FIGURA 2.27– Seção na esfera da qual o segmento esférico de duas bases é uma porção .....                                                                                                                                                                                                                                      | 67  |
| FIGURA 2.28– Setor esférico .....                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 69  |
| FIGURA 2.29– Setor esférico do 1º caso .....                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 70  |
| FIGURA 2.30– Setor esférico do 2º caso .....                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 71  |
| FIGURA 2.31– Setor esférico do 3º caso .....                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 72  |
| FIGURA 2.32– Anel esférico .....                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 73  |
| FIGURA 2.33– Anel esférico do 1º caso .....                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 74  |
| FIGURA 2.34– Anel esférico do 2º caso .....                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 75  |
| FIGURA 2.35– Anel esférico do 3º caso .....                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 76  |
| FIGURA 3.1 – A superfície esférica como superfície de revolução .....                                                                                                                                                                                                                                                          | 79  |
| FIGURA 3.2 – Noção intuitiva de volume: $\mathcal{V} = \mathcal{A} \cdot x$ .....                                                                                                                                                                                                                                              | 79  |
| FIGURA 3.3 – Esferas concêntricas $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$ de raios respectivamente iguais a $r$ e $r + x$ ..                                                                                                                                                                                                         | 80  |
| FIGURA 3.4 – Esfera decomposta em pirâmides .....                                                                                                                                                                                                                                                                              | 81  |
| FIGURA 3.5 – Rotação da linha $\ell$ em torno do eixo $e$ .....                                                                                                                                                                                                                                                                | 83  |
| FIGURA 3.6 – Rotação de um segmento de reta $\overline{AB}$ em torno do eixo $e$ .....                                                                                                                                                                                                                                         | 84  |
| FIGURA 3.7 – Rotação de uma semicircunferência em torno do eixo $e$ para gerar a superfície esférica .....                                                                                                                                                                                                                     | 86  |
| FIGURA 3.8 – Rotação de um polígono regular inscrito em uma circunferência .....                                                                                                                                                                                                                                               | 87  |
| FIGURA 3.9 – Base média $b_m$ do trapézio retângulo que gera na revolução o tronco de cone reto de bases paralelas .....                                                                                                                                                                                                       | 88  |
| FIGURA 3.10– Fuso esférico .....                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 91  |
| FIGURA 3.11– Zona esférica de altura $h$ .....                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 92  |
| FIGURA 3.12– Seção em duas esferas concêntricas .....                                                                                                                                                                                                                                                                          | 93  |
| FIGURA 3.13– Calotas esféricas de alturas $h$ e $2r - h$ .....                                                                                                                                                                                                                                                                 | 94  |
| FIGURA 4.1 – Bola de futebol que armazena energia elétrica através de energia cinética .....                                                                                                                                                                                                                                   | 96  |
| FIGURA 4.2 – Componentes magnéticos internos da bola que armazena energia .....                                                                                                                                                                                                                                                | 97  |
| FIGURA 4.3 – Tanques esféricos para armazenamento de hidrogênio .....                                                                                                                                                                                                                                                          | 98  |
| FIGURA 4.4 – Globo de plasma: (a) em funcionamento; (b) reação ao toque de uma pessoa .....                                                                                                                                                                                                                                    | 99  |
| FIGURA 4.5 – Fases da Lua em agosto de 2018 .....                                                                                                                                                                                                                                                                              | 100 |
| FIGURA 4.6 – Face da Lua iluminada pelo Sol .....                                                                                                                                                                                                                                                                              | 100 |
| FIGURA 4.7 – Sistema Sol-Terra-Lua visto externamente .....                                                                                                                                                                                                                                                                    | 101 |
| FIGURA 4.8 – Relação entre o Sol, a Lua e a Terra de um ponto de vista geométrico ..                                                                                                                                                                                                                                           | 102 |
| FIGURA 4.9 – Regiões da Lua iluminadas pelo Sol: dia e noite .....                                                                                                                                                                                                                                                             | 103 |
| FIGURA 4.10– O alongamento da Lua .....                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 103 |
| FIGURA 4.11– Áreas iluminadas da Lua para diferentes valores de $A$ e de $\eta$ : (a) $0 < A < \frac{29}{2}$ e $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$ ; (b) $0 < A < \frac{29}{2}$ e $\frac{\pi}{2} < \eta < \pi$ ; (c) $A > \frac{29}{2}$ e $\pi < \eta < \frac{3\pi}{2}$ ; (d) $A > \frac{29}{2}$ e $\frac{3\pi}{2} < \eta < 2\pi$ ..... | 104 |
| FIGURA 4.12– Volume de um sólido por imersão .....                                                                                                                                                                                                                                                                             | 105 |
| FIGURA 4.13– Vídeo sobre a coroa e Arquimedes .....                                                                                                                                                                                                                                                                            | 106 |
| FIGURA 4.14– Sólidos em acrílico .....                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 106 |

|                                                                                                            |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| FIGURA 4.15– Recipiente cilíndrico com água para imersão dos sólidos .....                                 | 107 |
| FIGURA 4.16– Equilíbrio segundo a lei da alavanca de Arquimedes .....                                      | 108 |
| FIGURA 4.17– Balança de Arquimedes em equilíbrio .....                                                     | 111 |
| FIGURA 4.18– Balança de Arquimedes em desequilíbrio .....                                                  | 111 |
| FIGURA 4.19– Construção da semiesfera de raio $\overline{AB} = 3\text{ cm}$ .....                          | 112 |
| FIGURA 4.20– Construção do cilindro de altura $\overline{AB} = 3\text{ cm}$ e raio $r = 3\text{ cm}$ ..... | 112 |
| FIGURA 4.21– Construção da semianticlépsidra .....                                                         | 113 |
| FIGURA 4.22– Determinação do plano secante à semiesfera e à semianticlépsidra .....                        | 113 |
| FIGURA 4.23– Seções na semiesfera e na semianticlépsidra .....                                             | 114 |
| FIGURA 4.24– Área das seções na semiesfera e na semianticlépsidra .....                                    | 114 |
| FIGURA 4.25– Volume da semiesfera e da semianticlépsidra .....                                             | 115 |

## LISTA DE TABELAS

|                                                                                                                     |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| TABELA 1.1 – Relações de Arquimedes para o volume da esfera de raio $R$ .....                                       | 35  |
| TABELA 4.1 – Experimento 1: altura da água deslocada na imersão .....                                               | 107 |
| TABELA 4.2 – Experimento 1: razão entre os volumes do cone, do cilindro e da semi-esfera .....                      | 107 |
| TABELA 4.3 – Experimento 2: distância dos sólidos comparados em relação ao fulcro da alavanca .....                 | 109 |
| TABELA 4.4 – Experimento 2: razão entre as distâncias dos sólidos comparados em relação ao fulcro da alavanca ..... | 109 |

## LISTA DE SÍMBOLOS

|                              |                                                                               |
|------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| $\Rightarrow$                | condicional, implica, se...então                                              |
| $\neq$                       | não é igual a                                                                 |
| $\geq$                       | maior ou igual do que                                                         |
| $>$                          | maior do que                                                                  |
| $\leq$                       | menor ou igual do que                                                         |
| $<$                          | menor do que                                                                  |
| $\equiv$                     | congruente a                                                                  |
| $\sim$                       | semelhante a                                                                  |
| $\parallel$                  | paralelo a                                                                    |
| $\perp$                      | perpendicular a                                                               |
| $\overline{AB}$              | segmento de reta de extremos nos pontos A e B<br>ou o comprimento do segmento |
| $\widehat{AB}$               | arco de circunferência de extremos nos pontos A e B                           |
| $\triangle ABC$              | triângulo de vértices A, B e C                                                |
| $\mathcal{A}(\triangle ABC)$ | área do triângulo ABC                                                         |
| $\mathcal{V}(ABCD)$          | volume do sólido ABCD                                                         |
| $a : b$                      | razão entre os números reais a e b                                            |

## SUMÁRIO

|          |                                                       |           |
|----------|-------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO</b>                                     | <b>17</b> |
| 1.1      | JUSTIFICATIVA PARA A ESCOLHA DO TEMA                  | 17        |
| 1.1.1    | Questões do ENEM e de vestibulares                    | 21        |
| 1.2      | OBJETIVOS                                             | 36        |
| 1.2.1    | Objetivo geral                                        | 36        |
| 1.2.2    | Objetivos específicos                                 | 36        |
| 1.3      | PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS                           | 36        |
| 1.4      | ESTRUTURA DO TRABALHO                                 | 37        |
| <b>2</b> | <b>SÓLIDOS ESFÉRICOS</b>                              | <b>38</b> |
| 2.1      | DEFINIÇÕES                                            | 38        |
| 2.2      | VOLUME DA ESFERA                                      | 38        |
| 2.2.1    | Princípio de Cavalieri                                | 39        |
| 2.2.2    | Aplicação do segundo teorema de Pappus                | 43        |
| 2.2.3    | O segundo teorema de Arquimedes                       | 49        |
| 2.2.4    | Inscrição de cilindros                                | 55        |
| 2.2.5    | Inscrição de troncos de cone retos de bases paralelas | 58        |
| 2.3      | PRINCIPAIS PORÇÕES DA ESFERA                          | 62        |
| 2.3.1    | Cunha esférica                                        | 64        |
| 2.3.2    | Segmento esférico                                     | 64        |
| 2.3.3    | Setor esférico                                        | 69        |
| 2.3.4    | Anel esférico                                         | 73        |
| <b>3</b> | <b>SUPERFÍCIES ESFÉRICAS</b>                          | <b>78</b> |
| 3.1      | DEFINIÇÕES                                            | 78        |
| 3.2      | ÁREA DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA                           | 78        |
| 3.2.1    | Esferas circunscritas                                 | 79        |
| 3.2.2    | Decomposição em pirâmides                             | 81        |
| 3.2.3    | Aplicação do primeiro teorema de Pappus               | 82        |
| 3.2.4    | Área lateral do tronco de cone                        | 87        |
| 3.3      | PRINCIPAIS PORÇÕES DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA             | 90        |
| 3.3.1    | Fuso Esférico                                         | 91        |
| 3.3.2    | Zona esférica                                         | 91        |
| 3.3.3    | Calota Esférica                                       | 94        |
| <b>4</b> | <b>APLICAÇÕES E ATIVIDADES PARA A SALA DE AULA</b>    | <b>96</b> |
| 4.1      | APLICAÇÕES DA ESFERA                                  | 96        |
| 4.1.1    | A bola de futebol que gera energia elétrica           | 96        |
| 4.1.2    | Tanques de armazenamento de gás                       | 97        |
| 4.1.3    | Globo de plasma                                       | 98        |
| 4.1.4    | As fases da Lua                                       | 99        |
| 4.2      | ATIVIDADES SOBRE O VOLUME DA ESFERA                   | 105       |
| 4.2.1    | Experimento com o princípio do empuxo de Arquimedes   | 105       |
| 4.2.1.1  | Etapas do experimento                                 | 106       |

|          |                                                                                    |            |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.2.2    | Experimento com o princípio de equilíbrio de Arquimedes .....                      | 108        |
| 4.2.2.1  | Etapas do experimento .....                                                        | 109        |
| 4.2.3    | Animação sobre o princípio de Cavalieri no GeoGebra 3D .....                       | 110        |
| 4.2.3.1  | Etapas da construção da animação .....                                             | 111        |
| <b>5</b> | <b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>                                                  | <b>116</b> |
|          | <b>REFERÊNCIAS .....</b>                                                           | <b>118</b> |
|          | <b>Apêndice A – SOMA DOS QUADRADOS NOS <math>N</math> PRIMEIROS NÚMEROS INTEI-</b> |            |
|          | <b>ROS POSITIVOS .....</b>                                                         | <b>121</b> |
| A.1      | PROVA COM O CUBO DA SOMA DE DOIS TERMOS .....                                      | 121        |
| A.2      | PROVA POR INDUÇÃO FINITA .....                                                     | 122        |
|          | <b>Apêndice B – SÉRIE PARA O VOLUME DA ESFERA POR INTERMÉDIO DA INS-</b>           |            |
|          | <b>CRICÃO DE TRONCOS DE CONE RETOS DE BASES PARALELAS .....</b>                    | <b>124</b> |
| B.1      | SOMA COMPUTACIONAL .....                                                           | 124        |
| B.2      | TEOREMA DO CONFRONTO .....                                                         | 125        |

## 1 INTRODUÇÃO

### 1.1 JUSTIFICATIVA PARA A ESCOLHA DO TEMA

Nas últimas décadas, as reformas educacionais propostas para o ensino de matemática na Educação Básica evidenciam a importância do ensino de geometria plana e geometria espacial. O objetivo principal é permitir que o educando amplie a sua visão de mundo, bem como identifique as diversas aplicações matemáticas vivenciadas no dia-a-dia. Nesse sentido, ao abordar o ensino de geometria Euclidiana no Ensino Médio é importante investigar o seu papel na evolução humana, assim como a sua ligação com a própria matemática.

Historicamente, sabemos que a matemática teve sua origem nas grandes civilizações (Mesopotâmia, Babilônia, Egito e Grécia), através dos registros de configurações físicas e geométricas, da comparação das formas, tamanhos e quantidades. Entretanto, a matemática formal emergiu somente no século VI a.C., quando os gregos estabeleceram regras, princípios lógicos e exatidão de resultados para o conhecimento desenvolvido. Com os pitagóricos surgiram as discussões sobre o papel da matemática e, com os platônicos, a ideia de que a ela instigava o pensamento humano.

Entre os séculos IV e II a.C. foi criada no Egito a Biblioteca de Alexandria, reconhecida como um dos maiores centros de saber da antiguidade. Grandes sábios pertenceram a esta instituição, dentre eles Euclides, considerado o “Pai da Geometria”. Além de sua principal obra denominada “Os Elementos”, onde estabelece o quinto postulado ou postulado das paralelas, motivador do surgimento das geometrias não Euclidianas, Euclides também escreveu sobre perspectivas, secções cônicas, geometria esférica, teoria dos números e rigor. Segundo Dolce e Pompeo (2011, p. 266):

Na verdade Euclides trabalhava, em sua geometria, como em particular no postulado V, com segmentos de reta que prolongava num ou noutro sentido, conforme necessitasse, ao invés de retas infinitas acabadas, como se faz hoje. E o que esse postulado afirma equivale, na versão moderna da geometria Euclidiana, a admitir que por um ponto fora de uma reta não há mais que uma paralela à reta. Entre as importantes implicações deste postulado temos o teorema que assegura que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a

um ângulo raso.

A geometria Euclidiana é usada para o estudo de superfícies planas, funcionando de forma muito eficaz para este fim. No entanto, quando temos uma superfície curva, essa geometria não é totalmente satisfatória, mas constitui a geometria trabalhada ao longo de toda a Educação Básica.

A partir do século XV d.C., o avanço das navegações e a intensificação das atividades comerciais possibilitaram novas descobertas na matemática, culminando com a sistematização de grandezas variáveis no século XVI. Tais descobertas contribuíram para uma fase de grande avanço científico e econômico da sociedade. Já no século XVII, surge a concepção de função e do cálculo infinitesimal, constituindo as bases da matemática como conhecemos hoje.

Por fim, no século XIX, surge o período das matemáticas contemporâneas com a reconsideração crítica do sistema de axiomas, dos métodos lógicos e demonstrações matemáticas. Por volta de 1820, Carl Friedrich Gauss (1777-1855), na tentativa de entender a geometria de superfícies curvas, verificou a necessidade de uma geometria distinta da Euclidiana. Contudo, nunca publicou suas ideias. Em 1829, o matemático Nicolai Lobachevsky (1792-1856) publicou seu trabalho sobre uma nova geometria, considerado o marco do nascimento oficial das geometrias não Euclidianas.

E embora os estudos sobre geometrias não Euclidianas tenham se mostrado de forma mais efetiva na solução de questões envolvendo superfícies esféricas, a necessidade de conhecimentos mais complexos, como o uso de cálculo infinitesimal, fez com que a abordagem inicial dessas questões envolvendo superfícies esféricas permanecesse dentro do arcabouço de conhecimento da geometria Euclidiana.

Considerando esse contexto histórico, a Secretaria Estadual de Educação do Estado do Paraná (SEED) estruturou as Diretrizes Curriculares da Educação Básica em Matemática do Estado do Paraná (SEED, 2008), as quais fundamentam o ensino de matemática no estado atualmente. O documento, apoiado pelas Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN's) (MEC, 2013), reitera, nas páginas 38 e 48, respectivamente, esse contexto:

[...] é necessário compreender a Matemática desde suas origens até sua constituição como campo científico e como disciplina no currículo escolar brasileiro, para ampliar a discussão acerca dessas duas dimensões.

[...] assume-se a Educação Matemática como campo de estudos que possibilita ao professor balizar sua ação docente, fundamentado numa ação crítica que conceba a Matemática como atividade humana em construção.

As DCN's, que serviram de base para as Diretrizes Curriculares da Educação Básica em Matemática do Estado do Paraná, são normas obrigatórias para a Educação Básica que

orientam as escolas em seus planejamentos curriculares e em seus sistemas de ensino. Essas diretrizes foram discutidas e concebidas pelo Conselho Nacional de Educação (CNE) e detalham condutas curriculares para cada uma das modalidades da Educação Básica: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio.

As Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM's) têm origem na Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) (BRASIL, 1996), que assinala, no artigo 9º, inciso IV, ser incumbência da União:

estabelecer, em colaboração com os Estados, Distrito Federal e os Municípios, competências e diretrizes para a Educação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio, que nortearão os currículos e os seus conteúdos mínimos, de modo a assegurar a formação básica comum.

A partir das DCN's e das discussões com professores da Rede Pública Estadual de Ensino, o Estado do Paraná formalizou em documento único as Diretrizes Curriculares da Educação Básica em Matemática, que definem os Conteúdos Estruturantes da disciplina, ou seja, os conceitos mais amplos que identificam e organizam os objetos de estudo da disciplina matemática. Os Conteúdos Estruturantes propostos nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica em Matemática do Estado do Paraná são: Números e Álgebra; Grandezas e Medidas; Geometrias; Funções; Tratamento da Informação. Para o Ensino Médio, o Conteúdo Estruturante Geometrias se desdobra nos seguintes conteúdos: Geometria Plana; Geometria Espacial; Geometria Analítica; Noções básicas de geometrias não Euclidianas.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (MEC, 2018) por sua vez tem a finalidade de regulamentar os conteúdos e competências a serem trabalhados nas escolas públicas e particulares dos diversos níveis de aprendizagem. É um documento que objetiva padronizar os conteúdos no sistema educacional, além de promover uma formação integral, democrática e inclusiva, nortear os currículos dos Estados e Municípios e colocando em ação o que está previsto no artigo 9º da LDB:

IV - estabelecer, em colaboração com os Estados, o Distrito Federal e os Municípios, competências e diretrizes para a Educação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio, que nortearão os currículos e seus conteúdos mínimos, de modo a assegurar formação básica comum.

A BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio prevê a ampliação e aprofundamento dos conceitos desenvolvidos ao longo do Ensino Fundamental, permitindo assim uma visão integral da matemática. A BNCC de matemática para o Ensino Fundamental está fundamentada em cinco unidades temáticas, caracterizadas por habilidades. São elas:

- Números;
- Álgebra;
- Geometria;
- Grandezas e Medidas;
- Probabilidade e Estatística.

A BNCC de matemática para o Ensino Fundamental ainda propõe o uso de tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, entre outras ferramentas, estimulando o desenvolvimento do pensamento computacional. Já para o Ensino Médio, o objetivo é construir uma visão integrada da matemática, aplicando-a à realidade e levando-se em consideração as vivências dos estudantes e suas condições socioeconômicas.

Para que os objetivos propostos pela BNCC sejam alcançados é necessário que os estudantes desenvolvam habilidades de raciocínio, representação, argumentação e comunicação. Tais habilidades foram organizadas de maneira articulada no Ensino Fundamental a partir de uma organização em unidades de conhecimento. No Ensino Médio, esta articulação é ainda mais consistente, pois nesta etapa as cinco unidades de conhecimento são vinculadas, de forma a se complementarem, através das seguintes ideias fundamentais:

- Variância e constância;
- Certeza e incerteza;
- Movimento e posição;
- Relações e interrelações.

A partir das habilidades propostas, objetiva-se que o estudante do Ensino Médio aprenda a matemática de modo mais eficaz, percebendo que ela não é simplesmente um conjunto de regras e técnicas, mas que pode contribuir de forma efetiva para a constante evolução da sociedade e da construção da sua história.

A BNCC de matemática para o Ensino Fundamental enfatiza o desenvolvimento de competências através de cinco unidades temáticas correlacionadas, sendo a Geometria uma delas. Para o Ensino Médio, o objetivo é ainda mais amplo, pois busca-se a construção de uma visão integrada da disciplina com a realidade. Além disso, propõe o uso de ferramentas tecnológicas como programas computacionais de geometria dinâmica.

Como podemos verificar, a geometria é um conteúdo presente em todos os documentos que orientam o planejamento e desenvolvimento da matemática nos vários níveis educacionais, sendo aplicada tanto de forma direta quanto transversal, de forma a contribuir para que o estudante desenvolva uma visão espacial. Além disso, é base de conhecimento para outras áreas da ciência e tecnologia, como por exemplo, a física e as engenharias, reforçando seu caráter multidisciplinar e fortemente significativo no processo educacional.

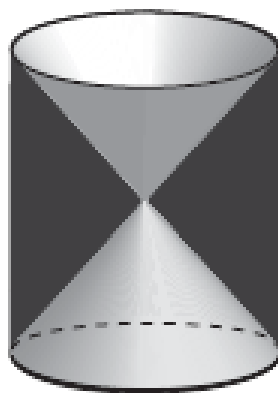
Seguindo este raciocínio, podemos ainda constatar a importância dada ao ensino de geometria na Educação Básica antes mesmo de sua inserção na BNCC da área de matemática. Tal importância é evidenciada pela quantidade significativa de questões de geometria plana e de geometria espacial presentes no Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM.

Assim, devido à importância da geometria, escolhemos um tema de geometria espacial, a área da superfície esférica e o volume da esfera, para desenvolver este trabalho. Começamos selecionando questões do ENEM (INEP, 2019) e de vestibulares (ITA, 2019) (UDESC, 2019) (COMVEST, 2019) que abordam o tema, enfatizando na escolha questões aplicadas que reforçam o caráter multidisciplinar do mesmo.

### 1.1.1 QUESTÕES DO ENEM E DE VESTIBULARES

1. **Enem 2018 - 2ª aplicação** A figura mostra uma anticlépsidra, que é um sólido geométrico obtido ao se retirar dois cones opostos pelos vértices de um cilindro equilátero, cujas bases coincidem com as bases desse sólido. A anticlépsidra pode ser considerada, também, como o sólido resultante da rotação de uma figura plana em torno de um eixo.

**Figura 1.1:** Questão 170 da Prova Amarela do Enem 2018 - 2ª aplicação

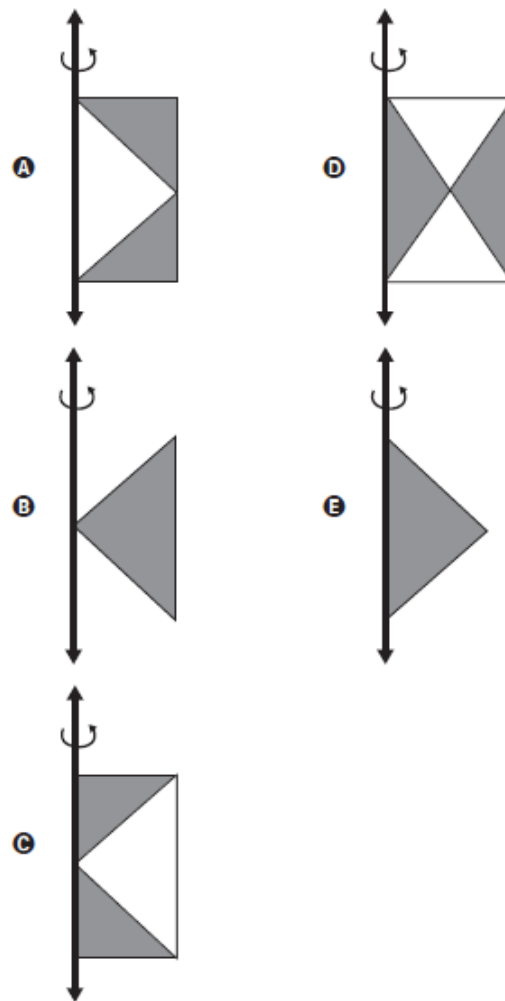


Disponível em: [www.klickeducacao.com.br](http://www.klickeducacao.com.br). Acesso em: 12 dez. 2012 (adaptado).

Fonte: Inep (2019).

A figura plana cuja rotação em torno do eixo indicado gera uma anticlépsidra como a da

figura acima é



2. **Enem 2017** Uma pessoa ganhou uma pulseira formada por pérolas esféricas, na qual faltava uma das pérolas. A figura indica a posição em que estaria faltando esta pérola.

**Figura 1.2:** Questão 164 da Prova Amarela do Enem 2017



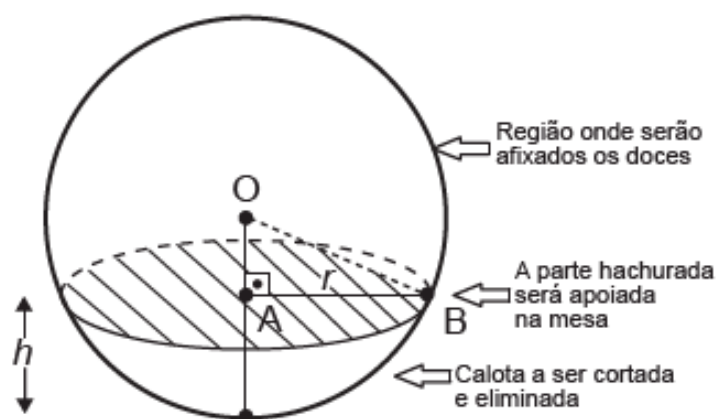
Fonte: Inep (2019).

Ela levou a joia a um joalheiro que verificou que a medida do diâmetro dessas pérolas era 4 milímetros. Em seu estoque, as pérolas do mesmo tipo e formato, disponíveis para reposição, tinham diâmetros iguais a:  $4,025mm$ ;  $4,100mm$ ;  $3,970mm$ ;  $4,080mm$  e  $3,099mm$ . O joalheiro então colocou na pulseira a pérola cujo diâmetro era o mais próximo do diâmetro das pérolas originais. A pérola colocada na pulseira pelo joalheiro tem diâmetro, em milímetros, igual a

- A 3,099.
- B 3,970.
- C 4,025.
- D 4,080.
- E 4,100.

3. **Enem 2017** Para decorar uma mesa de festa infantil, um chefe de cozinha usará um melão esférico com diâmetro medindo  $10\text{ cm}$ , o qual servirá de suporte para espetar diversos doces. Ele irá retirar uma calota esférica do melão, conforme ilustra a figura, e, para garantir a estabilidade deste suporte, dificultando que o melão role sobre a mesa, o chefe fará o corte de modo que o raio  $r$  da seção circular de corte seja de pelo menos  $3\text{ cm}$ . Por outro lado, o chefe desejará dispor da maior área possível da região em que serão afixados os doces.

**Figura 1.3:** Questão 180 da Prova Amarela do Enem 2017



Fonte: Inep (2019).

Para atingir todos os seus objetivos, o chefe deverá cortar a calota do melão numa altura  $h$ , em centímetros, igual a

- A  $5 - \frac{\sqrt{91}}{2}$ .

B  $10 - \sqrt{91}$ .

C 1.

D 4.

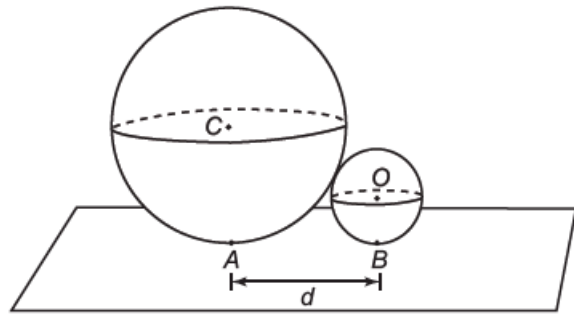
E 5.

4. **Enem 2016 - 2ª aplicação** A bocha é um esporte jogado em canchas, que são terrenos planos e nivelados, limitados por tablados perimétricos de madeira. O objetivo desse esporte é lançar bochas, que são bolas feitas de um material sintético, de maneira a situá-las o mais perto possível do bolim, que é uma bola menor feita, preferencialmente, de aço, previamente lançada. A Figura 1 ilustra uma bocha e um bolim que foram jogados em uma cancha. Suponha que um jogador tenha lançado uma bocha, de raio  $5\text{ cm}$ , que tenha ficado encostada no bolim, de raio  $2\text{ cm}$ , conforme ilustra a Figura 2.

**Figura 1.4:** Questão 149 da Prova Amarela do Enem 2016 - 2ª aplicação



**Figura 1**



**Figura 2**

Fonte: Inep (2019).

Considere o ponto  $C$  como o centro da bocha, e o ponto  $O$  como centro do bolim. Sabe-se que  $A$  e  $B$  são os pontos em que a bocha e o bolim, respectivamente, tocam o chão da cancha, e que a distância entre  $A$  e  $B$  é igual a  $d$ . Nessas condições, qual é a razão entre  $d$  e o raio do bolim?

A 1

B  $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

C  $\frac{\sqrt{10}}{2}$

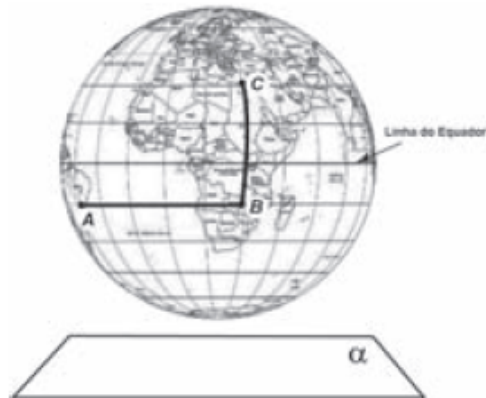
D 2

E  $\sqrt{10}$

5. **Enem 2016** A figura representa o globo terrestre e nela estão marcados os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Os pontos  $A$  e  $B$  estão localizados sobre um mesmo paralelo, e os pontos  $B$  e  $C$ , sobre

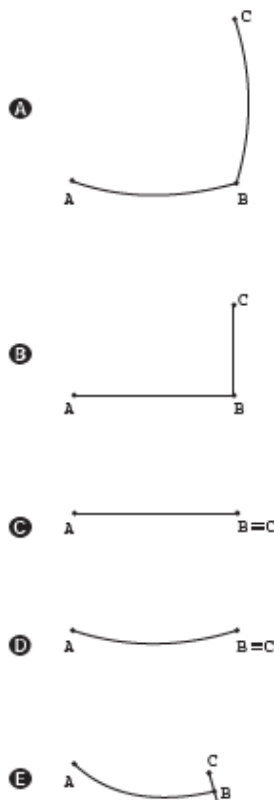
um mesmo meridiano. É traçado um caminho do ponto  $A$  até  $C$ , pela superfície do globo, passando por  $B$ , de forma que o trecho de  $A$  até  $B$  se dê sobre o paralelo que passa por  $A$  e  $B$  e, o trecho de  $B$  até  $C$  se dê sobre o meridiano que passa por  $B$  e  $C$ . Considere que o plano  $\alpha$  é paralelo à linha do equador na figura.

**Figura 1.5:** Questão 172 da Prova Amarela do Enem 2016



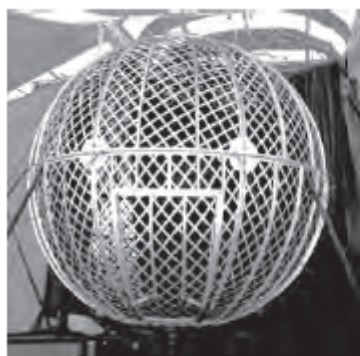
Fonte: Inep (2019).

A projeção ortogonal, no plano  $\alpha$ , do caminho traçado no globo pode ser representada por

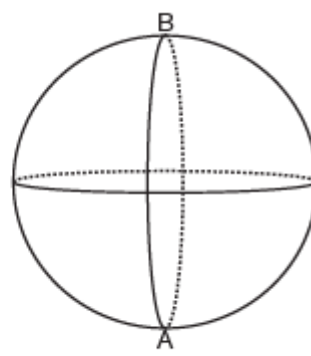


6. **Enem 2014** Uma empresa farmacêutica produz medicamentos em pílulas, cada uma na forma de um cilindro com um semiesfera com o mesmo raio do cilindro em cada uma de suas extremidades. Essas pílulas são moldadas por uma máquina programada para que os cilindros tenham sempre  $10\text{ mm}$  de comprimento, adequando o raio de acordo com o volume desejado. Um medicamento é produzido em pílulas com  $5\text{ mm}$  de raio. Para facilitar a deglutição, deseja-se produzir esse medicamento diminuindo o raio para  $4\text{ mm}$ , e, por consequência, seu volume. Isso exige a reprogramação da máquina que produz essas pílulas. Use 3 como valor aproximado para  $\pi$ . A redução do volume da pílula, em milímetros cúbicos, após a reprogramação da máquina, será igual a:
- A 1,33.  
B 6,00.  
C 12,00.  
D 56,52.  
E 113,04.
7. **Enem 2012** O globo da morte é uma atração muito usada em circos. Ele consiste em uma espécie de jaula em forma de uma superfície esférica feita de aço, onde motoqueiros andam com suas motos por dentro. A seguir, tem-se, na Figura 1, uma foto de um globo da morte e, na Figura 2, uma esfera que ilustra um globo da morte.

**Figura 1.6:** Questão 166 da Prova Amarela do Enem 2012



**Figura 1**

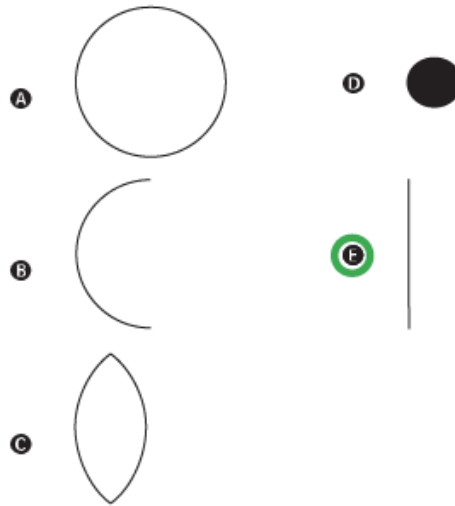


**Figura 2**

Fonte: Inep (2019).

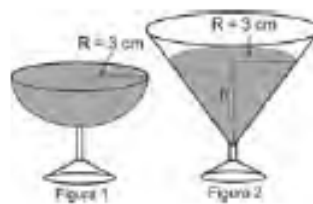
Na Figura 2, o ponto A está no plano do chão onde está colocado o globo da morte e o segmento  $AB$  passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao plano do chão. Suponha que há um foco de luz direcionado para o chão colocado no ponto B e que um motoqueiro faça um trajeto dentro da esfera, percorrendo uma circunferência que passa pelos pontos

$A$  e  $B$ . A imagem do trajeto feito pelo motoqueiro no plano do chão é melhor representada por:



8. **Enem 2010** Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes. Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.

**Figura 1.7:** Questão 168 da Prova Amarela do Enem 2010



Fonte: Inep (2019).

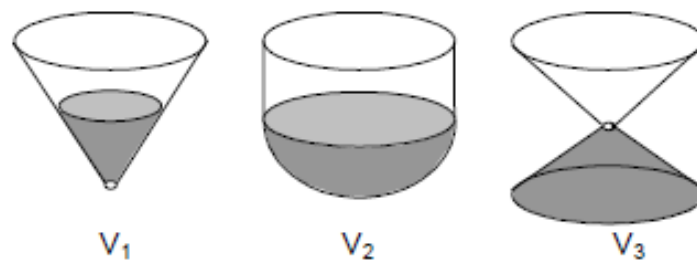
Considere:  $V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi R^3$  e  $V_{\text{cone}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ . Sabendo que a taça com o formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de:

- A 1,33.
- B 6,00.
- C 12,00.
- D 56,52.

E 113,04.

9. **Enem 2005** Os três recipientes da figura têm formas diferentes, mas a mesma altura e o mesmo diâmetro da boca. Um líquido é colocado nesses recipientes até a metade de sua altura, conforme indicado nas figuras. Representando por  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$  o volume de líquido em cada um dos recipientes, tem-se

**Figura 1.8:** Questão 61 da Prova Amarela do Enem 2005



Fonte: Inep (2019).

- (A)  $V_1 = V_2 = V_3$ .  
 (B)  $V_1 < V_3 < V_2$ .  
 (C)  $V_1 = V_3 < V_2$ .  
 (D)  $V_3 < V_1 < V_2$ .  
 (E)  $V_1 < V_2 = V_3$ .
10. **Enem 2002** Um grupo de pescadores pretende passar um final de semana do mês de setembro, embarcado, pescando em um rio. Uma das exigências do grupo é que, no final de semana a ser escolhido, as noites estejam iluminadas pela lua o maior tempo possível. A figura representa as fases da lua no período proposto.

**Figura 1.9:** Questão 51 da Prova Amarela do Enem 2002



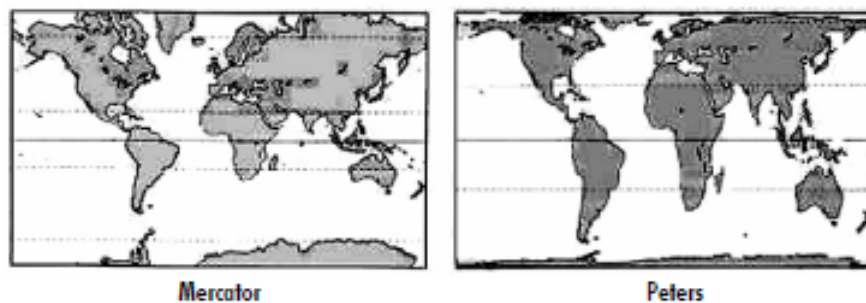
Fonte: Inep (2019).

Considerando-se as características de cada uma das fases da lua e o comportamento desta no período delimitado, pode-se afirmar que, dentre os fins de semana, o que melhor atenderia às exigências dos pescadores corresponde aos dias

- (A) 08 e 09 de setembro.
- (B) 15 e 16 de setembro.
- (C) 22 e 23 de setembro.
- (D) 29 e 30 de setembro.
- (E) 06 e 07 de outubro.

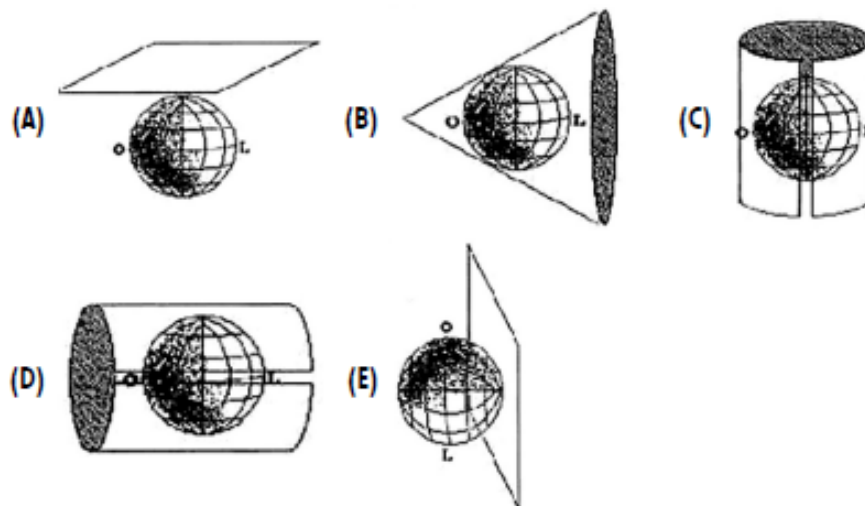
11. **Enem 2001** Existem diferentes formas de representação plana da superfície da Terra (planisfério). Os planisférios de Mercator e de Peters são atualmente os mais utilizados.

**Figura 1.10:** Questão 32 da Prova Amarela do Enem 2001



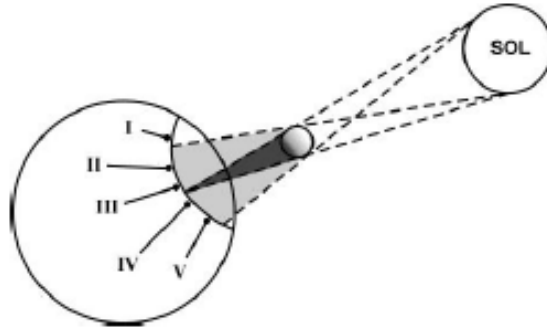
Fonte: Inep (2019).

Apesar de usarem projeções, respectivamente, conforme e equivalente, ambos utilizam como base da projeção o modelo:



12. **Enem 2001** A figura abaixo mostra um eclipse solar no instante em que é fotografado em cinco diferentes pontos do planeta.

**Figura 1.11:** Questão 19 da Prova Amarela do Enem 2000 - Parte 1



Fonte: Inep (2019).

Três dessas fotografias estão reproduzidas abaixo.

**Figura 1.12:** Questão 19 da Prova Amarela do Enem 2000 - Parte 2

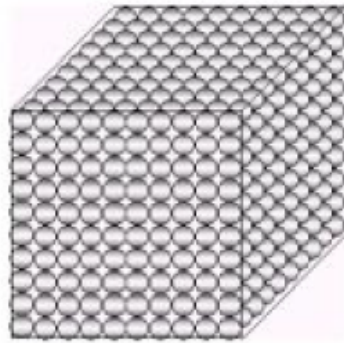


Fonte: Inep (2019).

As fotos poderiam corresponder, respectivamente, aos pontos

- (A) III, V e II.
  - (B) II, III e V.
  - (C) II, IV e III.
  - (D) I, II, e III.
  - (E) I, II e V.
13. **Enem 1998** Observe nas questões 1 e 2 o que foi feito para colocar bolinhas de gude de 1 cm de diâmetro numa caixa cúbica com 10 cm de aresta.
- 01 Uma pessoa arrumou as bolinhas em camadas superpostas iguais, como na figura, tendo assim empregado:

**Figura 1.13:** Questão 01 do Enem 1998

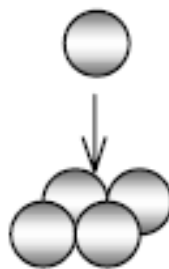


Fonte: Inep (2019).

- (A) 100 bolinhas.
- (B) 300 bolinhas.
- (C) 1000 bolinhas.
- (D) 2000 bolinhas.
- (E) 10000 bolinhas.

- 02 Uma segunda pessoa procurou encontrar outra maneira de arrumar as bolas na caixa achando que seria uma boa ideia organizá-las em camadas alternadas, onde cada bolinha de uma camada se apoiaria em 4 bolinhas da camada inferior, como mostra a figura.

**Figura 1.14:** Questão 02 do Enem 1998



Fonte: Inep (2019).

Deste modo, ela conseguiu fazer 12 camadas. Portanto, ela conseguiu colocar na caixa:

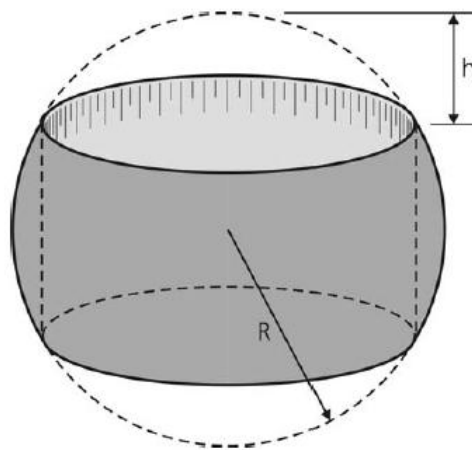
- (A) 729 bolinhas.
- (B) 984 bolinhas.
- (C) 1000 bolinhas.

(D) 1086 bolinhas.

(E) 1200 bolinhas.

14. **Unicamp 2010** Uma peça esférica de madeira foi escavada, adquirindo o formato de anel, como mostra a figura abaixo. Observe que, na escavação, retirou-se um cilindro de madeira com duas tampas em formato de calota esférica. Sabe-se que uma calota esférica tem volume  $V_{\text{cal}} = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$ , em que  $h$  é a altura da calota e  $R$  é o raio da esfera. Além disso, a área da superfície da calota esférica (excluindo a porção plana da base) é dada por  $A_{\text{cal}} = 2\pi Rh$ .

**Figura 1.15:** Unicamp - Vestibular 2010



Fonte: Comvest (2019).

Atenção: não use um valor aproximado de  $\pi$ .

a) Supondo que  $h = \frac{R}{2}$ , determine o volume do anel de madeira, em função de  $R$ .

b) Depois de escavada, a peça de madeira receberá uma camada de verniz, tanto na parte externa, como na interna. Supondo, novamente, que  $h = \frac{R}{2}$ , determine a área sobre a qual o verniz será aplicado.

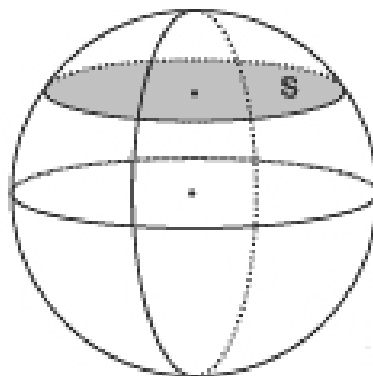
15. **ITA 2019 - 2ª fase** Um cone circular reto, de altura  $h$ , e um cilindro circular reto têm bases de mesmo raio. O volume do cone é metade do volume do cilindro, e a área lateral do cone é igual à área lateral do cilindro. Determine, em função de  $h$ , o raio da esfera inscrita no cone.
16. **ITA 2016** Uma esfera  $S_1$ , de raio  $R > 0$ , está inscrita num cone circular reto  $K$ . Outra esfera,  $S_2$ , de raio  $r$ , com  $0 < r < R$ , está contida no interior de  $K$  e é simultaneamente tangente à esfera  $S_1$  e à superfície lateral de  $K$ . O volume de  $K$  é igual a:

- (a)  $\frac{\pi R^5}{3r(R-r)}.$
- (b)  $\frac{2\pi R^5}{3r(R-r)}.$
- (c)  $\frac{\pi R^5}{r(R-r)}.$
- (d)  $\frac{4\pi R^5}{3r(R-r)}.$
- (e)  $\frac{5\pi R^5}{3r(R-r)}.$

17. **ITA 2014** Seis esferas de mesmo raio  $R$  são colocadas sobre uma superfície horizontal de tal forma que seus centros definam os vértices de um hexágono regular de aresta  $2R$ . Sobre estas esferas é colocada uma sétima esfera de raio  $2R$  que tangencia todas as demais. Determine a distância do centro da sétima esfera à superfície horizontal.
18. **ITA 2012** Em um plano estão situados uma circunferência  $\omega$  de raio  $2\text{ cm}$  e um ponto  $P$  que dista  $2\sqrt{2}\text{ cm}$  do centro de  $\omega$ . Considere os segmentos  $\overline{PA}$  e  $\overline{PB}$  tangentes a  $\omega$  nos pontos  $A$  e  $B$ , respectivamente. Ao girar a região fechada delimitada pelos segmentos  $\overline{PA}$  e  $\overline{PB}$  e pelo arco menor  $\widehat{AB}$  em torno de um eixo passando pelo centro de  $\omega$  e perpendicular ao segmento  $\overline{PA}$ , obtém-se um sólido de revolução. Determine:
- (a) A área total da superfície do sólido.
  - (b) O volume do sólido.
19. **ITA 2011** Uma esfera está inscrita em uma pirâmide regular hexagonal cuja altura mede  $12\text{ cm}$  e a aresta da base mede  $\frac{10}{3}\sqrt{3}\text{ cm}$ . Então o raio da esfera, em  $\text{cm}$ , é igual a:
- (a)  $\frac{10}{3}\sqrt{3}.$
  - (b)  $\frac{13}{3}.$
  - (c)  $\frac{15}{4}.$
  - (d)  $2\sqrt{3}.$
  - (e)  $\frac{10}{3}.$
20. **ITA 2010** As superfícies de duas esferas se interceptam ortogonalmente (isto é, em cada ponto da intersecção os respectivos planos tangentes são perpendiculares). Sabendo que os raios destas esferas medem  $2\text{ cm}$  e  $\frac{3}{2}\text{ cm}$ , respectivamente, calcule:
- (a) a distância entre os centros das duas esferas.

- (b) a área da superfície do sólido obtido pela intersecção das duas esferas.
21. **ITA 2009** Uma esfera é colocada no interior de um cone circular reto de  $8\text{ cm}$  de altura e de  $60^\circ$  de ângulo de vértice. Os pontos de contato da esfera com a superfície lateral do cone definem uma circunferência e distam  $2\sqrt{3}\text{ cm}$  do vértice do cone. O volume do cone não ocupado pela esfera, em  $\text{cm}^3$ , é igual a:
- (a)  $\frac{416}{9}\pi$ .  
 (b)  $\frac{480}{9}\pi$ .  
 (c)  $\frac{500}{9}\pi$ .  
 (d)  $\frac{512}{9}\pi$ .  
 (e)  $\frac{542}{9}\pi$ .
22. **ITA 2008** Seja  $C$  uma circunferência de raio  $r$  e centro  $O$  e  $\overline{AB}$  um diâmetro de  $C$ . Considere o triângulo equilátero  $BDE$  inscrito em  $C$ . Traça-se a reta  $s$  passando pelos pontos  $O$  e  $E$  até interceptar em  $F$  a reta  $t$  tangente à circunferência  $C$  no ponto  $A$ . Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região limitada pelo arco  $\widehat{AE}$  e pelos segmentos  $\overline{AF}$  e  $\overline{EF}$  em torno do diâmetro  $\overline{AB}$ .
23. **Udesc 2012** Seja  $S$  uma seção de uma esfera determinada pela intersecção com um plano, conforme a figura.

**Figura 1.16:** Udesc - Vestibular 2012



Fonte: Udesc (2019).

Se  $S$  está a  $3\text{ cm}$  do centro da esfera e tem área igual a  $16\pi\text{ cm}^2$ , então o volume desta esfera é:

- (a)  $36\pi\text{ cm}^3$ .

- (b)  $\frac{256\pi}{3} cm^3$ .
- (c)  $100\pi cm^3$ .
- (d)  $16\pi cm^3$ .
- (e)  $\frac{500\pi}{3} cm^3$ .

24. **Udesc 2019** Arquimedes de Siracusa (287 a.C.-212 a.C.) foi um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Ele fez grandes descobertas e sempre foi muito rigoroso ao provar essas descobertas. Dentre seus vários trabalhos, a esfera foi um dos elementos geométricos aos quais ele se dedicou, estabelecendo relações para obter o seu volume. No quadro abaixo, têm-se três dessas relações para o volume de uma esfera de raio  $R$ .

**Tabela 1.1:** Relações de Arquimedes para o volume da esfera de raio  $R$

| MÉTODO                   | RELAÇÃO                                                                                                                                                                                                                      |
|--------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Equilíbrio               | Considerando uma balança com ponto de apoio em $O$ , a esfera e um cone de raio e altura $2R$ colocados a uma distância $2R$ do ponto $O$ equilibram um cilindro de raio e altura $2R$ colocado a uma distância $R$ de $O$ . |
| Dupla redução ao absurdo | O volume da esfera é igual a 4 vezes o volume de um cone de raio e altura $R$ .                                                                                                                                              |
| Cilindro circunscrito    | O cilindro circunscrito à esfera é igual a uma vez e meia à esfera, em área e volume.                                                                                                                                        |

Se o cone do método da dupla redução ao absurdo tiver volume igual a  $243\pi cm^2$ , então a diferença de volume entre o cilindro do método do equilíbrio e do cilindro circunscrito é:

- (a)  $972\pi cm^3$ .
- (b)  $0 cm^3$ .
- (c)  $546,75\pi cm^3$ .
- (d)  $4374\pi cm^3$ .
- (e)  $1701\pi cm^3$ .

25. **Espcex (Aman) 2019** O volume de uma esfera inscrita em um cubo com volume  $216cm^3$  é igual a:

- (a)  $38\pi cm^3$ .
- (b)  $36\pi cm^3$ .

(c)  $34\pi \text{ cm}^3$ .

(d)  $32\pi \text{ cm}^3$ .

(e)  $30\pi \text{ cm}^3$ .

## 1.2 OBJETIVOS

### 1.2.1 OBJETIVO GERAL

Catalogar estratégias para provar as relações para o cálculo do volume da esfera e da área da superfície esférica que podem ser adaptadas e empregadas pelo professor de matemática no Ensino Médio, elaborando, a partir dessas estratégias, atividades para a sala de aula.

### 1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Definir as principais porções da esfera e calcular o volume das mesmas.
2. Definir as principais porções da superfície esférica e determinar a área das mesmas.
3. Elencar aplicações relevantes da esfera e da superfície esférica no cotidiano.
4. Explorar o aplicativo GeoGebra 3D na construção de figuras geométricas tridimensionais.
5. Selecionar questões de vestibulares e do ENEM que abordam o tema da dissertação.
6. Enfatizar a importância da demonstração nas aulas de geometria.

## 1.3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Realizamos uma pesquisa bibliográfica em livros de geometria, dissertações de mestrado do Profmat, artigos acadêmicos, sites especializados em geometria e revistas, para catalogar diferentes estratégias para comprovar as relações para o cálculo do volume da esfera e da área da superfície esférica. Na pesquisa, constatamos, por exemplo, que a literatura aborda o volume da esfera por intermédio do método da exaustão inscrevendo cilindros retos na semi-esfera. Contudo, não encontramos referências ao uso do mesmo método com a inscrição de troncos de cone retos de bases paralelas na semiesfera.

Na construção das figuras que compõem a dissertação, sempre relevantes em um trabalho de geometria, optamos pelo GeoGebra 3D por este ser um aplicativo gratuito. Assim, todas as figuras que ilustram as demonstrações de lemas e teoremas, bem como definições, foram construídas com o software de geometria dinâmica GeoGebra 3D.

## 1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

O presente trabalho está organizado em cinco capítulos e dois apêndices, estruturados da seguinte maneira: neste primeiro capítulo, apresentamos a justificativa para a escolha do tema, os objetivos, os procedimentos metodológicos e a estrutura do trabalho; no segundo capítulo, comprovamos por intermédio de diversas estratégias a relação para o cálculo do volume da esfera e empregamos essa relação para determinar o volume de algumas porções da esfera; no terceiro capítulo, comprovamos através de vários métodos a relação para o cálculo da área da superfície esférica e usamos essa relação para calcular a área de algumas porções da superfície esférica; no quarto capítulo, mencionamos aplicações da esfera e da superfície esférica no cotidiano e descrevemos três atividades sobre o volume da esfera para o Ensino Médio; no quinto capítulo, apresentamos as considerações finais; nos apêndices A e B, demonstramos, respectivamente, a soma dos quadrados dos  $n$  primeiros números inteiros positivos e um limite, relevantes às demonstrações presentes no segundo capítulo.

## 2 SÓLIDOS ESFÉRICOS

Apresentamos neste capítulo estratégias para calcular o volume da esfera, assim como o volume de algumas porções da esfera. No cálculo do volume da esfera, abordamos o princípio de Cavalieri, o segundo teorema de Pappus, o teorema de Arquimedes e o método da exaustão. Abordagens do volume por intermédio do Cálculo Diferencial e Integral podem ser encontradas em (SPIVAK, 2008) e em (STEWART, 2017b).

### 2.1 DEFINIÇÕES

**Definição 2.1.** *Sejam um ponto  $O$  e um segmento de medida  $r$ . A esfera  $\mathcal{E}$  de centro  $O$  e raio  $r$  é o conjunto dos pontos  $P$  do espaço tridimensional tais que a medida  $\overline{OP}$  é menor ou igual a  $r$ .*

Na Definição 2.1, a esfera  $\mathcal{E}$  é definida como um lugar geométrico. Podemos transcrever essa definição em linguagem simbólica como:

$$\mathcal{E}(O, r) = \{P \in \mathbb{R}^3; d(P, O) \leq r\}.$$

A Figura 2.1 ilustra a esfera  $\mathcal{E}$  de centro  $O$  e raio  $r$ .

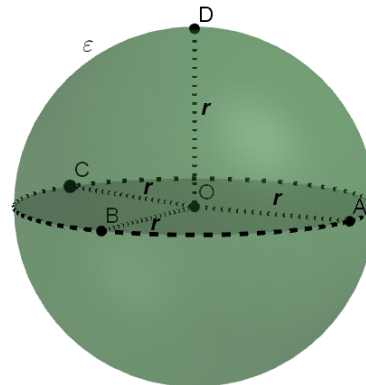
A esfera também pode ser definida como um sólido de revolução, ou seja, a esfera pode ser obtida pela rotação completa de um semicírculo  $\mathcal{C}$  em torno de um eixo  $e$ , denominado *eixo de revolução*, que contém o diâmetro do semicírculo, como mostra a Figura 2.2.

### 2.2 VOLUME DA ESFERA

**Teorema 2.1.** *O volume da esfera  $\mathcal{E}$  de raio  $r$  é dado por*

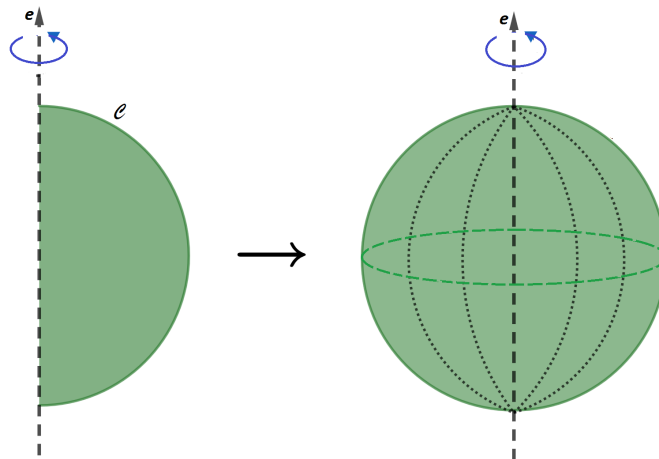
$$\mathcal{V}(\mathcal{E}) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

**Figura 2.1:** Esfera de centro  $O$  e raio  $r$



Fonte: A autora.

**Figura 2.2:** A esfera como sólido de revolução



Fonte: A autora.

Há muitas formas de se provar o Teorema 2.1 (LIMA, 2011)(NETO, 2013). A seguir, abordamos algumas estratégias.

### 2.2.1 PRINCÍPIO DE CAVALIERI

**Princípio 2.1** (de Cavalieri para volumes). *Sejam  $P_1$  e  $P_2$  dois sólidos limitados e  $\alpha$  um plano. Se para todo plano  $\beta$  paralelo a  $\alpha$  as intersecções de  $P_1$  e de  $P_2$  com  $\beta$  são vazias ou são regiões  $R_1$  e  $R_2$  tais que a razão entre as áreas das mesmas é uma constante real positiva  $\kappa$ , então a razão entre os volumes de  $P_1$  e de  $P_2$  é  $\kappa$ .*

O Princípio 2.1, ou princípio de Cavalieri<sup>1</sup> para volumes, é a estratégia comumente adotada para provar volumes no Ensino Médio. Neste nível de ensino, o princípio é apresen-

<sup>1</sup>Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647): sacerdote e matemático italiano, discípulo de Galileu. É considerado um dos precursores do Cálculo Integral.

tado como um postulado. Contudo, o princípio é um teorema cuja demonstração depende de conceitos de teoria da medida (LIMA, 2011).

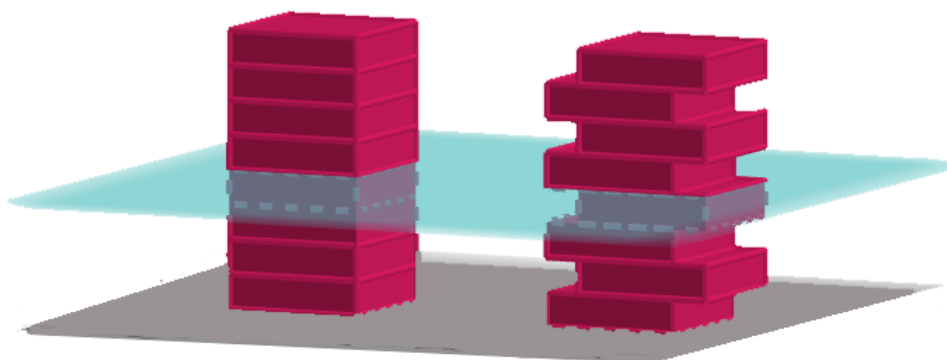
O Princípio 2.1 foi apresentado segundo (PATERLINI, 2010). Outras versões são apresentadas em (HOFFMANN, 2018), (LIMA, 2011), (LULA, 2013) e (PILATI, 2015). Adotamos nesta seção uma versão independente, descrita a seguir.

**Definição 2.2** (Figuras e sólidos equivalentes). *Duas figuras planas são equivalentes se têm a mesma área; dois sólidos são equivalentes se têm o mesmo volume.*

**Versão 2.1** (Princípio de Cavalieri). *Sejam  $P_1$  e  $P_2$  dois sólidos de bases equivalentes e alturas congruentes. Se todo plano  $\beta$  paralelo ao plano  $\alpha$  que contém as bases de  $P_1$  e de  $P_2$  determina seções equivalentes em  $P_1$  e em  $P_2$ , então  $P_1$  e  $P_2$  são equivalentes.*

A Figura 2.3 mostra a aplicação do princípio de Cavalieri para calcular o volume de um sólido.

**Figura 2.3:** Sólidos de bases equivalentes e alturas congruentes intersectados por um plano paralelo às bases que determina em ambos seções equivalentes



Fonte: A autora.

O princípio de Cavalieri pode ser empregado para determinar a relação para o volume de uma esfera, assim como para outros sólidos, como o prisma, a pirâmide, o cilindro e o cone. O princípio pode ser apresentado aos estudantes do Ensino Médio como um postulado, ressaltando-se sempre a necessidade de se comprovar a equivalência das seções. Para Lima (2011), o uso do princípio de Cavalieri “permite uma simplificação notável nos argumentos que conduzem às fórmulas clássicas de volume”, sendo, juntamente com o Método da Exaustão utilizado por Euclides e por Arquimedes, abordagens possíveis no Ensino Médio para justificar as relações para o cálculo de volumes e de áreas dos corpos sólidos mais comuns.

Assim, a primeira estratégia que empregamos para provar a relação para o volume da esfera, ou seja, o Teorema 2.1, é o princípio de Cavalieri. Para usar o princípio, devemos

comparar o sólido do qual queremos calcular o volume com um sólido do qual sabemos calcular o volume. No caso da esfera, a comparação é feita com a anticlépsidra.

**Definição 2.3** (Anticlépsidra). *Anticlépsidra é o sólido delimitado por um cilindro equilátero de raio  $r$  do qual foram retirados dois cones circulares retos opostos pelo vértice de raio  $r$  e altura  $r$  (clépsidra).*

A Figura 2.4 (NÓS, 2019) ilustra a anticlépsidra e um dos cones circulares retos que compõem a clépsidra.

**Figura 2.4:** Anticlépsidra e um dos cones que formam a clépsidra confeccionados em aço carbono



Fonte: Nós (2019).

*Demonstração.*

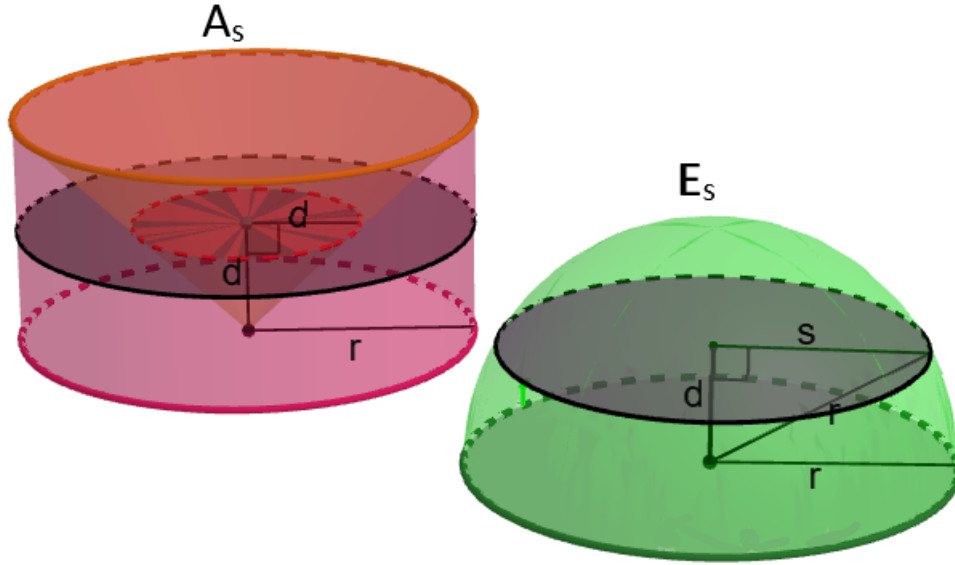
Sejam a semiesfera  $E_s$  e a semianticlépsidra  $A_s$ , ambas de raio  $r$ , e  $\beta$  um plano paralelo ao plano  $\alpha$  que contém as bases de  $E_s$  e de  $A_s$ . O plano  $\beta$  secciona  $E_s$  e  $A_s$  a uma distância  $d$ ,  $d < r$ , dos centros das bases dos dois sólidos, como ilustra a Figura 2.5.

Na semiesfera  $E_s$ , o plano  $\beta$  determina um círculo de raio  $s$ . Como

$$\begin{aligned} r^2 &= d^2 + s^2, \\ s^2 &= r^2 - d^2, \end{aligned}$$

a área da seção circular é igual a

$$\mathcal{A}(\text{seção circular}) = \pi s^2 = \pi (r^2 - d^2). \quad (2.1)$$

**Figura 2.5:** Semianticlépsidra e semiesfera equivalentes

Fonte: A autora.

Na semianticlépsidra  $A_s$ , o plano  $\beta$  determina uma coroa circular de raio externo  $r$  e de raio interno  $d$ , medida esta comprovada por semelhança de triângulos (caso AA). Dessa forma, a área da seção na semianticlépsidra é igual a:

$$\mathcal{A}(\text{coroa circular}) = \pi r^2 - \pi d^2 = \pi(r^2 - d^2). \quad (2.2)$$

As áreas (2.1) e (2.2) das seções que o plano  $\beta$  determina em  $E_s$  e em  $A_s$ , respectivamente, são iguais independentemente da distância  $d$ , desde que  $\beta$  seja paralelo à  $\alpha$ . Assim, pelo princípio de Cavalieri, concluímos que  $E_s$  e  $A_s$  são equivalentes. Logo:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(E_s) &= \mathcal{V}(A_s); \\ \mathcal{V}(E_s) &= \mathcal{V}(\text{semicilindro equilátero}) - \mathcal{V}(\text{cone reto}); \\ \mathcal{V}(E_s) &= \pi r^2 r - \frac{1}{3} \pi r^2 r; \\ \mathcal{V}(E_s) &= \frac{2}{3} \pi r^3. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Como o volume da esfera  $\mathcal{E}$  é igual a duas vezes o volume da semiesfera  $E_s$ , empregando (2.3) temos que

$$\mathcal{V}(\mathcal{E}) = \frac{4}{3} \pi r^3,$$

o que confirma a tese do Teorema 2.1.

□

## 2.2.2 APLICAÇÃO DO SEGUNDO TEOREMA DE PAPPUS

Empregamos o segundo teorema de Pappus<sup>2</sup> (LIMA et al., 2006) para comprovar o Teorema 2.1.

**Definição 2.4.** *Sejam um polígono  $P$ , dividido em  $n$  figuras  $F_1, F_2, F_3, \dots, F_k, \dots, F_n$  de áreas respectivamente iguais a  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k, \dots, A_n$ , e  $(x_k, y_k)$  o baricentro da figura  $F_k$ . Dessa forma, o baricentro ou centro de gravidade  $G$  de  $P$  tem coordenadas dadas por:*

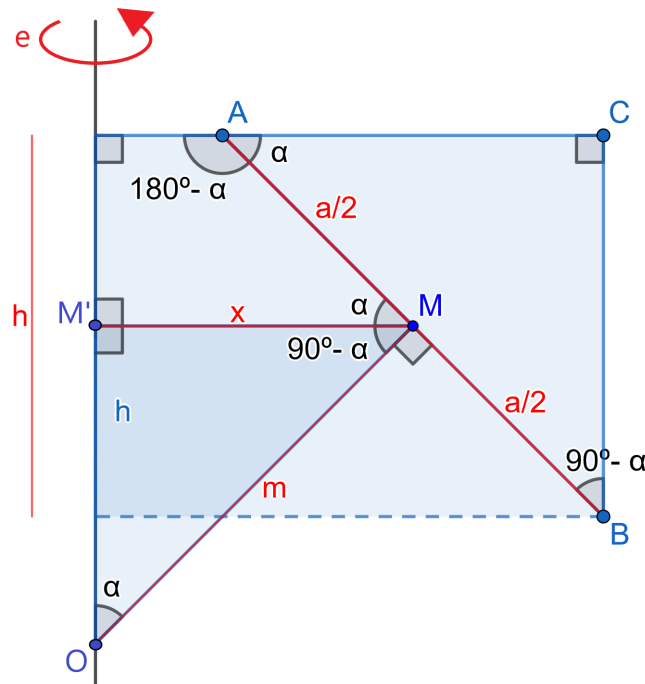
$$x = \frac{A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_kx_k + \dots + A_nx_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_k + \dots + A_n}; \quad (2.4)$$

$$y = \frac{A_1y_1 + A_2y_2 + \dots + A_ky_k + \dots + A_ny_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_k + \dots + A_n}. \quad (2.5)$$

**Lema 2.1.** *Se  $\overline{AB}$  é um segmento de medida  $a$  disjunto de um eixo  $e$ ,  $x$  é a distância do ponto médio de  $\overline{AB}$  a  $e$ ,  $h$  é o comprimento da projeção ortogonal de  $\overline{AB}$  sobre  $e$  e  $m$  é o comprimento do segmento da mediatriz de  $\overline{AB}$  compreendido entre  $\overline{AB}$  e  $e$ , então  $ax = hm$ .*

A Figura 2.6 ilustra as hipóteses do Lema 2.1.

**Figura 2.6:** Segmento  $\overline{AB}$  disjunto do eixo  $e$



Fonte: A autora.

<sup>2</sup>Pappus de Alexandria (290-350): geômetra grego. Pappus e Diofante foram os principais matemáticos da chamada Idade da Prata (250-350).

*Demonstração.*

Na Figura 2.6, temos que os triângulos  $OM'M$  e  $ACB$  são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo). Portanto:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{BC}}{\overline{MM'}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{OM}}; \\ \frac{h}{x} &= \frac{a}{m}; \\ ax &= hm.\end{aligned}$$

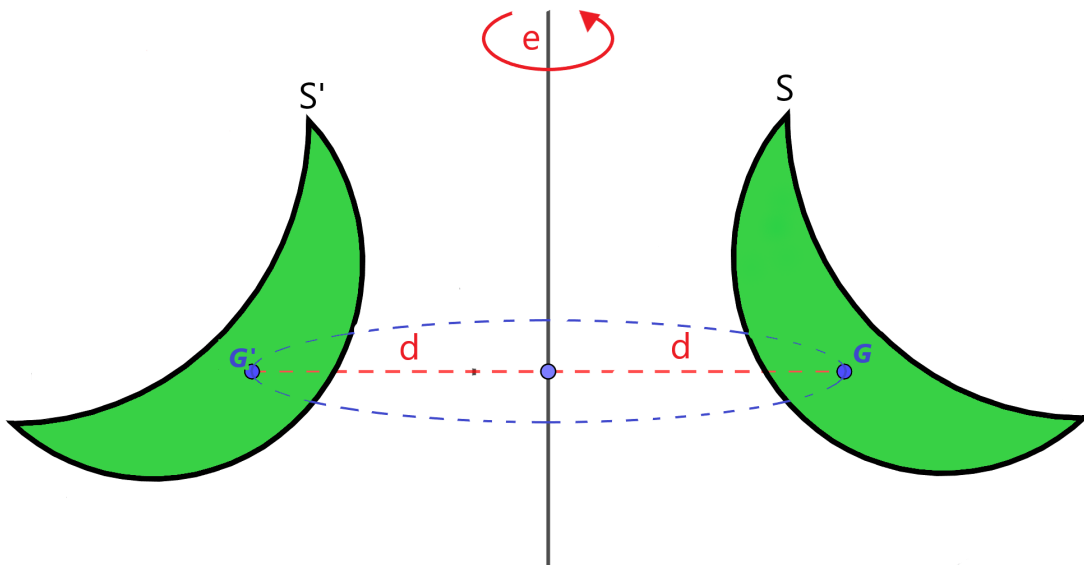
□

**Teorema 2.2** (Segundo teorema de Pappus). *Se uma figura plana é rotacionada em torno de um eixo de seu plano, de tal maneira que o eixo não intersecta a figura, então o volume do sólido gerado pela rotação da figura é igual à área da figura rotacionada multiplicada pelo comprimento da circunferência descrita pelo baricentro da figura.*

A Figura 2.7 ilustra a rotação ou giro de  $360^\circ$  de uma figura  $S$  de área  $A$  cujo baricentro  $G$  está a uma distância  $d$  do eixo de revolução  $e$ . Como cada ponto de  $S$  descreve uma circunferência na rotação, temos, pelo Teorema 2.2, que o volume do sólido gerado pela rotação da figura  $S$  de área  $A$  é igual a

$$\mathcal{V}(\text{sólido revolução}) = 2\pi dA. \quad (2.6)$$

**Figura 2.7:** Rotação da figura  $S$  em torno do eixo  $e$



Fonte: A autora.

A prova generalista do Teorema 2.2 pode ser encontrada em (RAUTENBERG, 2013).

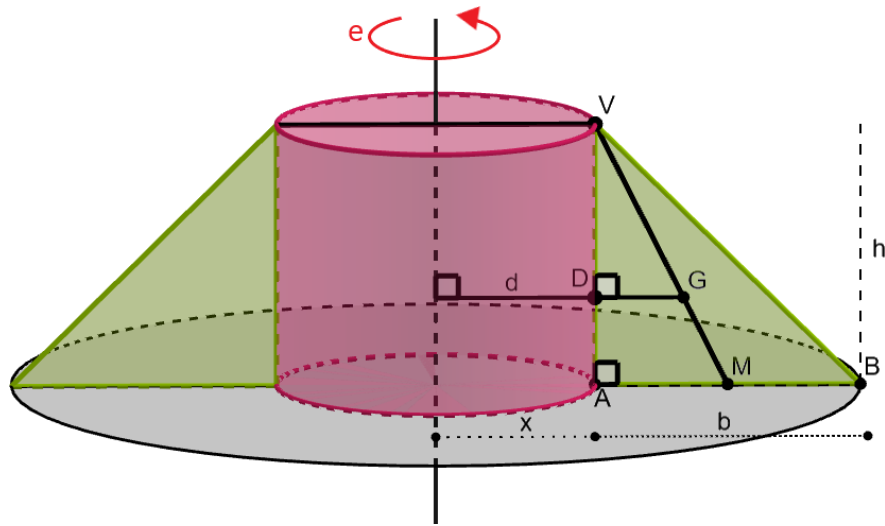
Vamos provar esse teorema para um caso particular, a rotação de um triângulo retângulo disjunto do eixo de rotação e com um dos catetos paralelo a esse eixo, para, em seguida, usar o Teorema 2.2 para provar o Teorema 2.1.

### 1. Rotação de um triângulo retângulo

*Demonstração.*

Seja um triângulo retângulo de base  $b$  e altura  $h$  cujo baricentro  $G$  está a uma distância  $d$  do eixo de revolução  $e$ , este paralelo a um dos catetos do triângulo retângulo e distando  $x$  desse cateto, como ilustra a Figura 2.8.

**Figura 2.8:** Rotação de um triângulo retângulo em torno do eixo  $e$



Fonte: A autora.

A rotação do triângulo retângulo em torno de  $e$  gera um sólido de revolução que é a diferença entre um tronco de cone reto de bases paralelas, de raios  $x$  e  $x + b$  e altura  $h$ , e um cilindro de raio  $x$  e altura  $h$ . Como o volume do cilindro é dado por  $\pi r^2 h$ , onde  $r$  é o raio da base e  $h$  é a altura do cilindro, e o volume do tronco de cone de bases paralelas é dado por  $\frac{\pi h}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$ , sendo  $r_1$  e  $r_2$  os raios das bases e  $h$  a altura do tronco de cone (NETO, 2013) (DOLCE; POMPEO, 2011), temos que:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}(\text{sólido revolução}) &= \mathcal{V}(\text{tronco cone}) - \mathcal{V}(\text{cilindro}); \\
 \mathcal{V}(\text{sólido revolução}) &= \frac{\pi h}{3} [(b+x)^2 + (b+x)x + x^2] - \pi x^2 h; \\
 \mathcal{V}(\text{sólido revolução}) &= \frac{\pi h}{3} (b^2 + 2bx + x^2 + bx + x^2 + x^2) - \pi x^2 h; \\
 \mathcal{V}(\text{sólido revolução}) &= \frac{\pi h}{3} (b^2 + 3bx + 3x^2) - \pi x^2 h; \\
 \mathcal{V}(\text{sólido revolução}) &= \frac{\pi h}{3} (b^2 + 3bx).
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Na Figura 2.8, o ponto  $G$  divide a mediana  $\overline{VM}$  na razão 2 : 1 (NETO, 2013) e os triângulos  $VDG$  e  $VAM$  são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo). Dessa forma, temos que:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{DG}}{\overline{AM}} &= \frac{\overline{VG}}{\overline{VM}}; \\ \frac{\overline{DG}}{\frac{b}{2}} &= \frac{\frac{2}{3}\overline{VM}}{\overline{VM}}; \\ \overline{DG} &= \frac{2}{3} \frac{b}{2}; \\ \overline{DG} &= \frac{b}{3}.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Usando (2.8), concluímos que:

$$d = x + \frac{b}{3} \Rightarrow x = d - \frac{b}{3}.\tag{2.9}$$

Substituindo (2.9) em (2.7), obtemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\text{sólido revolução}) &= \frac{\pi h}{3} \left[ b^2 + 3b \left( d - \frac{b}{3} \right) \right]; \\ \mathcal{V}(\text{sólido revolução}) &= \pi b d h; \\ \mathcal{V}(\text{sólido revolução}) &= 2\pi d \frac{bh}{2}.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Em (2.10),  $\frac{bh}{2}$  é a área  $A$  do triângulo retângulo, isto é, a área da figura rotacionada. Portanto,

$$\mathcal{V}(\text{sólido revolução}) = 2\pi d A,$$

o que corrobora (2.6).

□

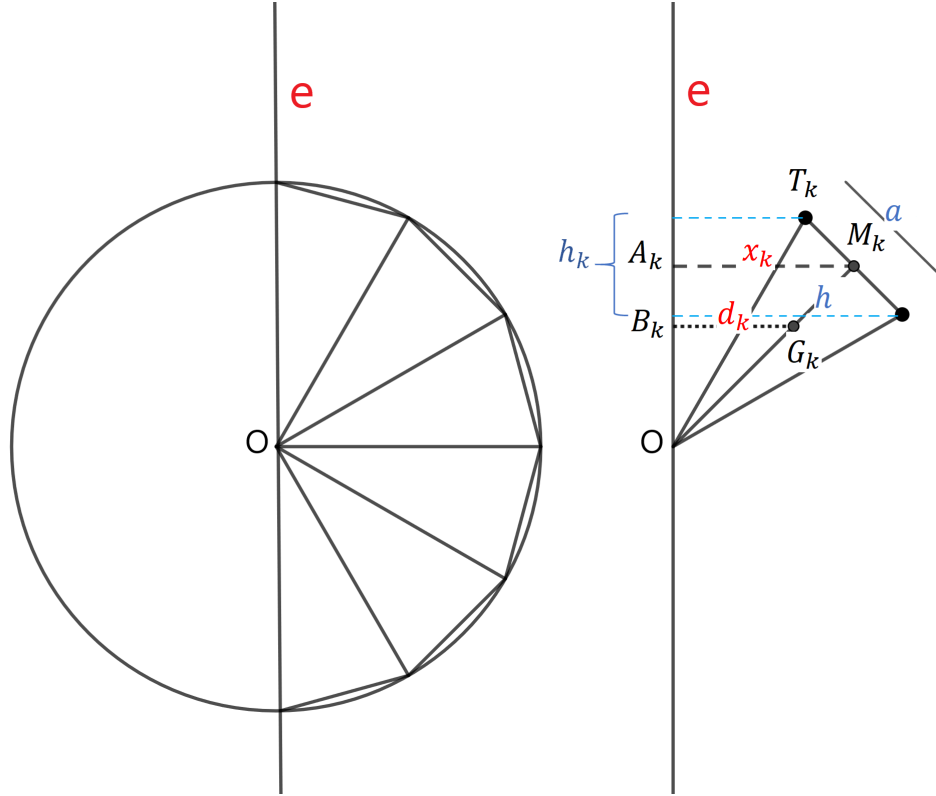
## 2. Volume da esfera

*Demonstração.*

Seja um semicírculo  $\mathcal{C}$  de raio  $r$  cujo diâmetro está contido no eixo de revolução  $e$ , dividido em  $n$  triângulos isósceles congruentes de base  $a$  e altura  $h$ , onde cada triângulo tem um vértice no centro  $O$  de  $\mathcal{C}$  e dois lados de medida  $r$ . Temos assim um polígono  $P$  inscrito no semicírculo, dividido em  $n$  triângulos  $T_1, T_2, \dots, T_k, \dots, T_n$  de área  $\frac{bh}{2}$ , onde  $h$  também é o apótema de cada triângulo inscrito. Em cada triângulo  $T_k$ , o baricentro  $G_k$  dista  $d_k$  do eixo  $e$ , o ponto médio  $M_k$  da base  $a$  dista  $x_k$  do eixo  $e$  e  $h_k$  é a medida

do segmento que corresponde à projeção ortogonal da base  $a$  de cada triângulo sobre  $e$ , como indicado na Figura 2.9.

**Figura 2.9:** Rotação de um semicírculo em torno do eixo  $e$  para gerar a esfera



Fonte: A autora.

Na Figura 2.9, o ponto  $G_k$  divide a mediana  $\overline{OM_k}$  na razão 2 : 1 e os triângulos  $OM_kA_k$  e  $OG_kB_k$  são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo). Logo, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{A_kM_k}}{\overline{B_kG_k}} &= \frac{\overline{OM_k}}{\overline{OG_k}}; \\ \frac{x_k}{d_k} &= \frac{h}{\frac{2}{3}h}; \\ d_k &= \frac{2}{3}x_k. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Podemos determinar a distância  $d$  do baricentro  $G$  de  $P$  ao eixo  $e$  utilizando a relação (2.4). Considerando o eixo horizontal perpendicular a  $e$  e passando por  $O$ , temos da relação (2.5) que a ordenada de  $G$  é  $y = 0$ , uma vez que os  $n$  triângulos têm a mesma área e que há simetria em relação ao eixo  $Ox$ . Da relação (2.4), obtemos para a abscissa  $x = d$  de  $G$ :

$$d = \frac{Ad_1 + Ad_2 + \cdots + Ad_k + \cdots + Ad_n}{A_1 + A_2 + \cdots + A_k + \cdots + A_n}. \quad (2.12)$$

Empregando (2.11) em (2.12), com  $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A = \frac{ah}{2}$ , temos que:

$$\begin{aligned}
 d &= \frac{A \frac{2}{3} x_1 + A \frac{2}{3} x_2 + \dots + A \frac{2}{3} x_k + \dots + A \frac{2}{3} x_n}{A + A + \dots + A}; \\
 d &= \frac{\frac{2}{3} \left( \frac{ah}{2} x_1 + \frac{ah}{2} x_2 + \dots + \frac{ah}{2} x_k + \dots + \frac{ah}{2} x_n \right)}{nA}; \\
 d &= \frac{\frac{2}{3} \frac{h}{2} (ax_1 + ax_2 + \dots + ax_k + \dots + ax_n)}{nA}; \\
 d &= \frac{\frac{h}{3} (ax_1 + ax_2 + \dots + ax_k + \dots + ax_n)}{nA}. \tag{2.13}
 \end{aligned}$$

Do Lema 2.1, temos que  $ax_k = hh_k$ . Utilizando esse resultado em (2.13), obtemos:

$$\begin{aligned}
 d &= \frac{\frac{h}{3} (hh_1 + hh_2 + \dots + hh_k + \dots + hh_n)}{nA}; \\
 d &= \frac{\frac{h^2}{3} (h_1 + h_2 + \dots + h_k + \dots + h_n)}{nA}. \tag{2.14}
 \end{aligned}$$

Em (2.14),  $h_1 + h_2 + \dots + h_n = 2r$ . Portanto:

$$d = \frac{h^2}{3} \frac{2r}{nA}. \tag{2.15}$$

Quando  $n$  cresce ( $n \rightarrow \infty$ ), a altura  $h$  de cada triângulo isósceles se aproxima da medida do raio  $r$  e a área dos  $n$  triângulos isósceles se aproxima da área do semicírculo, ou seja,  $\frac{\pi r^2}{2}$ . Dessa forma, no limite, podemos reescrever (2.15) como:

$$\begin{aligned}
 d &= \frac{r^2}{3} \frac{2r}{\frac{\pi r^2}{2}}; \\
 d &= \frac{4r}{3\pi}. \tag{2.16}
 \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.2, usando (2.16) em (2.6) concluímos que:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}(\text{esfera}) &= 2\pi dA; \\
 \mathcal{V}(\text{esfera}) &= 2\pi \frac{4r}{3\pi} \frac{\pi r^2}{2}; \\
 \mathcal{V}(\text{esfera}) &= \frac{4}{3} \pi r^3,
 \end{aligned}$$

resultado que corrobora a tese do Teorema 2.1.

□

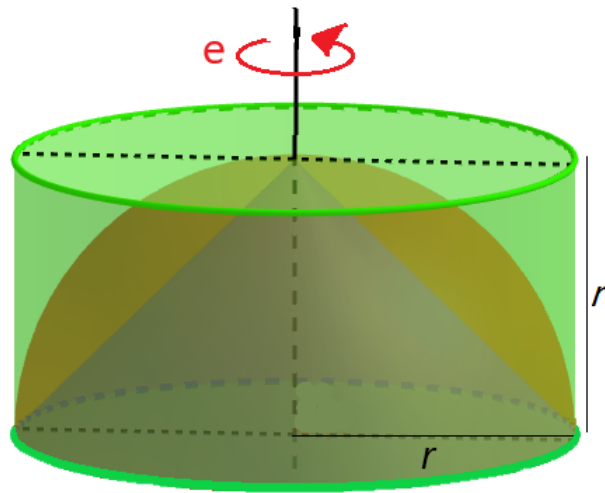
### 2.2.3 O SEGUNDO TEOREMA DE ARQUIMEDES

Na obra *O Método* (ASSIS; MAGNAGHI, 2014), Arquimedes<sup>3</sup> “descreve um método mecânico para investigar questões matemáticas” (HELLMEISTER, 2013), sendo uma dessas questões o volume da esfera, apresentado no segundo teorema.

**Teorema 2.3** (Segundo teorema de Arquimedes). *O volume de qualquer esfera é igual a quatro vezes o cone que tem sua base igual ao círculo máximo da esfera e sua altura igual ao raio da esfera, enquanto que o volume do cilindro com base igual a um círculo máximo da esfera e altura igual ao diâmetro é uma vez e meia o volume da esfera.*

As relações descritas no Teorema 2.3 são relativas aos sólidos de revolução ilustrados na Figura 2.10, cujos volumes estão na razão 1 : 2 : 3.

**Figura 2.10:** Relação entre os volumes do cilindro, da esfera e do cone

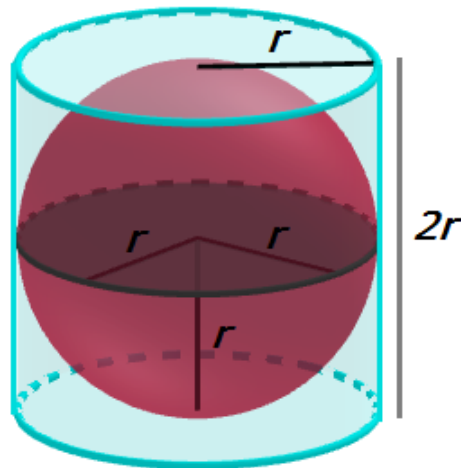


Fonte: A autora.

Ao inscrevermos a esfera de raio  $r$  em um cilindro equilátero de raio  $r$ , como ilustra a Figura 2.11, constatamos a razão 2 : 3, ou seja:

$$\frac{\mathcal{V}(\text{esfera})}{\mathcal{V}(\text{cilindro})} = \frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathcal{V}(\text{cilindro})}{\mathcal{V}(\text{esfera})} = \frac{3}{2}. \quad (2.17)$$

<sup>3</sup>Arquimedes de Siracusa (287 a.C.-212 a.C.): matemático, físico, engenheiro, inventor e astrônomo grego. A ele são atribuídas as leis do empuxo e da alavanca.

**Figura 2.11:** Esfera inscrita em um cilindro equilátero

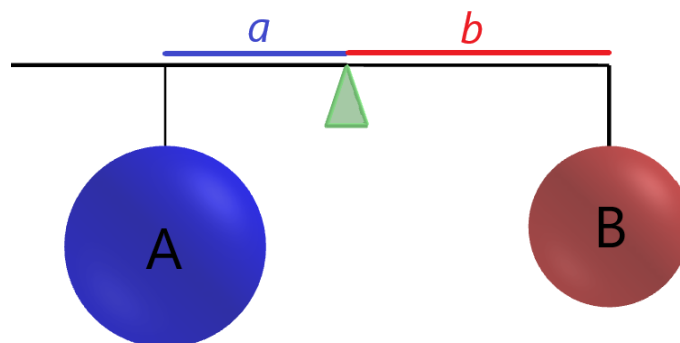
Fonte: A autora.

Para provar a relação (2.17) segundo Arquimedes (ARCHIMEDES; HEALTH, 1953), precisamos da lei de equilíbrio ou lei da alavanca proposta por Arquimedes na obra *Sobre o equilíbrio de figuras planas*.

**Lei 2.1** (da alavanca). *Uma alavanca está em equilíbrio se o produto do peso A pela distância a entre o fulcro<sup>4</sup> e o ponto de suspensão de A for igual ao produto do peso B e sua distância b do fulcro, isto é,*

$$A.a = B.b \quad \text{ou} \quad \frac{A}{B} = \frac{b}{a}. \quad (2.18)$$

A Figura 2.12 mostra uma alavanca em equilíbrio, ou seja, uma alavanca onde a relação (2.18) é respeitada.

**Figura 2.12:** Alavanca em equilíbrio

Fonte: A autora.

---

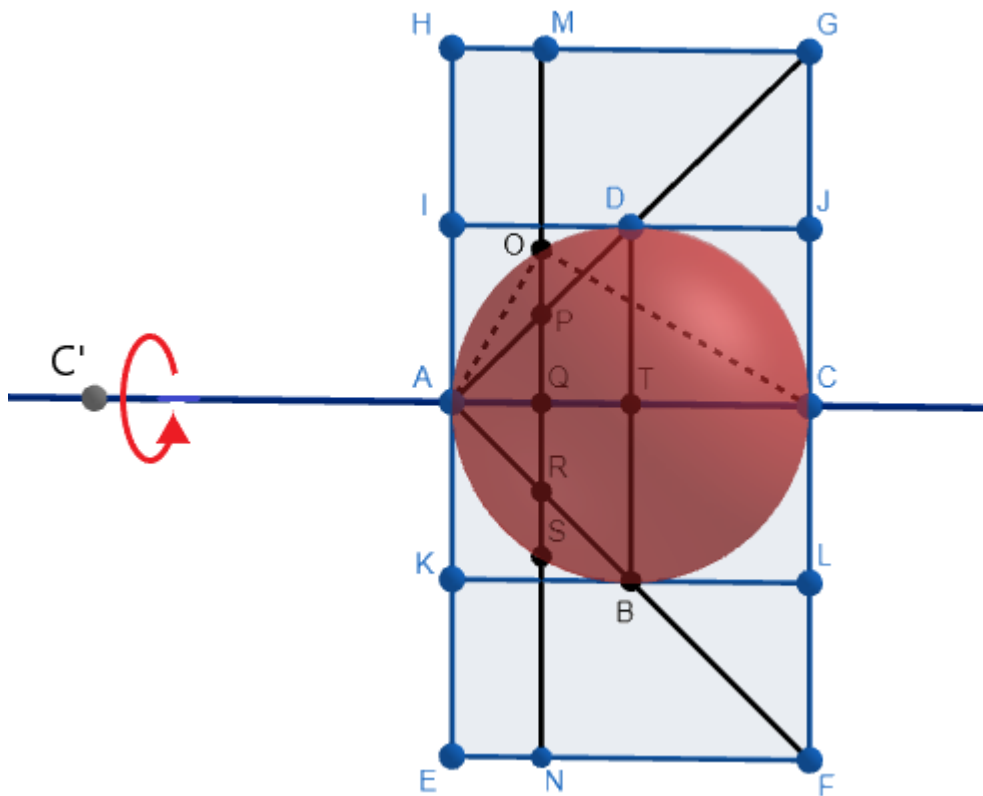
<sup>4</sup>ponto fixo

Usando (2.18), podemos agora provar a relação para o volume da esfera segundo Arquimedes (AABOE, 2013), (ASSIS; MAGNAGHI, 2014), (ÁVILA, 1986), (HELLMEISTER, 2013).

*Demonstração.*

Sejam o círculo que passa pelos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , com diâmetros perpendiculares  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$ , o triângulo isósceles  $AFG$ , retângulo em  $A$ , com base  $\overline{FG}$  e altura  $\overline{AC}$  e o retângulo  $EFGH$ , como ilustrado na Figura 2.13.

**Figura 2.13:** Rotação do quadrado  $ACGH$  em torno do eixo  $CC'$



Fonte: A autora.

Rotacionando o quadrado  $ACGH$  em torno da reta suporte do segmento  $\overline{CC'}$ , onde  $\overline{AC'} \equiv \overline{AC}$ , este gera na rotação um cilindro, enquanto o triângulo retângulo  $ACG$  gera um cone e o semicírculo de diâmetro  $\overline{AC}$  e que passa por  $D$  gera uma esfera.

Seja ainda o segmento  $\overline{MN}$ , de extremos nos segmentos  $\overline{GH}$  e  $\overline{EF}$ , respectivamente, perpendicular ao segmento  $\overline{AC}$  no ponto  $Q$  e que intersecta o segmento  $\overline{AG}$  no ponto  $P$ , o segmento  $\overline{AF}$  no ponto  $R$  e o semicírculo de diâmetro  $\overline{AC}$  nos pontos  $O$  e  $S$ , como indica a Figura 2.13.

O triângulo retângulo  $ACG$  é isósceles, do que decorre  $\overline{QP} \equiv \overline{AQ}$ , e o triângulo  $OAQ$  é

retângulo em  $Q$ . Assim, temos que:

$$\overline{AO}^2 = \overline{AQ}^2 + \overline{QO}^2 = \overline{QP}^2 + \overline{QO}^2. \quad (2.19)$$

Ainda, o triângulo  $OAC$  está inscrito no semicírculo de diâmetro  $\overline{AC}$ . Portanto, é retângulo em  $O$ . Como  $\overline{OQ} \perp \overline{AC}$ , das relações métricas no triângulo retângulo temos que:

$$\overline{AO}^2 = \overline{AQ} \cdot \overline{AC}. \quad (2.20)$$

Substituindo (2.19) em (2.20), obtemos:

$$\overline{QP}^2 + \overline{QO}^2 = \overline{AQ} \cdot \overline{AC}. \quad (2.21)$$

Na Figura 2.13, temos que  $\overline{QM} \equiv \overline{AC}$  e, por construção, que  $\overline{AC'} \equiv \overline{AC}$ . Logo, podemos reescrever (2.21) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{QP}^2 + \overline{QO}^2}{\overline{QM}^2} &= \frac{\overline{AQ} \cdot \overline{AC}}{\overline{QM}^2}; \\ \frac{\overline{QP}^2 + \overline{QO}^2}{\overline{QM}^2} &= \frac{\overline{AQ} \cdot \overline{AC}}{\overline{AC}^2}; \\ \frac{\overline{QP}^2 + \overline{QO}^2}{\overline{QM}^2} &= \frac{\overline{AQ}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AC}}; \\ \frac{\overline{QP}^2 + \overline{QO}^2}{\overline{QM}^2} &= \frac{\overline{AQ}}{\overline{AC}}; \\ \frac{\overline{QP}^2 + \overline{QO}^2}{\overline{QM}^2} &= \frac{\overline{AQ}}{\overline{AC'}}; \\ \frac{\pi \overline{QP}^2 + \pi \overline{QO}^2}{\pi \overline{QM}^2} &= \frac{\overline{AQ}}{\overline{AC'}}; \\ \left( \pi \overline{QP}^2 + \pi \overline{QO}^2 \right) \overline{AC'} &= \pi \overline{QM}^2 \cdot \overline{AQ}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

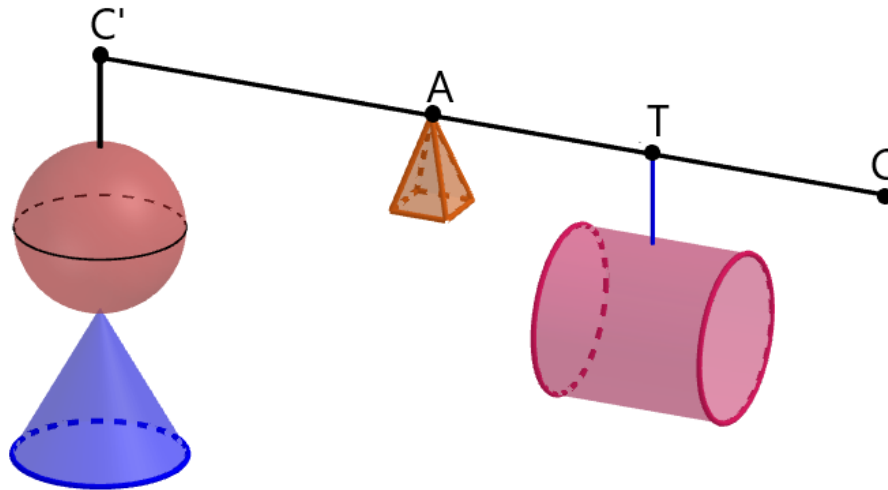
Podemos interpretar a igualdade (2.22) como o equilíbrio de pesos em uma alavanca  $\overline{QC'}$  com fulcro em  $A$ . Pela Lei 2.1, temos na relação (2.22) que os círculos de raios  $\overline{QP}$  e  $\overline{QO}$ , quando transferidos para  $C'$ , equilibram o círculo de raio  $\overline{QM}$  em  $Q$ .

Consideremos agora o cilindro gerado pela rotação do quadrado  $ACGH$  em torno do eixo  $\overline{CC'}$  como sendo a união de infinitos círculos de raio  $\overline{QM}$ , com  $Q$  variando de  $A$  a  $C$ . Analogamente, consideremos a esfera gerada pela rotação do círculo de diâmetro  $\overline{AC}$  e o cone circular gerado pela rotação do triângulo retângulo  $ACG$ . Dessa forma, colocando a esfera e o

cone no extremo  $C'$  da alavanca, ambos devem equilibrar o cilindro com centróide no ponto  $T$ , sendo  $\overline{AT} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ , como ilustra a Figura 2.14. Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{V}(\text{cone}) + \mathcal{V}(\text{esfera}))\overline{AC'} &= \mathcal{V}(\text{cilindro})\overline{AT}; \\
 (\mathcal{V}(\text{cone}) + \mathcal{V}(\text{esfera}))\overline{AC'} &= \mathcal{V}(\text{cilindro})\frac{1}{2}\overline{AC}; \\
 \frac{\mathcal{V}(\text{cone}) + \mathcal{V}(\text{esfera})}{\mathcal{V}(\text{cilindro})} &= \frac{1}{2} \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}}; \\
 \frac{\mathcal{V}(\text{cone}) + \mathcal{V}(\text{esfera})}{\mathcal{V}(\text{cilindro})} &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

**Figura 2.14:** Relação entre o volume do cone, da esfera e do cilindro pelo princípio de equilíbrio de Arquimedes



Fonte: A autora.

Dados um cilindro e um cone, ambos de mesmo raio e altura, temos que:

$$\mathcal{V}(\text{cilindro}) = 3\mathcal{V}(\text{cone}). \tag{2.24}$$

Substituindo (2.24) em (2.23), obtemos:

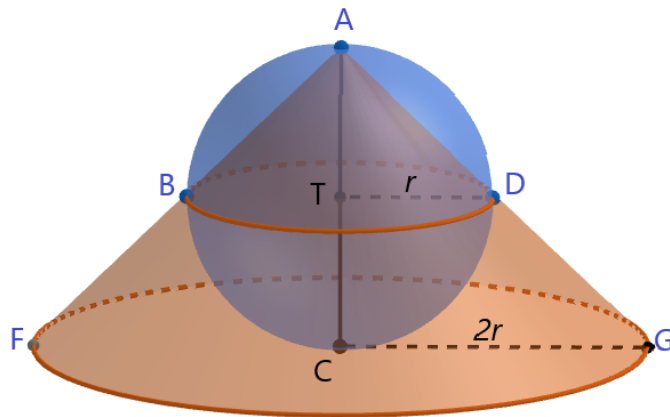
$$\begin{aligned}
 \frac{\mathcal{V}(\text{cone}) + \mathcal{V}(\text{esfera})}{3\mathcal{V}(\text{cone})} &= \frac{1}{2}; \\
 \mathcal{V}(\text{cone}) &= 2\mathcal{V}(\text{esfera}).
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Na Figura 2.13, temos que  $\overline{CG} = 2\overline{TD}$ . Dessa maneira, o volume do cone de raio  $\overline{CG}$  e altura  $\overline{AC}$  é igual a oito vezes o volume do cone de raio  $\overline{TD}$  e altura  $\overline{AT}$ . Como  $\overline{TD}$  é o raio  $r$  da esfera gerada pela rotação do semicírculo de diâmetro  $\overline{AC}$ , como mostra a Figura 2.15, temos

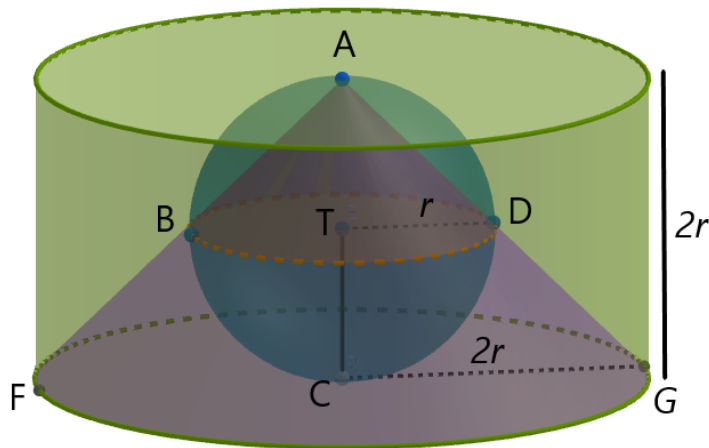
que:

$$\mathcal{V}(\text{cone}) = 8 \frac{\pi r^3}{3}. \quad (2.26)$$

**Figura 2.15:** (a) Comparação dos raios da esfera e do cone; (b) comparação dos raios da esfera, do cone e do cilindro



(a)



(b)

Fonte: A autora.

Substituindo (2.26) em (2.25), concluímos que:

$$\begin{aligned} 2\mathcal{V}(\text{esfera}) &= \frac{8}{3}\pi r^3; \\ \mathcal{V}(\text{esfera}) &= \frac{4}{3}\pi r^3, \end{aligned}$$

o que confirma a tese do Teorema 2.1.

□

### 2.2.4 INSCRIÇÃO DE CILINDROS

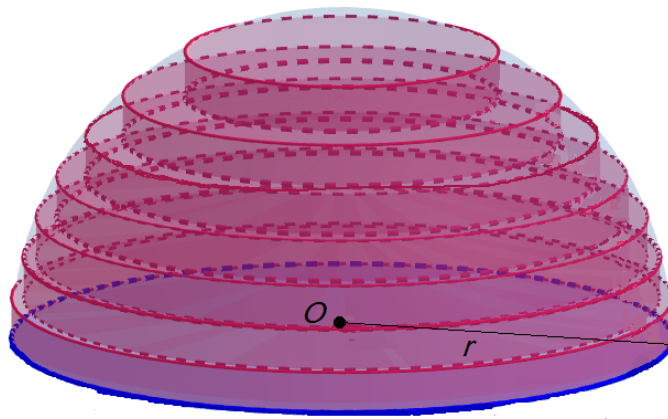
Utilizamos nesta seção o método da exaustão (LIMA, 2013) (MEDEIROS, 2014) (POGORELOV, 1974), empregado por Arquimedes, para provar o Teorema 2.1 inscrevendo cilindros em uma semiesfera.

O método da exaustão era um método empregado pelos gregos antigos para determinar a área de uma figura plana por intermédio da inscrição e/ou circunscrição de uma sequência de polígonos cuja soma das áreas convergia para a área da figura em estudo. Da mesma forma, podemos calcular o volume de um sólido, como o da esfera por exemplo, inscrevendo ou circunscrevendo nele poliedros ou outros sólidos, como cilindros, cuja soma dos volumes converge para o volume do sólido.

*Demonstração.*

Seja uma semiesfera de raio  $r$  na qual são inscritos  $n - 1$  cilindros de altura  $\frac{r}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , como ilustra a Figura 2.16.

**Figura 2.16:** Semiesfera com cilindros retos inscritos

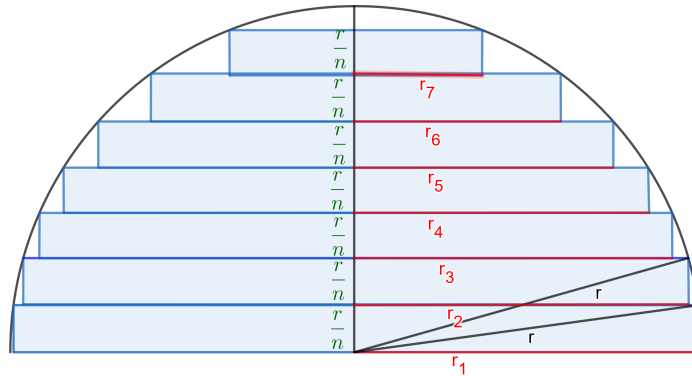


Fonte: A autora.

Na inscrição dos  $n - 1$  cilindros, precisamos expressar o raio  $r_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ , de cada cilindro em função do raio  $r$  da semiesfera. Para tanto, basta aplicarmos o teorema de Pitágoras (LOOMIS, 1968) nos retângulos definidos na seção meridiana da semiesfera, como mostra a Figura 2.17.

Dessa forma, temos que:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= r^2 - \left(\frac{r}{n}\right)^2; \\ r_2^2 &= r^2 - \left(\frac{2r}{n}\right)^2; \end{aligned}$$

**Figura 2.17:** Raios dos cilindros retos inscritos na semiesfera

Fonte: A autora.

$$\begin{aligned}
 r_3^2 &= r^2 - \left(\frac{3r}{n}\right)^2; \\
 &\vdots \\
 r_{n-1}^2 &= r^2 - \left[\frac{(n-1)r}{n}\right]^2.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$r_i^2 = r^2 - \left(\frac{ir}{n}\right)^2 = r^2 \left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right), \text{ para } i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.27)$$

O volume de um cilindro de raio  $r$  é dado por  $\pi r^2 h$ , onde  $h$  é a altura do cilindro (DOLCE; POMPEO, 2011) (NETO, 2013). Assim, usando (2.27) e  $h = \frac{r}{n}$ , o volume  $\mathcal{V}_i$  de cada cilindro inscrito na semiesfera é igual a:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}_i &= \pi r^2 \left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right) \frac{r}{n}; \\
 \mathcal{V}_i &= \pi r^3 \left(\frac{1}{n} - \frac{i^2}{n^3}\right).
 \end{aligned} \quad (2.28)$$

A soma dos volumes dos  $n-1$  cilindros fornece uma aproximação para o volume  $\mathcal{V}$  da semiesfera. Dessa forma:

$$\mathcal{V} \approx \sum_{i=1}^n \mathcal{V}_i. \quad (2.29)$$

Em (2.29),  $i = n$  representa um cilindro de raio  $r_n = 0$  e volume  $\mathcal{V}_n = 0$ . Substituindo (2.28) em (2.29) e utilizando as propriedades de uma soma discreta, obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &\approx \sum_{i=1}^n \pi r^3 \left( \frac{1}{n} - \frac{i^2}{n^3} \right); \\
\mathcal{V} &\approx \pi r^3 \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} - \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^3} \right); \\
\mathcal{V} &\approx \pi r^3 \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 - \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \right); \\
\mathcal{V} &\approx \pi r^3 \left( \frac{1}{n} n - \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \right); \\
\mathcal{V} &\approx \pi r^3 \left( 1 - \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \right).
\end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\mathcal{V} \approx \pi r^3 \left( 1 - \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \right). \tag{2.31}$$

Na aproximação (2.31), temos a soma dos quadrados dos  $n$  primeiros números inteiros positivos  $\sum_{i=1}^n i^2$ , provada no Apêndice A. Logo, usando o resultado (A.6), concluimos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &\approx \pi r^3 \left[ 1 - \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right]; \\
\mathcal{V} &\approx \pi r^3 \left( 1 - \frac{1}{n^3} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \right); \\
\mathcal{V} &\approx \pi r^3 \left( 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} \right).
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Para melhorar a aproximação (2.32), podemos aumentar o valor de  $n$ , ou seja, podemos inscrever um número maior de cilindros na semiesfera. Assim, para  $n \rightarrow \infty$ , o que implica em  $\frac{r}{n} \rightarrow 0$ , temos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\text{semiesfera}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{V}; \\
\mathcal{V}(\text{semiesfera}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \pi r^3 \left( 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} \right); \\
\mathcal{V}(\text{semiesfera}) &= \pi r^3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} \right).
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0, \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

obtemos de (2.33) que:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\text{semiesfera}) &= \pi r^3 \left(1 - \frac{1}{3}\right); \\ \mathcal{V}(\text{semiesfera}) &= \frac{2}{3} \pi r^3. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Multiplicando o resultado (2.34) por 2, temos que o volume da esfera é igual a:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\text{esfera}) &= 2\mathcal{V}(\text{semiesfera}); \\ \mathcal{V}(\text{esfera}) &= \frac{4}{3} \pi r^3, \end{aligned}$$

o que corrobora a tese do Teorema 2.1.

□

O método da exaustão pode ser empregado para calcular o volume de outros sólidos. Bongiovanni (2010) utiliza o método para provar a relação para o cálculo do volume do cone por intermédio do volume de cilindros. Contudo, alerta:

As áreas da superfície de um cone ou de um cilindro podem facilmente ser calculadas, pois essas superfícies são “desenvolvíveis”, isto é, podem ser desenroladas, sem alterar suas áreas, até ficarem planas, virando um setor circular ou um retângulo respectivamente.

O mesmo não ocorre com a esfera, que não é desenvolvível e, embora seu volume também possa ser obtido inscrevendo nela cilindros, sua área requer mais trabalho para ser obtida. Mesmo no caso do cilindro, se tentarmos obter a área de sua superfície inscrevendo nele poliedros cada vez mais próximos, seremos levados a resultados absurdos (BONGIOVANNI, 2010).

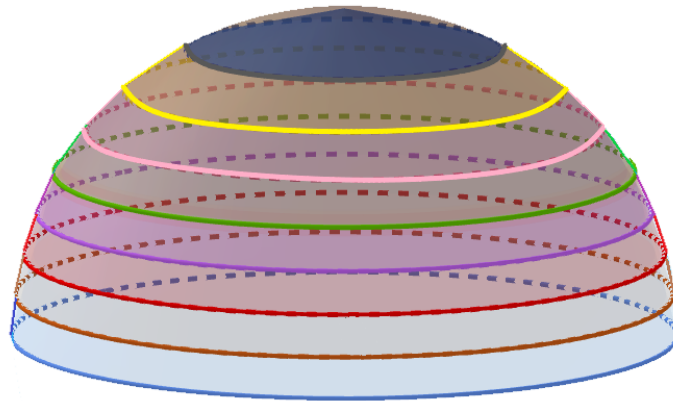
## 2.2.5 INSCRIÇÃO DE TRONCOS DE CONE RETOS DE BASES PARALELAS

Como a superfície lateral do tronco de cone se “ajusta” melhor à superfície esférica do que a superfície lateral do cilindro, utilizamos nesta seção o método da exaustão para provar o volume da esfera inscrevendo na semiesfera troncos de cone retos de bases paralelas.

*Demonstração.*

Seja uma semiesfera de raio  $r$  na qual são inscritos  $n - 1$  troncos de cone de altura  $\frac{r}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , como ilustra a Figura 2.18.

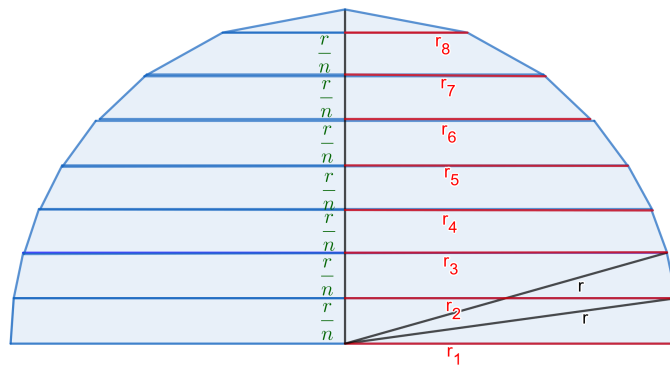
**Figura 2.18:** Semiesfera com troncos de cone retos de bases paralelas inscritos



Fonte: A autora.

Na inscrição dos  $n - 1$  troncos de cone, devemos expressar o raio  $r_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , de cada uma das bases do tronco de cone em função do raio  $r$  da semiesfera. Para tanto, basta aplicarmos o teorema de Pitágoras (LOOMIS, 1968) nos trapézios definidos na seção meridiana da semiesfera, como mostra a Figura 2.19.

**Figura 2.19:** Raios dos troncos de cone retos inscritos na semiesfera



Fonte: A autora.

Dessa maneira, temos que:

$$r_1^2 = r^2;$$

$$r_2^2 = r^2 - \left(\frac{r}{n}\right)^2;$$

$$r_3^2 = r^2 - \left(\frac{2r}{n}\right)^2;$$

$$r_4^2 = r^2 - \left(\frac{3r}{n}\right)^2;$$

$\vdots$

$$r_{n-1}^2 = r^2 - \left[ \frac{(n-2)r}{n} \right]^2;$$

$$r_n^2 = r^2 - \left[ \frac{(n-1)r}{n} \right]^2.$$

Assim:

$$r_i^2 = r^2 - \left( \frac{(i-1)r}{n} \right)^2 = r^2 \left( 1 - \frac{(i-1)^2}{n^2} \right); \quad (2.35)$$

$$r_i = \frac{r}{n} \sqrt{n^2 - (i-1)^2}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.36)$$

O volume de um tronco de cone de bases paralelas é dado por  $\frac{\pi h}{3} (R^2 + Rr + r^2)$ , onde  $h$  é a altura e  $R$  e  $r$  são os raios das bases do tronco de cone (DOLCE; POMPEO, 2011) (NETO, 2013). Assim, usando (2.35), (2.36) e  $h = \frac{r}{n}$ , o volume  $\mathcal{V}_i$  de cada tronco de cone inscrito na semiesfera é igual a:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_i &= \frac{\pi r}{3n} (r_i^2 + r_i r_{i+1} + r_{i+1}^2); \\ \mathcal{V}_i &= \frac{\pi r}{3n} \left[ r^2 \left( 1 - \frac{(i-1)^2}{n^2} \right) + \frac{r}{n} \sqrt{n^2 - (i-1)^2} \frac{r}{n} \sqrt{n^2 - i^2} + r^2 \left( 1 - \frac{i^2}{n^2} \right) \right]; \\ \mathcal{V}_i &= \frac{\pi r}{3n} \left[ r^2 \left( 1 - \frac{(i-1)^2}{n^2} + 1 - \frac{i^2}{n^2} \right) + \frac{r^2}{n^2} \sqrt{(n^2 - (i-1)^2)(n^2 - i^2)} \right]; \\ \mathcal{V}_i &= \frac{\pi}{3} r^3 \left[ \frac{2n^2 - ((i-1)^2 + i^2)}{n^3} + \frac{\sqrt{(n^2 - (i-1)^2)(n^2 - i^2)}}{n^3} \right]; \\ \mathcal{V}_i &= \frac{\pi}{3} r^3 \left[ \frac{2}{n} - \frac{2i^2 - 2i + 1}{n^3} + \frac{\sqrt{(n^2 - (i-1)^2)(n^2 - i^2)}}{n^3} \right]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

A soma dos volumes dos  $n-1$  troncos de cone fornece uma aproximação para o volume  $\mathcal{V}$  da semiesfera. Dessa forma:

$$\mathcal{V} \approx \sum_{i=1}^n \mathcal{V}_i. \quad (2.38)$$

Em (2.38),  $i = n$  representa um cone de raio  $r_n$  e volume  $\mathcal{V}_n = \frac{1}{3} \pi r_n^2 \frac{r}{n}$ . Substituindo (2.37) em (2.38) e utilizando as propriedades de uma soma discreta, obtemos:

$$\mathcal{V} \approx \sum_{i=1}^n \frac{\pi}{3} r^3 \left[ \frac{2}{n} - \frac{2i^2 - 2i + 1}{n^3} + \frac{\sqrt{(n^2 - (i-1)^2)(n^2 - i^2)}}{n^3} \right];$$

$$\mathcal{V} \approx \frac{\pi}{3} r^3 \left[ \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n 1 - \frac{2}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{2}{n^3} \sum_{i=1}^n i - \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sqrt{(n^2 - (i-1)^2)(n^2 - i^2)} \right]. \quad (2.39)$$

Substituindo (A.5) e (A.6) em (2.39), concluimos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\approx \frac{\pi}{3} r^3 \left[ \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2}{n^3} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n^3} n + \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sqrt{(n^2 - (i-1)^2)(n^2 - i^2)} \right]; \\ \mathcal{V} &\approx \frac{\pi}{3} r^3 \left[ 2 - 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) + \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sqrt{(n^2 - (i-1)^2)(n^2 - i^2)} \right]; \\ \mathcal{V} &\approx \frac{\pi}{3} r^3 \left[ 2 - 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sqrt{(n^2 - (i-1)^2)(n^2 - i^2)} \right]; \\ \mathcal{V} &\approx \frac{\pi}{3} r^3 \left[ 2 - 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{6n^2} \right) + \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sqrt{(n^2 - (i-1)^2)(n^2 - i^2)} \right]. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Para melhorar a aproximação (2.40), podemos aumentar o valor de  $n$ , ou seja, podemos inscrever um número maior de troncos de cone na semiesfera. Assim, para  $n \rightarrow \infty$ , o que implica em  $\frac{r}{n} \rightarrow 0$ , temos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\text{semiesfera}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{V}; \\ \mathcal{V}(\text{semiesfera}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{3} r^3 \left[ 2 - 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{6n^2} \right) + \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sqrt{(n^2 - (i-1)^2)(n^2 - i^2)} \right]; \\ \mathcal{V}(\text{semiesfera}) &= \frac{\pi}{3} r^3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 2 - 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{6n^2} \right) + \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sqrt{(n^2 - (i-1)^2)(n^2 - i^2)} \right]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0, \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sqrt{(n^2 - (i-1)^2)(n^2 - i^2)} = \frac{2}{3} = 0, \bar{6},$$

limite provado no Apêndice B, concluímos de (2.41) que:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\text{semiesfera}) &= \frac{\pi}{3}r^3 \left(2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right); \\ \mathcal{V}(\text{semiesfera}) &= \frac{2}{3}\pi r^3.\end{aligned}\tag{2.42}$$

Multiplicando o resultado (2.42) por 2, temos que o volume da esfera é igual a:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\text{esfera}) &= 2\mathcal{V}(\text{semiesfera}); \\ \mathcal{V}(\text{esfera}) &= \frac{4}{3}\pi r^3,\end{aligned}$$

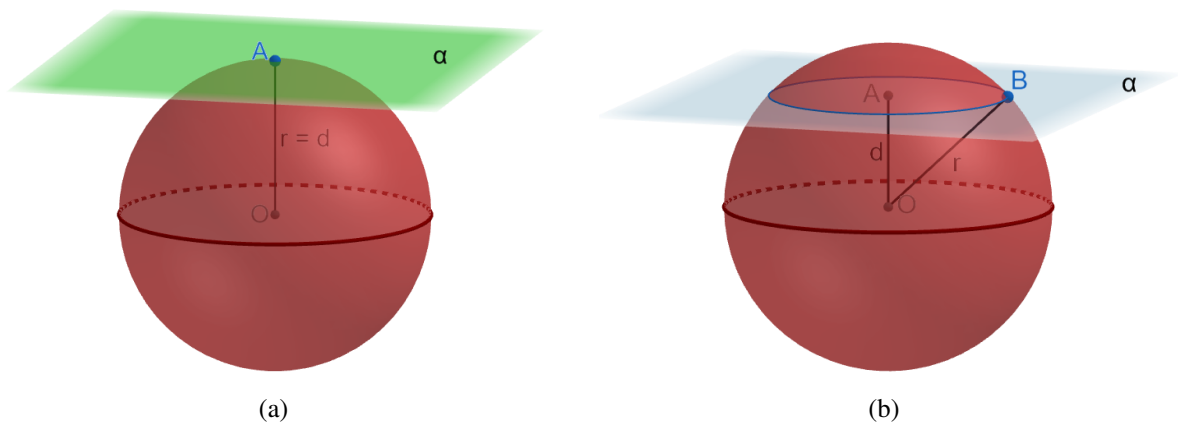
o que corrobora a tese do Teorema 2.1.

□

### 2.3 PRINCIPAIS PORÇÕES DA ESFERA

Sejam uma esfera de centro  $O$  e raio  $r$  e  $d$  a distância de  $O$  a um plano  $\alpha$ . O plano  $\alpha$  é *exterior*, *tangente* ou *secante* à esfera (ou à superfície esférica) de centro  $O$  se  $d > r$ ,  $d = r$  ou  $d < r$ , respectivamente. A Figura 2.20 ilustra um plano  $\alpha$  tangente e secante a uma esfera de centro  $O$  e raio  $r$ .

**Figura 2.20:** Plano  $\alpha$ : (a) tangente à esfera de centro  $O$  e raio  $r$ ; (b) secante à esfera de centro  $O$  e raio  $r$



Fonte: A autora.

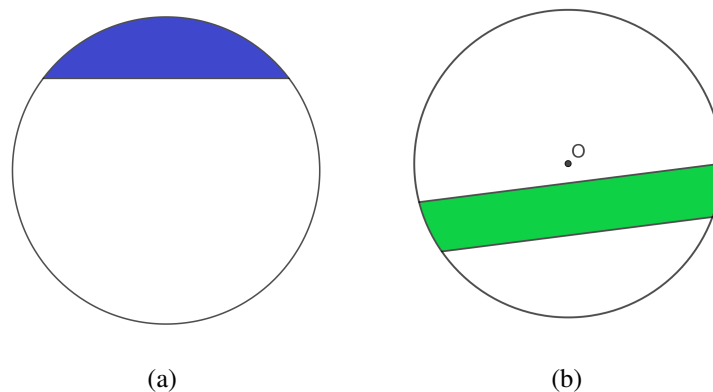
A seção determinada por um plano secante à esfera é sempre um círculo (LIMA, 2011) (NETO, 2013). Se  $d = 0$ , a seção é um *círculo máximo* da esfera; se  $0 < d < r$ , a seção é um *círculo menor* da esfera.

**Definição 2.5.** *Segmento circular de uma base é a porção do círculo limitada por um arco de circunferência e pela corda correspondente. O diâmetro perpendicular à corda divide o segmento circular de uma base em dois semisegmentos circulares de uma base congruentes.*

**Definição 2.6.** *Segmento circular de duas bases é a porção do círculo limitada por duas cordas paralelas e pelos arcos compreendidos entre elas. O diâmetro do círculo perpendicular às cordas divide o segmento circular de duas bases em dois semisegmentos circulares de duas bases congruentes.*

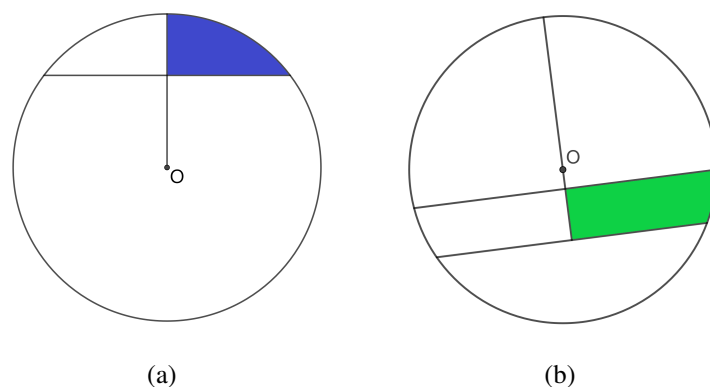
As Figuras 2.21 e 2.22 ilustram, respectivamente, segmentos e semisegmentos circulares de uma e de duas bases.

**Figura 2.21:** Segmento circular: (a) de uma base; (b) de duas bases



Fonte: A autora.

**Figura 2.22:** Semisegmento circular: (a) de uma base; (b) de duas bases



Fonte: A autora.

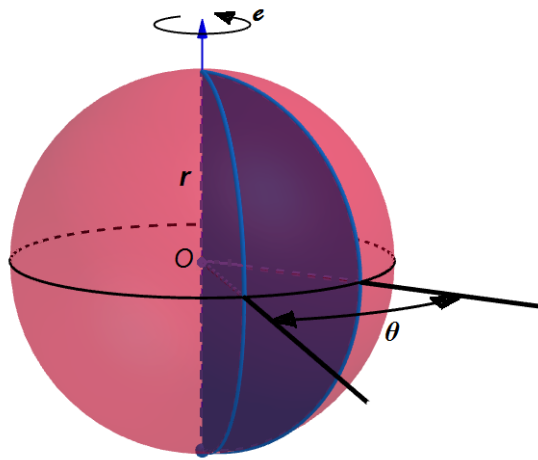
Deduzimos a seguir as relações para calcular o volume de quatro porções da esfera: a cunha esférica, o segmento esférico, o setor esférico e o anel esférico.

### 2.3.1 CUNHA ESFÉRICA

**Definição 2.7.** *Cunha esférica é a porção da esfera delimitada pela intersecção da esfera com um diedro de medida  $\theta$  cuja aresta contém um diâmetro da esfera.*

A cunha esférica também pode ser obtida pela rotação incompleta, segundo um ângulo  $\theta$ , de uma semicirculo em torno de um eixo que contém o diâmetro do semicirculo, como mostra a Figura 2.23.

**Figura 2.23:** Cunha esférica



Fonte: A autora.

O volume da cunha esférica é proporcional ao ângulo  $\theta$  da rotação que a gerou. Dessa forma:

$$\mathcal{V}(\text{cunha esférica}) = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{\theta}{360^\circ};$$

$$\mathcal{V}(\text{cunha esférica}) = \frac{\pi r^3 \theta}{270^\circ},$$

ou então:

$$\mathcal{V}(\text{cunha esférica}) = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{\theta}{2\pi};$$

$$\mathcal{V}(\text{cunha esférica}) = \frac{2r^3 \theta}{3},$$

sendo neste caso  $\theta$  um ângulo com medida em radianos.

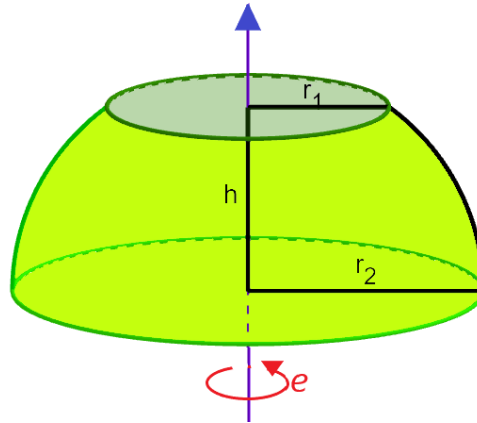
### 2.3.2 SEGMENTO ESFÉRICO

**Definição 2.8.** *Segmento esférico é um sólido de revolução cuja geratriz é um semisegmento circular de uma ou duas bases e cujo eixo é uma reta perpendicular às bases do segmento*

*circular.*

O segmento esférico é de uma ou duas bases se a geratriz é um semisegmento circular de uma ou duas bases, respectivamente. A Figura 2.24 mostra um segmento esférico de duas bases.

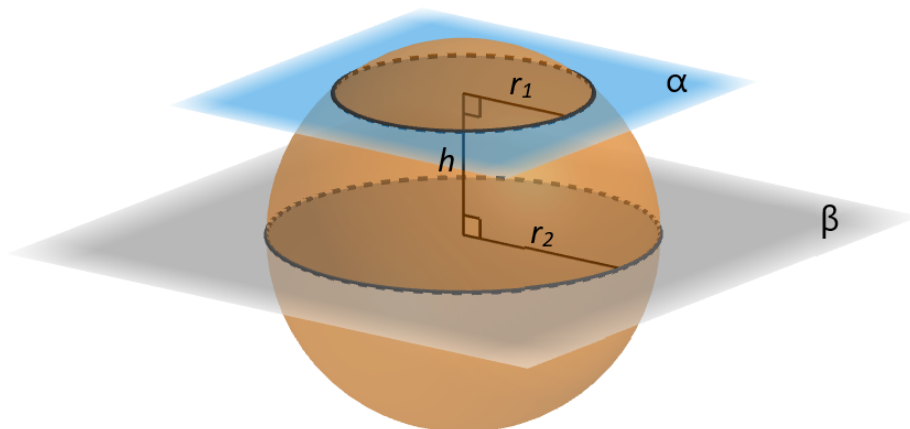
**Figura 2.24:** Segmento esférico de duas bases de raios  $r_1$  e  $r_2$  e altura  $h$



Fonte: A autora.

O segmento esférico também pode ser definido a partir da seção da esfera por planos secantes. Assim, dois planos  $\alpha$  e  $\beta$ , secantes à esfera, definem três segmentos esféricos, ilustrados na Figura 2.25: um segmento esférico de duas bases, compreendido entre  $\alpha$  e  $\beta$ , e dois segmentos esféricos de uma base.

**Figura 2.25:** Segmentos esféricos determinados por dois planos paralelos  $\alpha$  e  $\beta$  secantes à esfera



Fonte: A autora.

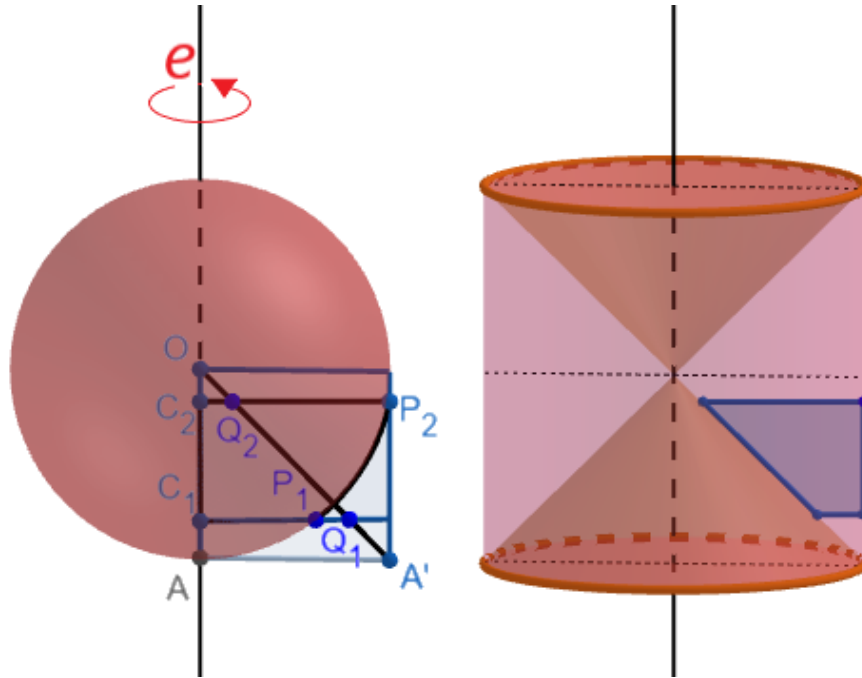
**Teorema 2.4.** O volume do segmento esférico  $SE$  de altura  $h$  e bases de raios  $r_1$  e  $r_2$  é dado por

$$\mathcal{V}(SE) = \frac{\pi h}{6} [3(r_1^2 + r_2^2) + h^2].$$

*Demonstração.*

Seja o semisegmento circular de duas bases  $C_1P_1P_2C_2$ , de raios  $r_1$  e  $r_2$  e altura  $h$ , definido em um semicírculo de raio  $r$ . O volume gerado pela rotação dessa figura na esfera equivale ao volume do sólido gerado pelo trapézio retângulo na anticlépsidra, como ilustra a Figura 2.26. A equivalência entre as seções da esfera e da anticlépsidra foi comprovada na Seção 2.2.1. Portanto, podemos considerar o volume do segmento esférico de duas bases como sendo dado pela diferença entre os volumes de um cilindro reto e de um tronco de cone reto de bases paralelas.

**Figura 2.26:** Volume do segmento esférico de duas bases na esfera e na anticlépsidra



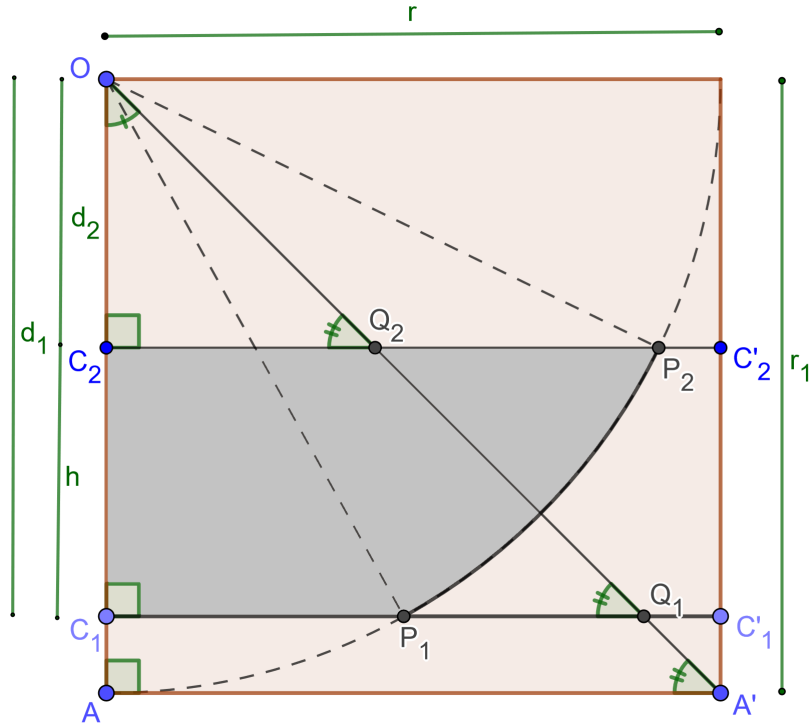
Fonte: A autora.

A Figura 2.27 mostra, de forma ampliada, a seção na esfera com as medidas pertinentes. Adotamos a notação de Dolce e Pompeo (2011).

Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}(SE) &= \mathcal{V}(\text{cilindro } C_1C'_1C'_2C_2) - \mathcal{V}(\text{tronco de cone } C_1Q_1Q_2C_2); \\
 \mathcal{V}(SE) &= \pi r^2 h - \frac{\pi h}{3} (d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2); \\
 \mathcal{V}(SE) &= \frac{\pi h}{6} (6r^2 - 2d_1^2 - 2d_1 d_2 - 2d_2^2); \\
 \mathcal{V}(SE) &= \frac{\pi h}{6} (3r^2 - 3d_1^2 + 3r^2 - 3d_2^2 + d_1^2 - 2d_1 d_2 + d_2^2); \\
 \mathcal{V}(SE) &= \frac{\pi h}{6} [3(r^2 - d_1^2) + 3(r^2 - d_2^2) + (d_1 - d_2)^2].
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

**Figura 2.27:** Seção na esfera da qual o segmento esférico de duas bases é uma porção



Fonte: A autora.

Da análise da Figura 2.27, obtemos:

$$\triangle OC_2Q_2 \stackrel{(AA)}{\sim} \triangle OAA' : \frac{\overline{OC_2}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{C_2Q_2}}{\overline{AA'}} \Rightarrow \overline{OC_2} \equiv \overline{C_2Q_2};$$

$$\triangle OC_1Q_1 \stackrel{(AA)}{\sim} \triangle OAA' : \frac{\overline{OC_1}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{C_1Q_1}}{\overline{AA'}} \Rightarrow \overline{OC_1} \equiv \overline{C_1Q_1};$$

$$\overline{OA} \equiv \overline{AA'} \equiv \overline{OP_2} \equiv \overline{OP_1} = r;$$

$$\overline{C_1P_1} = r_1; \overline{C_2P_2} = r_2;$$

$$\overline{OC_1} \equiv \overline{C_1Q_1} = d_1;$$

$$\overline{OC_2} \equiv \overline{C_2Q_2} = d_2;$$

$$\overline{C_1C_2} = h = d_1 - d_2; \quad (2.44)$$

$$\triangle OC_2P_2 : r^2 = d_2^2 + r_2^2 \Rightarrow r_2^2 = r^2 - d_2^2; \quad (2.45)$$

$$\triangle OC_1P_1 : r^2 = d_1^2 + r_1^2 \Rightarrow r_1^2 = r^2 - d_1^2. \quad (2.46)$$

Logo, substituindo (2.44), (2.45) e (2.46) em (2.43), concluímos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(SE) &= \frac{\pi h}{6} (3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2); \\ \mathcal{V}(SE) &= \frac{\pi h}{6} [3(r_1^2 + r_2^2) + h^2],\end{aligned}\tag{2.47}$$

o que confirma a tese do Teorema 2.4.

□

Para calcular o volume do segmento esférico de uma base, podemos considerar a relação (2.47) com  $r_1 = 0$  ou  $r_2 = 0$ . Contudo, podemos expressar o volume do segmento esférico de uma base em função da medida do raio  $r$  da esfera.

**Teorema 2.5.** *O volume do segmento esférico  $SE$  de uma base de altura  $h$  é dado por*

$$\mathcal{V}(SE) = \frac{\pi h^2}{3} (3r - h),$$

onde  $r$  é a medida do raio da esfera da qual  $SE$  é uma porção.

*Demonstração.*

Na Figura 2.27, consideremos o semisegmento circular de uma base  $AP_2C_2$ , de raio  $\overline{C_2P_2} = r_2$  e altura

$$\begin{aligned}h &= \overline{AC_2} = r - d_2, \\ d_2 &= r - h,\end{aligned}\tag{2.48}$$

sendo  $r$  o raio da esfera da qual o segmento esférico de uma base é uma porção. Na comparação com a anticlépsidra, podemos calcular o volume do segmento esférico de uma base por intermédio da diferença entre os volumes de um cilindro reto e de um tronco de cone reto de bases paralelas.

Dessa forma, temos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(SE) &= \mathcal{V}(AA'C_2C_2) - \mathcal{V}(AA_1Q_2C_2); \\ \mathcal{V}(SE) &= \pi r^2 h - \frac{\pi h}{3} (r^2 + rd_2 + d_2^2); \\ \mathcal{V}(SE) &= \frac{\pi h}{3} (3r^2 - r^2 - rd_2 - d_2^2); \\ \mathcal{V}(SE) &= \frac{\pi h}{3} (2r^2 - rd_2 - d_2^2).\end{aligned}\tag{2.49}$$

Substituindo (2.48) em (2.49), concluímos que:

$$\mathcal{V}(SE) = \frac{\pi h}{3} \left[ 2r^2 - r(r-h) - (r-h)^2 \right];$$

$$\mathcal{V}(SE) = \frac{\pi h}{3} (2r^2 - r^2 + rh - r^2 + 2rh - h^2);$$

$$\mathcal{V}(SE) = \frac{\pi h}{3} (3rh - h^2);$$

$$\mathcal{V}(SE) = \frac{\pi h^2}{3} (3r - h),$$

o que corrobora a tese do Teorema 2.5. □

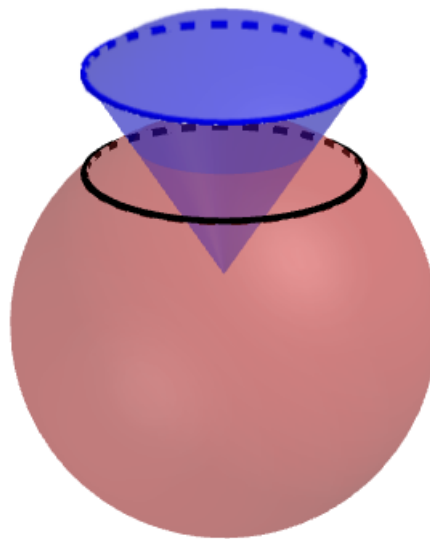
### 2.3.3 SETOR ESFÉRICO

**Definição 2.9.** *Setor esférico é o sólido de revolução cuja geratriz é um setor circular (DOLCE; POMPEO, 1993) e cujo eixo é uma reta que:*

- i) *passa pelo vértice do setor circular;*
- ii) *não intersecta o arco do setor circular ou intersecta o arco do setor circular em um dos extremos;*
- iii) *é coplanar com o setor circular.*

A Figura 2.28 ilustra um setor esférico.

**Figura 2.28:** Setor esférico



Fonte: A autora.

**Teorema 2.6.** O volume do setor esférico  $Se$  de altura  $h$  é dado por

$$\mathcal{V}(Se) = \frac{2}{3}\pi r^2 h,$$

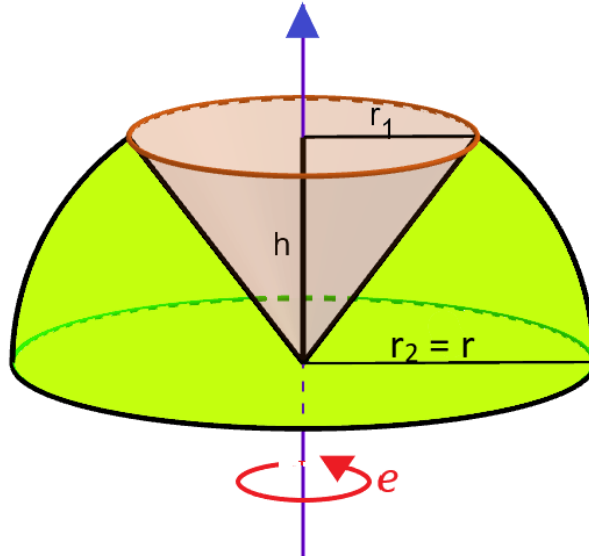
onde  $r$  é a medida do raio da esfera da qual  $Se$  é uma porção.

*Demonstração.*

Para provar o Teorema 2.6, precisamos considerar três casos distintos.

**1º caso:** Um dos lados do setor circular que gera o setor esférico na rotação é perpendicular ao eixo  $e$  de rotação, como ilustra a Figura 2.29.

**Figura 2.29:** Setor esférico do 1º caso



Fonte: A autora.

Neste caso, temos que o volume do setor esférico é dado pela diferença entre os volumes de um segmento esférico de duas bases, de altura  $h$  e raios  $r_1$  e  $r_2 = r$ , onde  $r$  é o raio da esfera da qual o setor esférico é uma porção, e de um cone reto de altura  $h$  e raio  $r_1$ . Portanto, empregando (2.47), obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(Se) &= \mathcal{V}(\text{segmento esférico}) - \mathcal{V}(\text{cone}); \\ \mathcal{V}(Se) &= \frac{\pi h}{6} [3(r_1^2 + r^2) + h^2] - \frac{1}{3}\pi r_1^2 h; \\ \mathcal{V}(Se) &= \frac{\pi h}{6} (3r_1^2 + 3r^2 + h^2 - 2r_1^2); \\ \mathcal{V}(Se) &= \frac{\pi h}{6} (3r^2 + h^2 + r_1^2). \end{aligned} \tag{2.50}$$

Como

$$h^2 + r_1^2 = r^2, \quad (2.51)$$

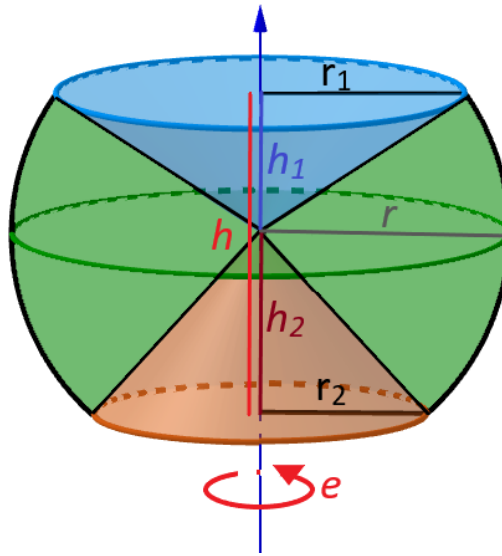
substituindo (2.51) em (2.50) concluímos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(Se) &= \frac{\pi h}{6} (3r^2 + r^2); \\ \mathcal{V}(Se) &= \frac{2}{3} \pi r^2 h, \end{aligned} \quad (2.52)$$

o que confirma a tese do Teorema 2.6.

**2º caso:** Os lados do setor circular que gera o setor esférico na rotação não são perpendiculares ao eixo  $e$  de rotação e também não estão contidos nesse eixo, como mostra a Figura 2.30.

**Figura 2.30:** Setor esférico do 2º caso



Fonte: A autora.

Neste caso, temos que o volume do setor esférico é dado pela soma dos volumes de dois setores esféricos de alturas  $h_1$  e  $h_2$ , respectivamente. Logo, usando (2.52), obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(Se) &= \mathcal{V}(\text{setor esférico superior}) + \mathcal{V}(\text{setor esférico inferior}); \\ \mathcal{V}(Se) &= \frac{2}{3} \pi r^2 h_1 + \frac{2}{3} \pi r^2 h_2; \\ \mathcal{V}(Se) &= \frac{2}{3} \pi r^2 (h_1 + h_2). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Como

$$h_1 + h_2 = h, \quad (2.54)$$

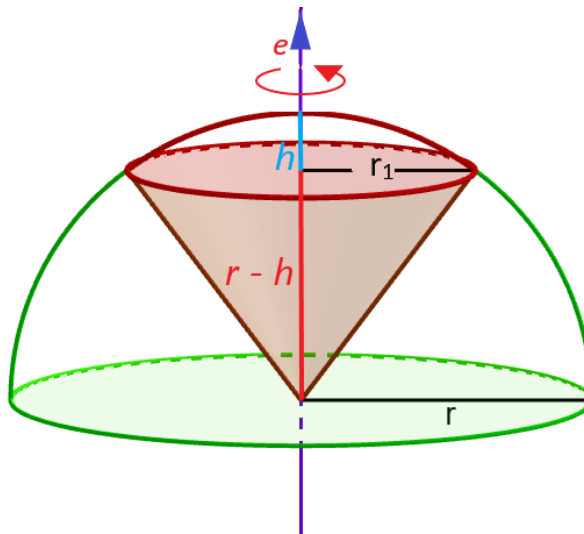
substituindo (2.54) em (2.53) concluímos que

$$\mathcal{V}(Se) = \frac{2}{3}\pi r^2 h,$$

o que corrobora a tese do Teorema 2.6.

**3º caso:** Um dos lados do setor circular que gera o setor esférico na rotação está contido no eixo  $e$  de rotação, como ilustra a Figura 2.31.

**Figura 2.31:** Setor esférico do 3º caso



Fonte: A autora.

Neste caso, temos que o volume do setor esférico é dado pela soma dos volumes de um segmento esférico de uma base, de altura  $h$  e raio  $r_1$ , e de um cone reto de altura  $r - h$  e raio  $r_1$ , onde  $r$  é o raio da esfera da qual o setor esférico é uma porção. Assim, empregando (2.47) com  $r_2 = 0$ , obtemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(Se) &= \mathcal{V}(\text{segmento esférico}) + \mathcal{V}(\text{cone}); \\ \mathcal{V}(Se) &= \frac{\pi h}{6} (3r_1^2 + h^2) + \frac{1}{3}\pi r_1^2 (r - h).\end{aligned}\tag{2.55}$$

Como:

$$\begin{aligned}r^2 &= (r - h)^2 + r_1^2; \\ r^2 &= r^2 - 2rh + h^2 + r_1^2; \\ r_1^2 &= 2rh - h^2,\end{aligned}\tag{2.56}$$

substituindo (2.56) em (2.55) concluímos que:

$$\mathcal{V}(Se) = \frac{\pi h}{6} [3(2rh - h^2) + h^2] + \frac{\pi}{3} (2rh - h^2)(r - h);$$

$$\mathcal{V}(Se) = \frac{\pi h}{6} (6rh - 3h^2 + h^2) + \frac{\pi}{3} (2r^2h - 2rh^2 - rh^2 + h^3);$$

$$\mathcal{V}(Se) = \frac{\pi h}{6} (6rh - 2h^2) + \frac{\pi h}{3} (2r^2 - 3rh + h^2);$$

$$\mathcal{V}(Se) = \frac{\pi h}{6} (6rh - 2h^2 + 4r^2 - 6rh + 2h^2);$$

$$\mathcal{V}(Se) = \frac{\pi h}{6} (4r^2);$$

$$\mathcal{V}(Se) = \frac{2}{3} \pi r^2 h,$$

o que confirma a tese do Teorema 2.6. □

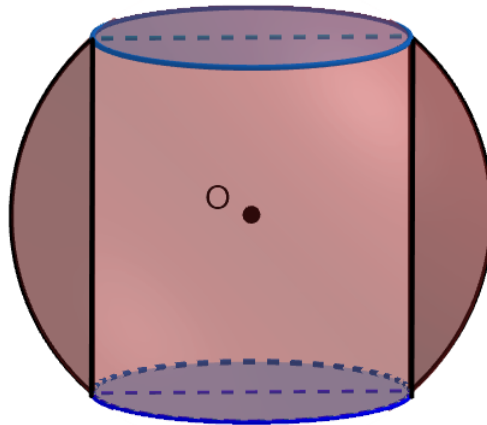
#### 2.3.4 ANEL ESFÉRICO

**Definição 2.10.** *Anel esférico é o sólido de revolução cuja geratriz é um segmento circular de uma base e cujo eixo é uma reta que:*

- i) *passa pelo centro do círculo que define o segmento circular;*
- ii) *não intersecta o arco do segmento circular ou intersecta o arco do segmento circular em um dos extremos;*
- iii) *é coplanar com o segmento circular.*

A Figura 2.32 ilustra um anel esférico.

**Figura 2.32:** Anel esférico



Fonte: A autora.

**Teorema 2.7.** O volume do anel esférico  $AE$  de altura  $h$  é dado por

$$\mathcal{V}(AE) = \frac{\pi h}{6} \ell^2,$$

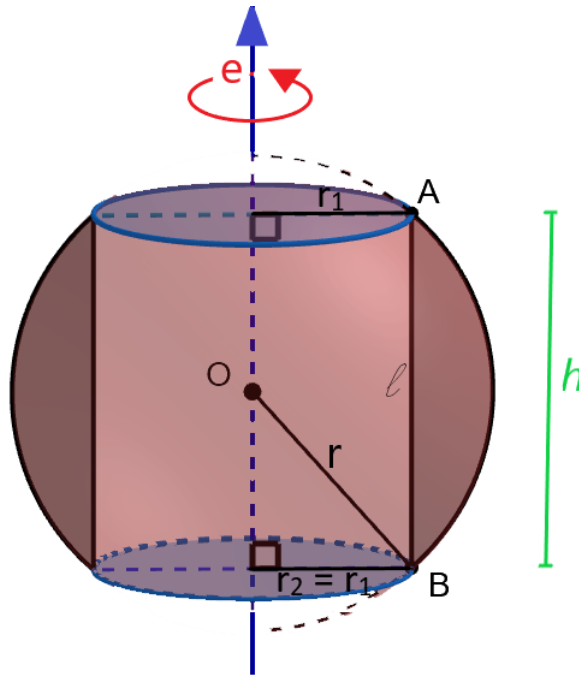
onde  $\ell$  é a medida da corda que define a base do segmento circular.

*Demonstração.*

Para provar o Teorema 2.7, precisamos considerar três casos distintos.

**1º caso:** A corda que define o segmento circular de uma base é paralela ao eixo  $e$  de rotação, como ilustra a Figura 2.33.

**Figura 2.33:** Anel esférico do 1º caso



Fonte: A autora.

Neste caso, temos que o volume do anel esférico é dado pela diferença entre os volumes de um segmento esférico de duas bases, de altura  $h$  e raios  $r_1$  e  $r_2 = r_1$ , e de um cilindro reto de altura  $h$  e raio  $r_1$ . Portanto, empregando (2.47), obtemos:

$$\mathcal{V}(AE) = \mathcal{V}(\text{segmento esférico}) - \mathcal{V}(\text{cilindro});$$

$$\mathcal{V}(AE) = \frac{\pi h}{6} [3(r_1^2 + r_1^2) + h^2] - \pi r_1^2 h;$$

$$\mathcal{V}(AE) = \frac{\pi h}{6} (6r_1^2 + h^2 - 6r_1^2);$$

$$\mathcal{V}(AE) = \frac{\pi h}{6} h^2. \quad (2.57)$$

Como

$$h = \ell, \quad (2.58)$$

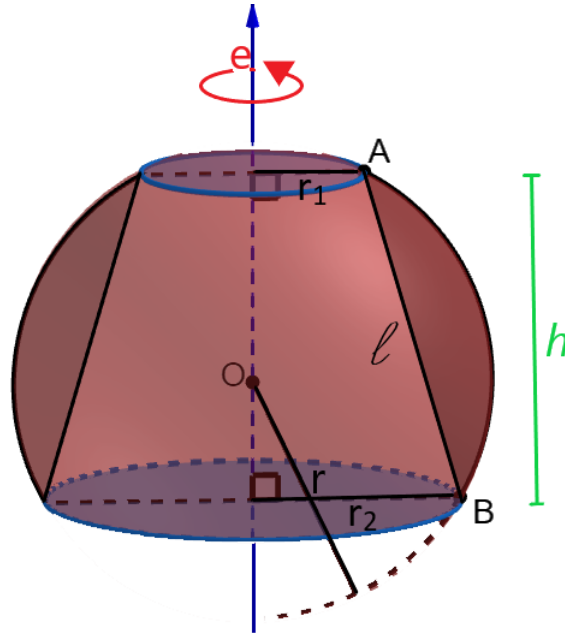
substituindo (2.58) em (2.57) concluímos que

$$\mathcal{V}(AE) = \frac{\pi h}{6} \ell^2,$$

o que confirma a tese do Teorema 2.7.

**2º caso:** A corda que define o segmento circular de uma base não é paralela ao eixo  $e$  de rotação e não tem pontos comuns com o eixo, como ilustra a Figura 2.34.

**Figura 2.34:** Anel esférico do 2º caso



Fonte: A autora.

Neste caso, temos que o volume do anel esférico é dado pela diferença entre os volumes de um segmento esférico de duas bases, de altura  $h$  e raios  $r_1$  e  $r_2$ , e de um tronco de cone reto de bases paralelas de altura  $h$  e raios  $r_1$  e  $r_2$ . Logo, empregando (2.47), obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(AE) &= \mathcal{V}(\text{segmento esférico}) - \mathcal{V}(\text{tronco de cone}); \\ \mathcal{V}(AE) &= \frac{\pi h}{6} [3(r_1^2 + r_2^2) + h^2] - \frac{\pi h}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2); \\ \mathcal{V}(AE) &= \frac{\pi h}{6} (3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2 - 2r_1^2 - 2r_1 r_2 - 2r_2^2); \\ \mathcal{V}(AE) &= \frac{\pi h}{6} (r_1^2 - 2r_1 r_2 + r_2^2 + h^2); \\ \mathcal{V}(AE) &= \frac{\pi h}{6} [(r_1 - r_2)^2 + h^2]. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Usando o teorema de Pitágoras no trapézio retângulo de bases  $r_1$  e  $r_2$  e altura  $h$ , obtemos que:

$$(r_2 - r_1)^2 + h^2 = \ell^2. \quad (2.60)$$

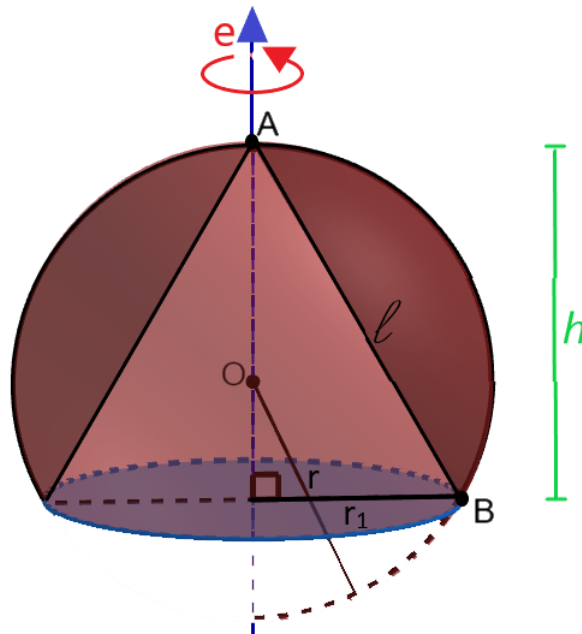
Substituindo (2.60) em (2.59), concluímos que

$$\mathcal{V}(AE) = \frac{\pi h}{6} \ell^2,$$

o que corrobora a tese do Teorema 2.7.

**3º caso:** A corda que define o segmento circular de uma base não é paralela ao eixo  $e$  de rotação e tem um extremo pertencente ao eixo, como ilustra a Figura 2.35.

**Figura 2.35:** Anel esférico do 3º caso



Fonte: A autora.

Neste caso, temos que o volume do anel esférico é dado pela diferença entre os volumes de um segmento esférico de uma base, de altura  $h$  e raio  $r_1$ , e de um cone reto de altura  $h$  e raio  $r_1$ . Assim, empregando (2.47) com  $r_2 = 0$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(AE) &= \mathcal{V}(\text{segmento esférico}) - \mathcal{V}(\text{cone}); \\ \mathcal{V}(AE) &= \frac{\pi h}{6} (3r_1^2 + h^2) - \frac{1}{3} \pi r_1^2 h; \\ \mathcal{V}(AE) &= \frac{\pi h}{6} (3r_1^2 + h^2 - 2r_1^2); \\ \mathcal{V}(AE) &= \frac{\pi h}{6} (r_1^2 + h^2). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Como

$$r_1^2 + h^2 = \ell^2, \quad (2.62)$$

substituindo (2.62) em (2.61) concluimos que

$$\mathcal{V}(AE) = \frac{\pi h}{6} \ell^2,$$

o que confirma a tese do Teorema 2.7.

□

### 3 SUPERFÍCIES ESFÉRICAS

Neste capítulo, apresentamos métodos para calcular a área da superfície esférica, como também a área de algumas porções da superfície esférica. No cálculo da área da superfície esférica, abordamos esferas circunscritas, a decomposição em pirâmides, o primeiro teorema de Pappus e a área lateral do tronco de cone reto. Abordagens da área por intermédio do Cálculo Diferencial e Integral podem ser encontradas em (MOTTA, 2018), em (SPIVAK, 2008) e em (STEWART, 2017b).

#### 3.1 DEFINIÇÕES

**Definição 3.1.** *Sejam um ponto  $O$  e um segmento de medida  $r$ . A superfície esférica  $\mathcal{S}$  de centro  $O$  e raio  $r$  é o conjunto dos pontos  $P$  do espaço tridimensional tais que a medida  $\overline{OP}$  é igual a  $r$ .*

Na Definição 3.1, a superfície esférica  $\mathcal{S}$  é definida como um lugar geométrico. Podemos transcrever essa definição em linguagem simbólica como:

$$\mathcal{S}(O, r) = \{P \in \mathbb{R}^3; d(P, O) = r\}.$$

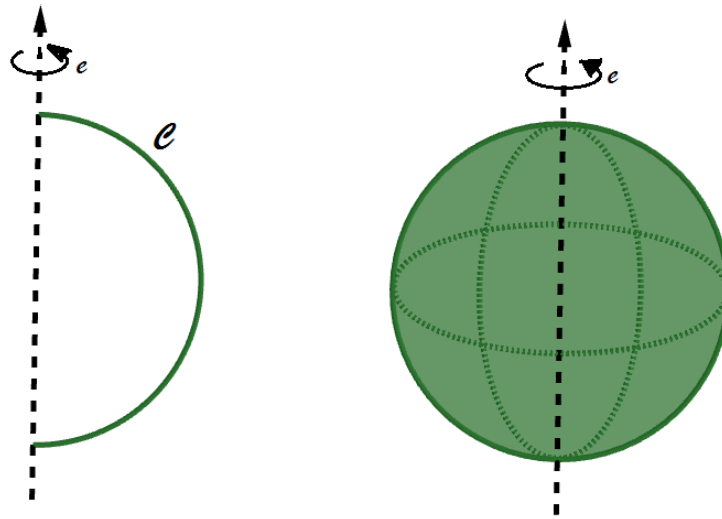
A superfície esférica também pode ser definida como uma superfície de revolução, isto é, a superfície esférica pode ser obtida pela rotação completa de uma semicircunferência  $\mathcal{C}$  em torno de um eixo de revolução  $e$  que contém o diâmetro da semicircunferência, como ilustra a Figura 3.1.

#### 3.2 ÁREA DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

**Teorema 3.1.** *A área da superfície esférica  $\mathcal{S}$  de raio  $r$  é dado por*

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = 4\pi r^2.$$

**Figura 3.1:** A superfície esférica como superfície de revolução



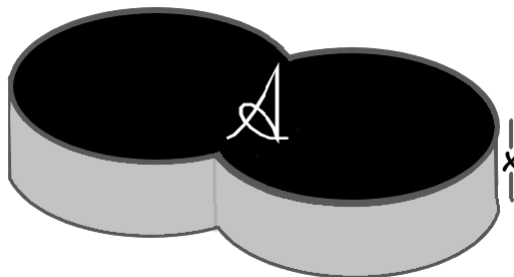
Fonte: A autora.

Há muitas formas de se provar o Teorema 3.1 (LIMA, 2011)(NETO, 2013). A seguir, abordamos algumas estratégias.

### 3.2.1 ESFERAS CIRCUNSCRITAS

Consideremos uma figura de área  $\mathcal{A}$  e um sólido de altura  $x$  e bases paralelas congruentes à figura de área  $\mathcal{A}$ , como mostra a Figura 3.2.

**Figura 3.2:** Noção intuitiva de volume:  $\mathcal{V} = \mathcal{A} \cdot x$



Fonte: A autora.

Assim, o sólido pode ser considerado intuitivamente como o “empilhamento” da figura de área  $\mathcal{A}$  ao longo da altura  $x$ , sendo o volume do mesmo dado por

$$\mathcal{V}(\text{sólido}) = \mathcal{A}(\text{figura}) \cdot x,$$

do que decorre

$$\mathcal{A}(\text{figura}) = \frac{\mathcal{V}(\text{sólido})}{x}. \quad (3.1)$$

Quando consideramos  $x \rightarrow 0$ , o sólido se “aproxima” da figura e podemos reescrever (3.1) como:

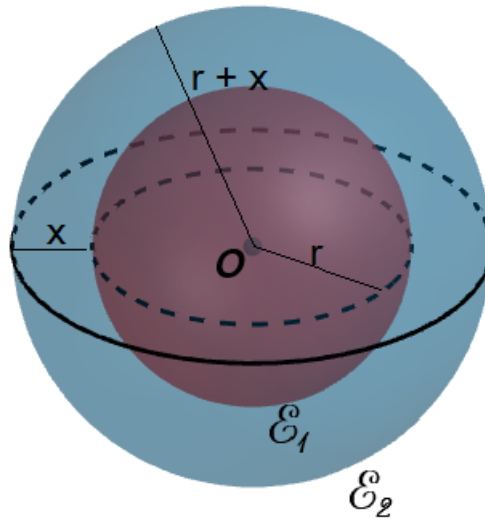
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\mathcal{V}(\text{sólido})}{x} = \mathcal{A}(\text{figura}). \quad (3.2)$$

Podemos empregar a ideia expressa em (3.2) para calcular a área da superfície esférica, ou seja, provar o Teorema (3.1), o que fazemos na sequência.

*Demonstração.*

Sejam  $\mathcal{E}_1$  e  $\mathcal{E}_2$  esferas concêntricas de centro  $O$  e de raios respectivamente iguais a  $r$  e  $r+x$ , como ilustra a Figura 3.3.

**Figura 3.3:** Esferas concêntricas  $\mathcal{E}_1$  e  $\mathcal{E}_2$  de raios respectivamente iguais a  $r$  e  $r+x$



Fonte: A autora.

Calculando a diferença entre os volumes de  $\mathcal{E}_2$  e de  $\mathcal{E}_1$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\mathcal{E}_2) - \mathcal{V}(\mathcal{E}_1) &= \frac{4}{3}\pi(r+x)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3; \\ \mathcal{V}(\mathcal{E}_2) - \mathcal{V}(\mathcal{E}_1) &= \frac{4}{3}\pi \left[ (r+x)^3 - r^3 \right]; \\ \mathcal{V}(\mathcal{E}_2) - \mathcal{V}(\mathcal{E}_1) &= \frac{4}{3}\pi (3r^2x + 3rx^2 + x^3); \\ \mathcal{V}(\mathcal{E}_2) - \mathcal{V}(\mathcal{E}_1) &= \frac{4}{3}\pi x (3r^2 + 3rx + x^2); \\ \frac{\mathcal{V}(\mathcal{E}_2) - \mathcal{V}(\mathcal{E}_1)}{x} &= \frac{4}{3}\pi (3r^2 + 3rx + x^2). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Usando a ideia expressa em (3.2), temos em (3.3) que

$$\frac{\mathcal{V}(\mathcal{E}_2) - \mathcal{V}(\mathcal{E}_1)}{x} \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{E}_1)$$

quando

$$x \rightarrow 0.$$

Dessa forma, concluímos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\mathcal{V}(\mathcal{E}_2) - \mathcal{V}(\mathcal{E}_1)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{3} \pi (3r^2 + 3rx + x^2); \\ \mathcal{A}(\mathcal{E}_1) &= \frac{4}{3} \pi (3r^2); \\ \mathcal{A}(\mathcal{E}_1) &= 4\pi r^2, \end{aligned}$$

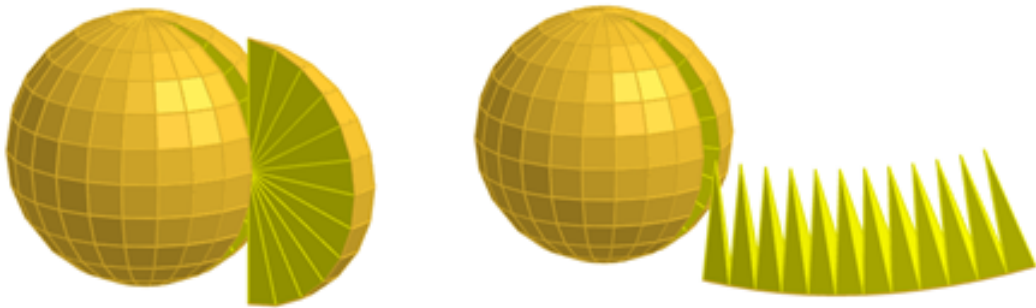
o que corrobora a tese do Teorema 3.1.

□

### 3.2.2 DECOMPOSIÇÃO EM PIRÂMIDES

Outra estratégia para aproximar a área da superfície esférica consiste na divisão da esfera em pirâmides, como ilustra a Figura 3.4 (OR, 2019). Neste caso, precisamos conhecer o volume da esfera, determinado pelo Teorema 2.1.

**Figura 3.4:** Esfera decomposta em pirâmides



Fonte: Or (2019).

*Demonstração.*

Seja uma pirâmide de altura  $h$ . Dessa forma, o volume  $\mathcal{V}$  da pirâmide é dado por

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \mathcal{A} h, \tag{3.4}$$

onde  $\mathcal{A}$  é a medida da área da base da pirâmide (DOLCE; POMPEO, 2011) (NETO, 2013).

De (3.4), decorre que

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{V}} = \frac{3}{h}. \quad (3.5)$$

Suponhamos agora uma esfera de raio  $r$  decomposta, a partir do centro, em  $n$  pirâmides de altura  $h \approx r$ . Assim:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\text{superfície esférica}) &\approx n\mathcal{A}; \\ \mathcal{A} &\approx \frac{\mathcal{A}(\text{superfície esférica})}{n}; \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\text{esfera}) &\approx n\mathcal{V}; \\ \mathcal{V} &\approx \frac{\mathcal{V}(\text{esfera})}{n}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Quando consideramos  $n \rightarrow \infty$ , temos que  $h \rightarrow r$ , a soma das áreas das bases das pirâmides tende à área da superfície esférica e a soma dos volumes das pirâmides tende ao volume da esfera. Logo, substituindo (3.6) e (3.7) em (3.5), obtemos, no limite:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}(\text{superfície esférica})}{\mathcal{V}(\text{esfera})} &= \frac{3}{r}; \\ \mathcal{A}(\text{superfície esférica}) &= \frac{3}{r} \mathcal{V}(\text{esfera}). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Como provamos no Capítulo 2 que

$$\mathcal{V}(\text{esfera}) = \frac{4}{3} \pi r^3, \quad (3.9)$$

substituindo (3.9) em (3.8), concluímos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\text{superfície esférica}) &= \frac{3}{r} \frac{4}{3} \pi r^3; \\ \mathcal{A}(\text{superfície esférica}) &= 4\pi r^2, \end{aligned}$$

o que confirma a tese do Teorema 3.1.

□

A relação (3.8) pode ser empregada também para calcular o volume da esfera quando conhecida a área da superfície esférica.

### 3.2.3 APLICAÇÃO DO PRIMEIRO TEOREMA DE PAPPUS

Conforme Lima et al. (2006), utilizamos o primeiro teorema de Pappus para comprovar o Teorema 3.1

**Definição 3.2.** *Sejam uma linha poligonal  $P$ , formada por  $n$  segmentos consecutivos  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots, \ell_k, \dots, \ell_n$  de comprimentos respectivamente iguais a  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots, a_n$ , e  $(x_k, y_k)$  o ponto médio do segmento  $\ell_k$ . Dessa forma, o baricentro ou centro de gravidade  $G$  de  $P$  tem coordenadas dadas por:*

$$x = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k + \dots + a_nx_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots + a_n}; \quad (3.10)$$

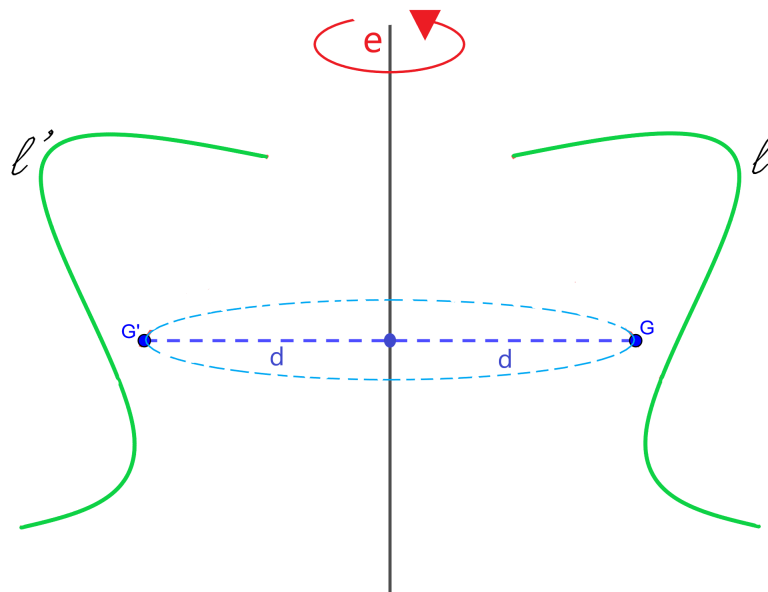
$$y = \frac{a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_ky_k + \dots + a_ny_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots + a_n}. \quad (3.11)$$

**Teorema 3.2** (Primeiro teorema de Pappus). *Se uma linha plana é rotacionada em torno de um eixo de seu plano, de tal maneira que o eixo não intersecta a linha, então a área da superfície gerada pela rotação da linha é igual ao comprimento da linha rotacionada multiplicada pelo comprimento da circunferência descrita pelo baricentro da linha.*

A Figura 3.5 ilustra a rotação ou giro de  $360^\circ$  de uma linha  $\ell$  de comprimento  $a$  cujo baricentro  $G$  está a uma distância  $d$  do eixo de revolução  $e$ . Como cada ponto de  $\ell$  descreve uma circunferência na rotação, temos, pelo Teorema 3.2, que a área da superfície gerada pela rotação da linha  $\ell$  de comprimento  $a$  é igual a

$$\mathcal{A}(\text{superfície revolução}) = 2\pi da. \quad (3.12)$$

**Figura 3.5:** Rotação da linha  $\ell$  em torno do eixo  $e$



Fonte: A autora.

A prova generalista do Teorema 3.2 pode ser encontrada em (RAUTENBERG, 2013).

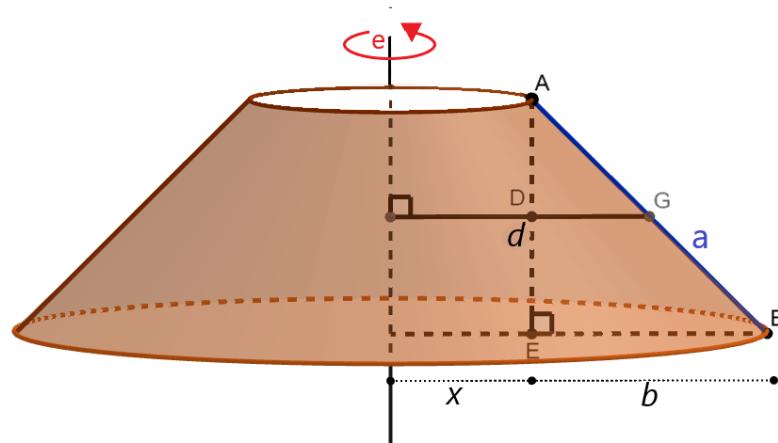
Vamos provar esse teorema para um caso particular, a rotação de um segmento oblíquo e disjunto ao eixo de rotação, e, em seguida, empregar o Teorema 3.2 para provar o Teorema 3.1.

### 1. Rotação de um segmento de reta oblíquo ao eixo

*Demonstração.*

Seja um segmento de reta  $\overline{AB}$  de comprimento  $a$  cujo baricentro  $G$  está a uma distância  $d$  do eixo de revolução  $e$ , este oblíquo ao segmento e distando  $x$  do extremo  $A$  do segmento, como ilustra a Figura 3.6.

**Figura 3.6:** Rotação de um segmento de reta  $\overline{AB}$  em torno do eixo  $e$



Fonte: A autora.

A rotação do segmento de reta  $\overline{AB}$  em torno de  $e$  gera uma superfície de revolução cuja área é igual à área da superfície lateral de um tronco de cone reto de bases paralelas, de raios  $x$  e  $x + b$  e geratriz  $g$  igual ao comprimento  $a$  de  $\overline{AB}$ . Como a área lateral  $\mathcal{A}_\ell$  do tronco de cone de bases paralelas é dada por  $\pi g (r_1 + r_2)$ , sendo  $g$  a geratriz e  $r_1$  e  $r_2$  os raios das bases do tronco de cone (DOLCE; POMPEO, 2011) (NETO, 2013), temos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\text{superfície revolução}) &= \mathcal{A}_\ell(\text{tronco cone}); \\ \mathcal{A}(\text{superfície revolução}) &= \pi a (b + x + x); \\ \mathcal{A}(\text{superfície revolução}) &= \pi a (b + 2x).\end{aligned}\tag{3.13}$$

Na Figura 3.6, o ponto  $G$  é o ponto médio do segmento  $\overline{AB}$  (LIMA et al., 2006) e os triângulos  $ADG$  e  $AEB$  são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo). Dessa maneira, temos que:

$$\frac{\overline{DG}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AB}};$$

$$\begin{aligned}\frac{\overline{DG}}{b} &= \frac{\frac{a}{2}}{a}, \\ \overline{DG} &= \frac{b}{2}.\end{aligned}\tag{3.14}$$

Utilizando (3.14), concluimos que:

$$d = x + \frac{b}{2} \Rightarrow x = d - \frac{b}{2}.\tag{3.15}$$

Substituindo (3.15) em (3.13), obtemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\text{superfície revolução}) &= \pi a \left[ b + 2 \left( d - \frac{b}{2} \right) \right]; \\ \mathcal{A}(\text{superfície revolução}) &= 2\pi da,\end{aligned}$$

o que corrobora (3.12).

□

## 2. Área da superfície esférica

*Demonstração.*

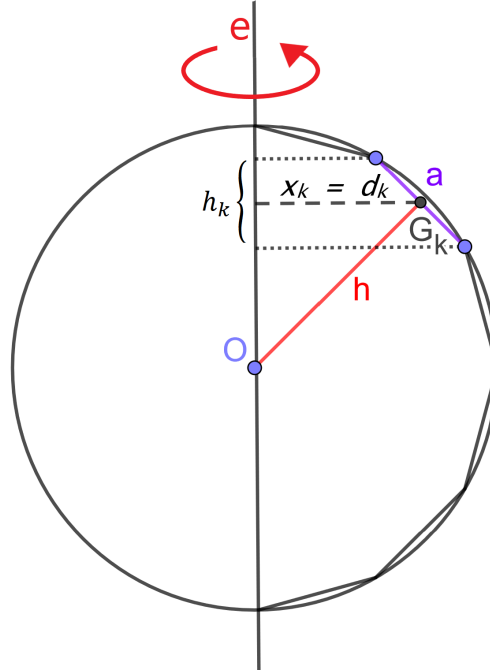
Seja uma semicircunferência  $\mathcal{C}$  de raio  $r$  cujo diâmetro está contido no eixo de revolução  $e$ , dividida em  $n$  partes iguais. Temos assim uma linha poligonal  $P$  inscrita na semicircunferência, dividida em  $n$  segmentos  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k, \dots, \ell_n$  congruentes de comprimento  $a$ . Em cada segmento  $\ell_k$ , o baricentro  $G_k$ , ponto médio de  $\ell_k$ , dista  $d_k = x_k$  do eixo  $e$ ,  $h$  é a distância do centro  $O$  da semicircunferência ao ponto médio de  $\ell_k$  e  $h_k$  é a medida do segmento que corresponde à projeção ortogonal de  $\ell_k$  sobre  $e$ , como indicado na Figura 3.7.

Podemos determinar a distância  $d$  do baricentro  $G$  de  $P$  ao eixo  $e$  utilizando a relação (3.10). Considerando o eixo horizontal perpendicular a  $e$  e passando por  $O$ , temos da relação (3.11) que a ordenada de  $G$  é  $y = 0$ , uma vez que as  $n$  partes de  $P$  têm o mesmo comprimento e que há simetria em relação ao eixo  $Ox$ . Da relação (3.10), obtemos para a abscissa  $x = d$  de  $G$ :

$$d = \frac{ad_1 + ad_2 + \dots + ad_k + \dots + ad_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots + a_n}.\tag{3.16}$$

Empregando em (3.16)  $d_k = x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , e  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$ , temos que:

**Figura 3.7:** Rotação de uma semicircunferência em torno do eixo  $e$  para gerar a superfície esférica



Fonte: A autora.

$$d = \frac{ax_1 + ax_2 + \cdots + ax_k + \cdots + ax_n}{a + a + \cdots + a},$$

$$d = \frac{ax_1 + ax_2 + \cdots + ax_k + \cdots + ax_n}{na}. \quad (3.17)$$

Do Lema 2.1, temos que  $ax_k = hh_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Utilizando esse resultado em (3.17), obtemos:

$$d = \frac{hh_1 + hh_2 + \cdots + hh_k + \cdots + hh_n}{na},$$

$$d = \frac{h(h_1 + h_2 + \cdots + h_k + \cdots + h_n)}{na}. \quad (3.18)$$

Em (3.18),  $h_1 + h_2 + \cdots + h_n = 2r$ . Portanto:

$$d = \frac{h}{na} 2r. \quad (3.19)$$

Quando  $n$  cresce ( $n \rightarrow \infty$ ), a distância  $h$  do centro  $O$  de  $\mathcal{C}$  ao ponto médio de cada parte  $\ell_k$  de  $P$  se aproxima da medida do raio  $r$  e a soma dos  $n$  comprimentos  $a$  de  $P$ , ou seja,  $na$ , se aproxima do comprimento da semicircunferência, isto é,  $\pi r$ . Dessa forma, no limite, podemos reescrever (3.19) como:

$$\begin{aligned}
 d &= \frac{r}{\pi r} 2r; \\
 d &= \frac{2r}{\pi}.
 \end{aligned}
 \tag{3.20}$$

Pelo Teorema 3.2, usando (3.20) em (3.12) concluímos que:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(\text{superfície esférica}) &= 2\pi da; \\
 \mathcal{A}(\text{superfície esférica}) &= 2\pi \frac{2r}{\pi} \pi r; \\
 \mathcal{A}(\text{superfície esférica}) &= 4\pi r^2,
 \end{aligned}$$

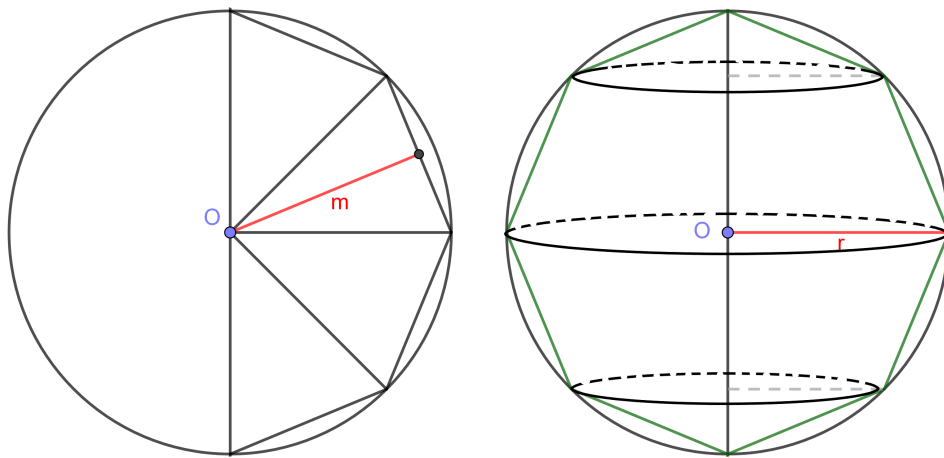
resultado que corrobora a tese do Teorema 3.1.

□

### 3.2.4 ÁREA LATERAL DO TRONCO DE CONE

Podemos calcular, como em Lima (2011), a área da superfície esférica inscrevendo um polígono regular de  $2n$  lados em uma circunferência. A rotação da semicircunferência gera a superfície esférica, enquanto a parte do polígono regular inscrita na semicircunferência gera a superfície lateral de  $n - 2$  troncos de cone retos de bases paralelas e dois cones circulares retos, como ilustra a Figura 3.8.

**Figura 3.8:** Rotação de um polígono regular inscrito em uma circunferência

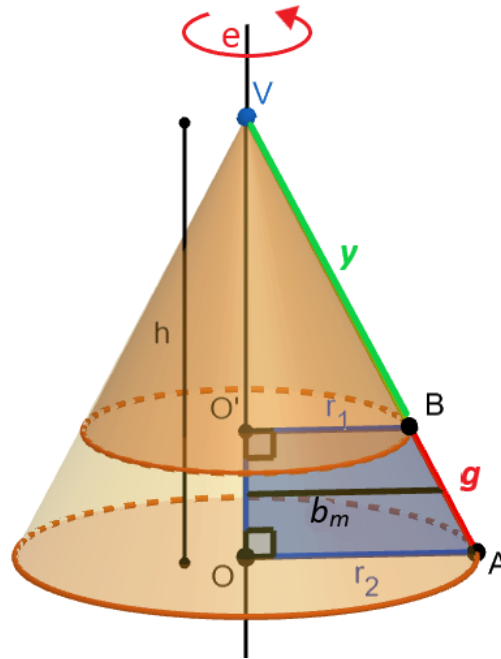


Fonte: A autora.

**Lema 3.1.** *A área lateral do tronco de cone reto de bases paralelas é igual ao produto da geratriz pelo comprimento da circunferência média.*

A circunferência média a qual se refere o Lema 3.1 é a circunferência de raio  $b_m = \frac{r_1 + r_2}{2}$ , onde  $r_1$  e  $r_2$  são os raios das bases do tronco de cone reto de bases paralelas, como mostra a Figura 3.9. Assim, o comprimento da circunferência média é igual a  $2\pi b_m$ .

**Figura 3.9:** Base média  $b_m$  do trapézio retângulo que gera na revolução o tronco de cone reto de bases paralelas



Fonte: A autora.

*Demonstração.*

Sejam:  $g$  a geratriz do tronco de cone reto de bases paralelas gerado pela rotação do trapézio retângulo  $OO'BA$ ;  $g+y$  a geratriz do cone circular reto gerado pela rotação do triângulo retângulo  $VOA$ ;  $b_m$  a base média do trapézio retângulo  $OO'BA$ , como indicado na Figura 3.9. Nesta, os triângulos retângulos  $VO'B$  e  $VOA$  são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo). Dessa forma, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{r_1}{r_2} &= \frac{y}{g+y}; \\ r_1(g+y) &= r_2y; \\ r_1g &= y(r_2 - r_1). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Somando  $r_2g$  a ambos os lados de (3.21), obtemos:

$$\begin{aligned} r_1g + r_2g &= yr_2 - yr_1 + r_2g; \\ g(r_1 + r_2) &= r_2(g+y) - r_1y; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2g \left( \frac{r_1 + r_2}{2} \right) &= r_2 (g + y) - r_1 y; \\
2gb_m &= r_2 (g + y) - r_1 y.
\end{aligned}
\tag{3.22}$$

Multiplicando ambos os lados de (3.22) por  $\pi$ , concluímos que:

$$2\pi b_m g = \pi r_2 (g + y) - \pi r_1 y. \tag{3.23}$$

Em (3.23), no lado esquerdo temos o produto do comprimento da circunferência média pela geratriz. Já no lado direito,  $\pi r_2 (g + y)$  é a área lateral do cone circular reto gerado pela rotação do triângulo retângulo  $VOA$  e  $\pi r_1 y$ , a área lateral do cone circular reto gerado pela rotação do triângulo retângulo  $VO'B$ . Assim, a diferença  $\pi r_2 (g + y) - \pi r_1 y$  é a área lateral do tronco de cone reto de bases paralelas gerado pela rotação do trapézio retângulo  $OO'BA$ .

□

**Lema 3.2.** *A área lateral do tronco de cone reto de bases paralelas é igual ao produto do comprimento da circunferência que tem como raio o apótema do polígono regular inscrito pela altura do tronco.*

*Demonstração.*

Sejam  $m$  o apótema do polígono regular inscrito na circunferência e  $b_m$ ,  $g$  e  $h$ , respectivamente, a base média, a geratriz e a altura do tronco de cone reto de bases paralelas gerado pela rotação do trapézio retângulo  $OO'BA$  - Figura 3.9.

Pelo Lema 2.1, temos que:

$$b_m g = mh. \tag{3.24}$$

Multiplicando por  $2\pi$  ambos os membros de (3.24), concluímos que:

$$2\pi b_m g = 2\pi mh. \tag{3.25}$$

Segundo o Lema 3.2,  $2\pi b_m g$  é no membro esquerdo de (3.25) a área lateral do tronco de cone reto de bases paralelas. Já  $2\pi m$  é, no membro direito, o comprimento da circunferência cujo raio é o apótema  $m$  do polígono regular inscrito.

□

Empregamos agora o Lema 3.2 para provar a área da superfície esférica, ou seja, o Teorema 3.1.

*Demonstração.*

Pelo Lema 3.2, a área lateral do tronco de cone reto de bases paralelas é dado por

$$\mathcal{A}_\ell(\text{tronco cone}) = 2\pi mh. \quad (3.26)$$

A área da superfície esférica é aproximada pela soma das áreas laterais dos  $n$  troncos de cone reto de bases paralelas - Figura 3.8, onde os troncos inferior e superior têm uma das bases com raio nulo.

Assim, empregando (3.26), temos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\text{superfície esférica}) &\approx 2\pi mh_1 + 2\pi mh_2 + \cdots + 2\pi mh_n; \\ \mathcal{A}(\text{superfície esférica}) &\approx 2\pi m(h_1 + h_2 + \cdots + h_n). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Em (3.27), a soma das alturas dos  $n$  troncos de cone retos de bases paralelas é igual ao diâmetro da esfera, ou seja,  $2r$ . Portanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\text{superfície esférica}) &\approx 2\pi m 2r; \\ \mathcal{A}(\text{superfície esférica}) &\approx 4\pi mr. \end{aligned} \quad (3.28)$$

A aproximação (3.28) melhora quando o número de lados do polígono regular inscrito aumenta. Dessa forma, para  $n \rightarrow \infty$ , temos que  $m \rightarrow r$ . Logo:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\text{superfície esférica}) &= 4\pi rr; \\ \mathcal{A}(\text{superfície esférica}) &= 4\pi r^2, \end{aligned}$$

o que confirma a tese do Teorema 3.1.

□

### 3.3 PRINCIPAIS PORÇÕES DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

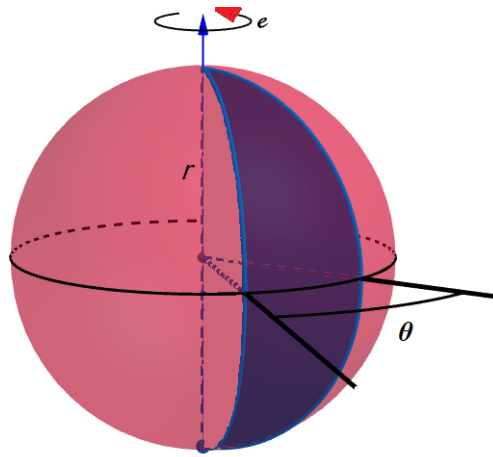
Deduzimos na sequência as relações para calcular a área de três porções da superfície esférica: o fuso esférico, a zona esférica e a calota esférica.

### 3.3.1 FUSO ESFÉRICO

**Definição 3.3.** *Fuso esférico é a porção da superfície esférica delimitada pela intersecção da superfície esférica com um diedro de medida  $\theta$  cuja aresta contém um diâmetro da superfície esférica.*

O fuso esférico também pode ser obtido pela rotação incompleta, segundo um ângulo  $\theta$ , de uma semicircunferência em torno de um eixo que contém o diâmetro da semicircunferência, como mostra a Figura 3.10.

**Figura 3.10:** Fuso esférico



Fonte: A autora.

A área do fuso esférico é proporcional ao ângulo  $\theta$  da rotação que o gerou. Assim:

$$\mathcal{A}(\text{fuso esférico}) = 4\pi r^2 \frac{\theta}{360^\circ};$$

$$\mathcal{A}(\text{fuso esférico}) = \frac{\pi r^2 \theta}{90^\circ},$$

ou então:

$$\mathcal{A}(\text{fuso esférico}) = 4\pi r^2 \frac{\theta}{2\pi};$$

$$\mathcal{A}(\text{fuso esférico}) = 2r^2 \theta,$$

sendo neste caso  $\theta$  um ângulo com medida em radianos.

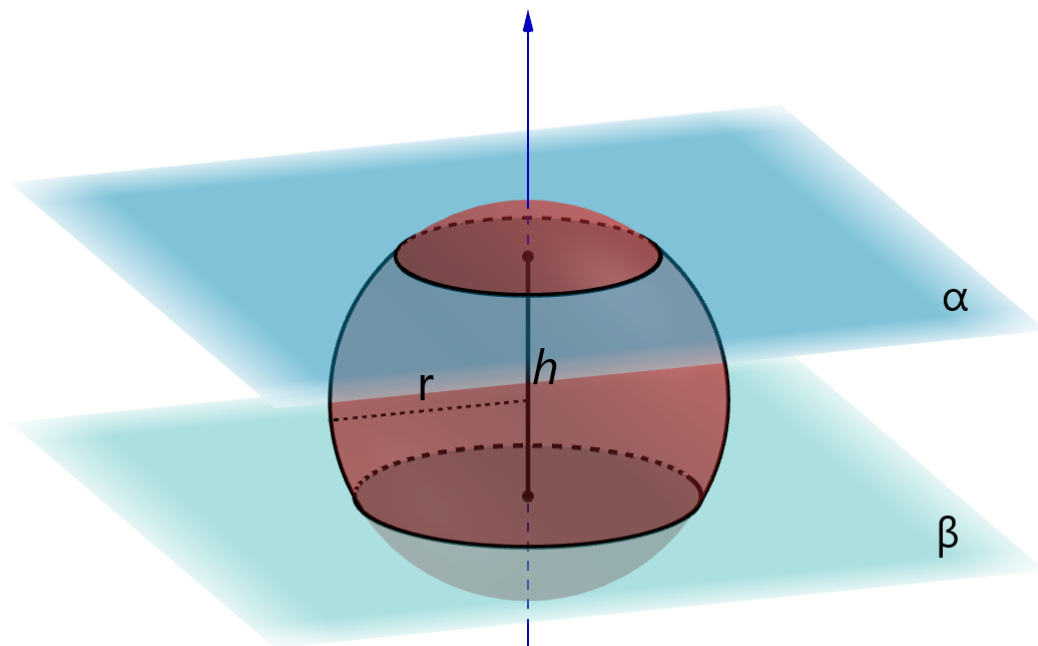
### 3.3.2 ZONA ESFÉRICA

**Definição 3.4.** *Zona esférica é a superfície de revolução cuja geratriz é um arco de circunferência e cujo eixo é uma reta que:*

- i) *passa pelo centro da circunferência que contém o arco;*
- ii) *não passa pelos extremos do arco e tampouco intersecta o arco em outro ponto;*
- iii) *é coplanar com o arco.*

A zona esférica também pode ser definida como sendo a porção da superfície esférica delimitada por dois planos paralelos  $\alpha$  e  $\beta$  secantes à superfície esférica, como mostra a Figura 3.11.

**Figura 3.11:** Zona esférica de altura  $h$



Fonte: A autora.

**Teorema 3.3.** *A área da zona esférica  $\mathcal{Z}$  de altura  $h$  é dada por*

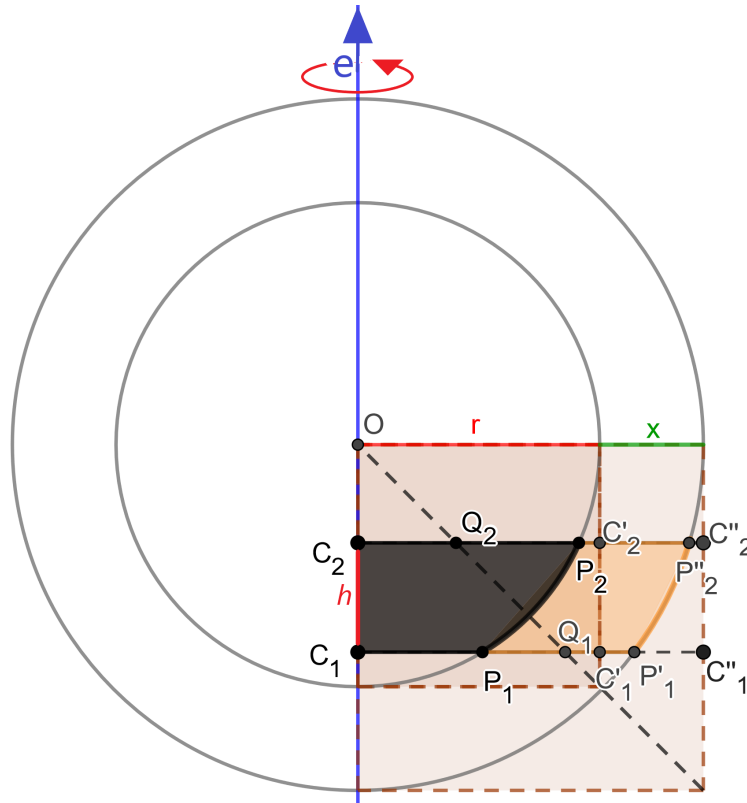
$$\mathcal{A}(\mathcal{Z}) = 2\pi rh,$$

*onde  $r$  é o raio da superfície esférica da qual  $\mathcal{Z}$  é uma porção.*

Demonstramos o Teorema 3.3 considerando dois segmentos esféricos de duas bases concêntricas, conforme a prova do volume do segmento esférico de duas bases constante no Capítulo 2.

*Demonstração.*

Sejam  $SE_1$  e  $SE_2$  dois segmentos esféricos de duas bases concêntricas de altura  $h$ , definidos em duas esferas concêntricas de raios respectivamente iguais a  $r$  e  $r + x$ . A Figura 3.12 ilustra uma seção que passa pelo centro das esferas concêntricas. Dessa forma, temos que:

**Figura 3.12:** Seção em duas esferas concêntricas

Fonte: A autora.

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(SE_1) &= \mathcal{V}(\text{cilindro } C_1C'_1C'_2C_2) - \mathcal{V}(\text{tronco de cone } C_1Q_1Q_2C_2); \\ \mathcal{V}(SE_1) &= \pi r^2 h - \mathcal{V}(\text{tronco de cone } C_1Q_1Q_2C_2); \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(SE_2) &= \mathcal{V}(\text{cilindro } C_1C''_1C''_2C_2) - \mathcal{V}(\text{tronco de cone } C_1Q_1Q_2C_2); \\ \mathcal{V}(SE_2) &= \pi(r+x)^2 h - \mathcal{V}(\text{tronco de cone } C_1Q_1Q_2C_2). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Calculando a diferença entre os volumes (3.30) e (3.29), obtemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(SE_2) - \mathcal{V}(SE_1) &= \pi(r+x)^2 h - \pi r^2 h; \\ \mathcal{V}(SE_2) - \mathcal{V}(SE_1) &= 2\pi r x h + \pi x^2 h; \\ \mathcal{V}(SE_2) - \mathcal{V}(SE_1) &= \pi h x (2r + x); \\ \frac{\mathcal{V}(SE_2) - \mathcal{V}(SE_1)}{x} &= \pi h (2r + x). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Usando a ideia expressa em (3.2), temos em (3.31) que

$$\frac{\mathcal{V}(SE_2) - \mathcal{V}(SE_1)}{x} \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{Z}_1)$$

quando

$$x \rightarrow 0.$$

Dessa forma, concluímos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\mathcal{V}(SE_2) - \mathcal{V}(SE_1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \pi h(2r + x);$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{L}_1) = 2\pi rh,$$

o que corrobora a tese do Teorema 3.3.

□

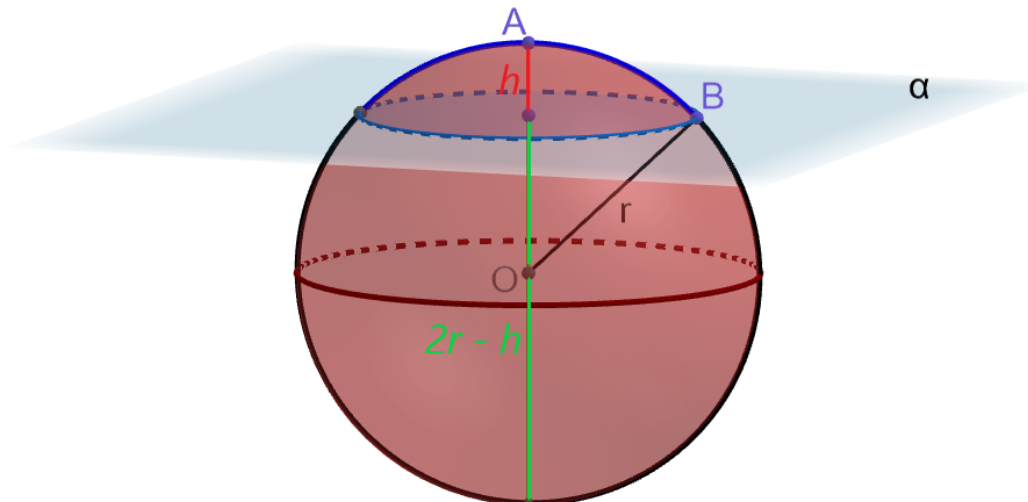
### 3.3.3 CALOTA ESFÉRICA

**Definição 3.5.** *Calota esférica é a superfície de revolução cuja geratriz é um arco de circunferência e cujo eixo é uma reta que:*

- i) *passa pelo centro da circunferência que contém o arco;*
- ii) *passa por um dos extremos do arco e não intersecta o arco em outro ponto;*
- iii) *é coplanar com o arco.*

A calota esférica também pode ser definida como sendo cada uma das porções da superfície esférica determinadas por um plano  $\alpha$  secante à superfície esférica, como mostra a Figura 3.13.

**Figura 3.13:** Calotas esféricas de alturas  $h$  e  $2r - h$



Fonte: A autora.

**Teorema 3.4.** *A área da calota esférica  $\mathcal{C}$  de altura  $h$  é dada por*

$$\mathcal{A}(\mathcal{C}) = 2\pi rh,$$

*onde  $r$  é o raio da superfície esférica da qual  $\mathcal{C}$  é uma porção.*

A prova do Teorema 3.4 é análoga à prova do Teorema 3.3.

## 4 APLICAÇÕES E ATIVIDADES PARA A SALA DE AULA

Apresentamos neste capítulo algumas aplicações da esfera e três atividades para a sala de aula sobre o volume da esfera que podem ser adaptadas para o Ensino Médio. Essas atividades abordam os princípios do empuxo e da alavanca de Arquimedes e o princípio de Cavalieri, sendo este último explorado no GeoGebra 3D (GEOGEBRA3D, 2019).

### 4.1 APLICAÇÕES DA ESFERA

#### 4.1.1 A BOLA DE FUTEBOL QUE GERA ENERGIA ELÉTRICA

A energia elétrica não é um benefício oferecido em todos os lugares do mundo, ou ainda, se é oferecida não há disponibilidade para todos os habitantes devido à insuficiência de dinheiro para se pagar por tal serviço.

Tendo em vista este problema, quatro estudantes americanas inventaram uma bola de futebol, ilustrada na Figura 4.1 (CONHECIMENTOCIENTÍFICO, 2019), e a distribuíram em alguns lugares sem acesso à energia elétrica. O objetivo era que a bola fosse usada durante o dia por crianças em um simples jogo de futebol, pois, segundo as inventoras, armazenaria energia suficiente para manter uma lâmpada de LED acesa à noite por 3 horas se utilizada por 30 minutos em um jogo.

**Figura 4.1:** Bola de futebol que armazena energia elétrica através de energia cinética



Fonte: Conhecimentocientífico (2019).

O princípio de funcionamento é gerar energia elétrica a partir da energia cinética associada ao movimento da bola. Michael Faraday (1791-1867), físico e químico britânico, descobriu em agosto de 1831 a indução eletromagnética, fenômeno no qual o movimento de um ímã nas proximidades de um condutor elétrico gera corrente elétrica. A descoberta foi uma grande revolução à época porque possibilitou a geração de energia elétrica.

A bola de futebol, batizada de *Soccket*, funciona por intermédio de componentes magnéticos internos, ilustrados na Figura 4.2, que geram corrente elétrica durante a rolagem da bola no jogo. A carga elétrica gerada é armazenada em uma bateria interna à bola e, à noite, essa mesma bateria interna transmite energia elétrica para o funcionamento da lâmpada de LED.

**Figura 4.2:** Componentes magnéticos internos da bola que armazena energia



Fonte: Conhecimentocientífico (2019).

O segredo escondido por trás deste mecanismo é um pêndulo de zinco, responsável por captar energia do movimento. Ele aciona um gerador conectado a uma bateria Li-Ion que armazena a carga. O invólucro da bola é feito de plástico e espuma de EVA recicláveis que impedem a descarga acidental de corrente elétrica. As engrenagens internas fazem com que a bola pese cerca de 30 gramas a mais do que uma bola convencional.

A bola que gera energia é uma grande invenção utilizada em vilarejos africanos, beneficiando principalmente estudantes já que a iluminação proporcionada possibilita que eles se livrem do incômodo causado pela fumaça e gases tóxicos liberados pelas lamparinas e velas.

#### 4.1.2 TANQUES DE ARMAZENAMENTO DE GÁS

Um tanque de armazenamento de gás pode ter vários formatos, porém o esférico é o mais recomendado porque essa forma geométrica permite que, quando esvaziado, um resíduo mínimo permaneça no interior do tanque. A ausência de vértices possibilita uma liberação mais eficiente do gás contido no tanque esférico. Com o aumento da utilização de gás natural

liquefeito (GNL) no mundo, o transporte desse gás tem sido efetuado através dos oceanos por navios que carregam cerca de cinco tanques esféricos de alumínio.

Outra justificativa para o uso de tanques de armazenamento esféricos é o armazenamento de hidrogênio líquido. Para atingir o estado líquido, o hidrogênio deve estar abaixo do seu ponto de ebulição à pressão ambiente ( $-253^{\circ}\text{C}$ ) em um tanque muito bem isolado, geralmente com vácuo entre duas camadas, como em uma garrafa térmica. Os tanques de armazenamento não precisam ser altamente reforçados como acontece com os cilindros de alta pressão, mas precisam ser adequadamente robustos para aplicações automotivas (AMBIENTEBRASIL, 2019).

Como todos os tanques permitem a troca de calor com o ambiente externo, o calor faz com que parte do hidrogênio evapore e a pressão interna no tanque diminua, o que ocasiona uma perda de gás. Para diminuir a perda por evaporação, a maioria dos tanques para armazenamento de hidrogênio líquido tem o formato esférico, como ilustrado na Figura 4.3, pois a taxa de transferência de calor, que depende da área da superfície do tanque, será menor uma vez que a forma esférica tem a menor superfície para um determinado volume.

**Figura 4.3:** Tanques esféricos para armazenamento de hidrogênio



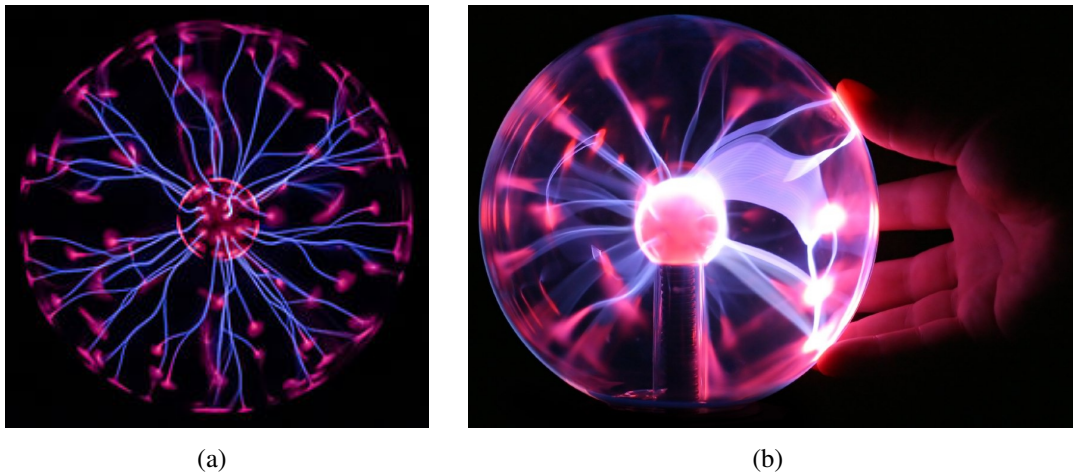
Fonte: Ambientebrasil (2019).

#### 4.1.3 GLOBO DE PLASMA

O globo de plasma é uma estrutura constituída por uma esfera de vidro, preenchida com um gás em baixa pressão, e por um eletrodo central em alta voltagem. Nessa estrutura, descargas elétricas provocam a excitação e a ionização dos átomos de gás, que emitem luz quando voltam ao estado inicial, como mostra a Figura 4.4(a) (WIKIPÉDIA, 2019).

De maneira análoga ao tanque de armazenamento de hidrogênio, o globo de plasma

**Figura 4.4:** Globo de plasma: (a) em funcionamento; (b) reação ao toque de uma pessoa



Fonte: Wikipédia (2019).

tem formato esférico devido à presença de gás inerte, comumente hélio, néon (neônio) ou argônio. A baixa pressão interna aumenta o caminho livre médio entre os átomos antes que estes colidam uns com os outros. Se o percurso livre médio é longo, os átomos portadores de cargas aceleram durante maior intervalo de tempo e, com isso, adquirem maior energia cinética entre as colisões e, o mais importante, fazem isso com a aplicação de um campo elétrico moderado. Desse modo, os efeitos das descargas elétricas são mais fortes em um gás rarefeito submetido a campos elétricos moderados do que os observados em gases sob pressão atmosférica submetidos a campos elétricos intensos.

Sob o efeito do campo elétrico que cerca o eletrodo central do globo, ocorre a ionização do gás rarefeito e se observa então o abundante faiscamento entre o eletrodo central e a superfície do globo. O faiscamento não tem direção privilegiada, uma vez que o eletrodo central é equidistante da superfície do globo de vidro. Quando uma lâmpada fluorescente ou um corpo aterrado qualquer, como a mão de uma pessoa por exemplo, se aproxima do globo, o campo elétrico fica mais intenso entre o eletrodo central e o corpo, uma vez que este passa a ser o condutor elétrico e induz a corrente em sua direção, como ilustra a Figura 4.4(b).

#### 4.1.4 AS FASES DA LUA

As posições relativas do Sol, da Terra e da Lua influenciam as fases lunares. Podemos determinar a fase lunar para um determinado dia e calcular a porcentagem da Lua iluminada pelo Sol. Nesses cálculos, consideramos a superfície lunar como sendo esférica.

Ao viajar pelo entorno da Terra ao longo de um mês, a Lua passa por um ciclo de fases de aproximadamente 29,5 dias, o que parece variar gradualmente a sua forma, como mostra a

Figura 4.5 (UFRGS, 2018).

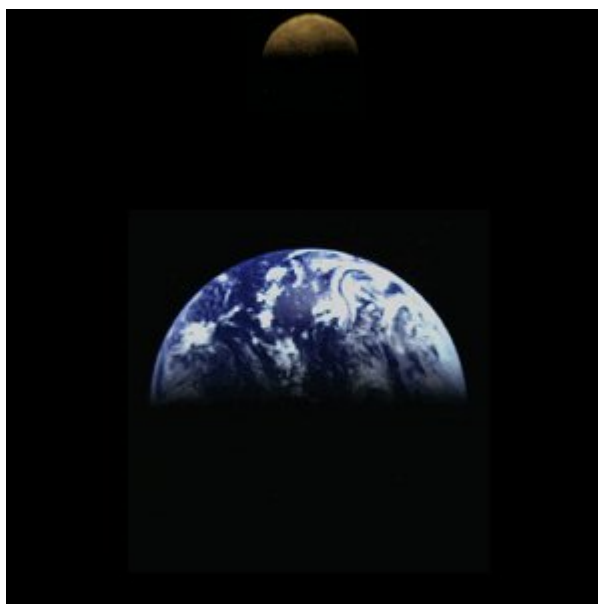
**Figura 4.5:** Fases da Lua em agosto de 2018

| Agosto 2018                                                                       |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                    |                                                                                     |                                                                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Dom                                                                               | Seg                                                                               | Ter                                                                               | Qua                                                                               | Qui                                                                                | Sex                                                                                 | Sáb                                                                                 |
|                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   | 1                                                                                 | 2                                                                                  | 3                                                                                   | 4                                                                                   |
|                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |  |   |  |  |
| 5                                                                                 | 6                                                                                 | 7                                                                                 | 8                                                                                 | 9                                                                                  | 10                                                                                  | 11                                                                                  |
|  |  |  |  |  |  |  |
| 12                                                                                | 13                                                                                | 14                                                                                | 15                                                                                | 16                                                                                 | 17                                                                                  | 18                                                                                  |
|  |  |  |  |   |  |  |
| 19                                                                                | 20                                                                                | 21                                                                                | 22                                                                                | 23                                                                                 | 24                                                                                  | 25                                                                                  |
|  |  |  |  |   |  |  |
| 26                                                                                | 27                                                                                | 28                                                                                | 29                                                                                | 30                                                                                 | 31                                                                                  |                                                                                     |
|  |  |  |  |  |  |                                                                                     |

Fonte: UFRGS (2018).

Segundo Aristóteles (384 a.C.–322 a.C.), as fases da Lua, um corpo não luminoso, resultam do fato desta ser iluminado pela luz do Sol. Assim, a fase lunar representa o quanto da face da Lua iluminada pelo Sol está voltada para a Terra, como ilustra a Figura 4.6.

**Figura 4.6:** Face da Lua iluminada pelo Sol

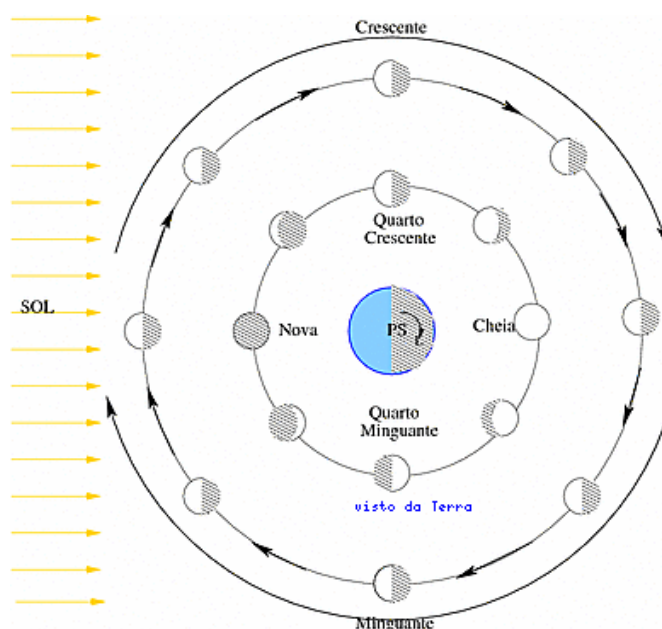


Fonte: UFRGS (2018).

Durante metade do ciclo lunar, a porção iluminada da Lua está aumentando (lua crescente) e, durante a outra metade, está diminuindo (lua minguante). Tradicionalmente, apenas as quatro fases mais características do ciclo recebem nome: lua nova, quarto crescente, lua cheia

e quarto minguante, porém a porção que vemos iluminada varia dia a dia. Por essa razão, os astrônomos definem a fase da Lua a partir do número de dias decorridos desde a Lua Nova (de 0 a 29,5) e da fração iluminada da face visível, como esquematizado na Figura 4.7.

**Figura 4.7:** Sistema Sol-Terra-Lua visto externamente



Fonte: UFRGS (2018).

O período sinódico da Lua, também denominado lunação ou mês lunar, é o intervalo de tempo entre duas luas novas sucessivas e corresponde a 29,53059 dias. O período sideral ou mês sideral da lua é o intervalo de tempo necessário para que ela realize uma revolução completa em torno da Terra e corresponde a 27,32166 dias. A Lua se move cerca de  $13^\circ$  por dia para leste em relação às estrelas. Esse movimento é um reflexo da translação da Lua em torno da Terra, completada em um mês sideral. O Sol se move cerca de  $1^\circ$  por dia para leste, refletindo a translação da Terra em torno do Sol, completada em um ano sideral, que equivale a 365,2564 dias. Portanto, a Lua se move cerca de  $12^\circ$  por dia em relação ao Sol, e a cada dia a Lua cruza o meridiano local aproximadamente 48 *min* mais tarde do que no dia anterior. Dessa forma, o dia lunar tem 24 horas e 48 minutos.

Para calcular a fase da lua de um determinado dia no hemisfério norte por exemplo, basta determinar a data específica (dia,mês,ano) no calendário juliano<sup>1</sup>. Esta data é transformada em Dia Juliano (*DJ*), sistema de medição de tempo usado pela comunidade astronômica. O *DJ* tem a vantagem de apresentar o turno da noite, que é justamente o período de observação astronômica, em um mesmo dia do calendário, facilitando assim a forma de indicação do

<sup>1</sup> Calendário criado pelo imperador romano Júlio César no ano 46 a.C. A reforma, que transformou o calendário romano em um calendário solar, com 365 dias, 12 meses e o ano bissexto, entrou em vigor em primeiro de janeiro de 45 a.C.

período de observação. Sua origem é o meio-dia do dia primeiro de janeiro de 4713 a.C. pelo calendário juliano, ou 24 de novembro de 4714 a.C., pelo calendário gregoriano<sup>2</sup>. Para calcular o *DJ* (VIÑUALES; GALÍN, 2018), devemos resolver inicialmente as seguintes equações:

$$d = \frac{14 - \text{mês}}{12}; \quad (4.1)$$

$$m = \text{mês} + 12d - 3; \quad (4.2)$$

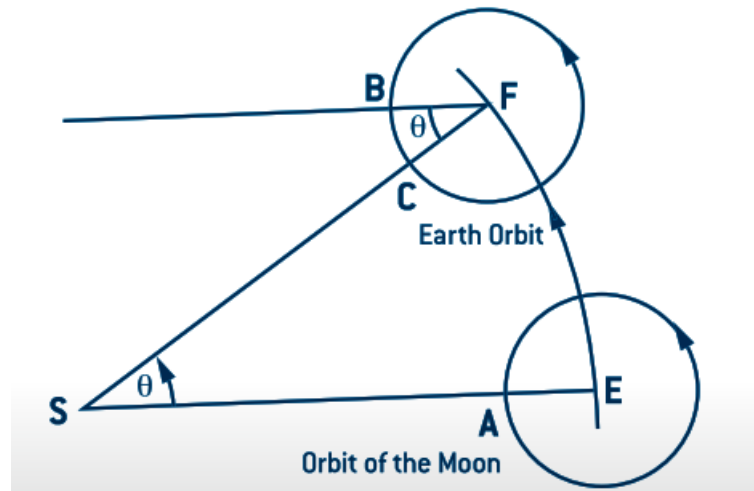
$$a = \text{ano} + 4800 - d. \quad (4.3)$$

Com as equações (4.1)-(4.3), podemos determinar o *DJ* com a equação

$$DJ[\text{dia}, \text{mês}, \text{ano}] = \text{dia} + \frac{153m + 2}{5} + 365a + \frac{a}{4} - \frac{a}{100} + \frac{a}{400} - 32045.$$

Na divisão do *DJ* pelo intervalo de tempo *SC* entre duas luas novas sucessivas, ilustrado na Figura 4.8 (VIÑUALES; GALÍN, 2018), a parte inteira do quociente representa o número de dias decorridos desde a última lua nova, enquanto o resto da divisão representa a idade *A* da fase lunar.

**Figura 4.8:** Relação entre o Sol, a Lua e a Terra de um ponto de vista geométrico



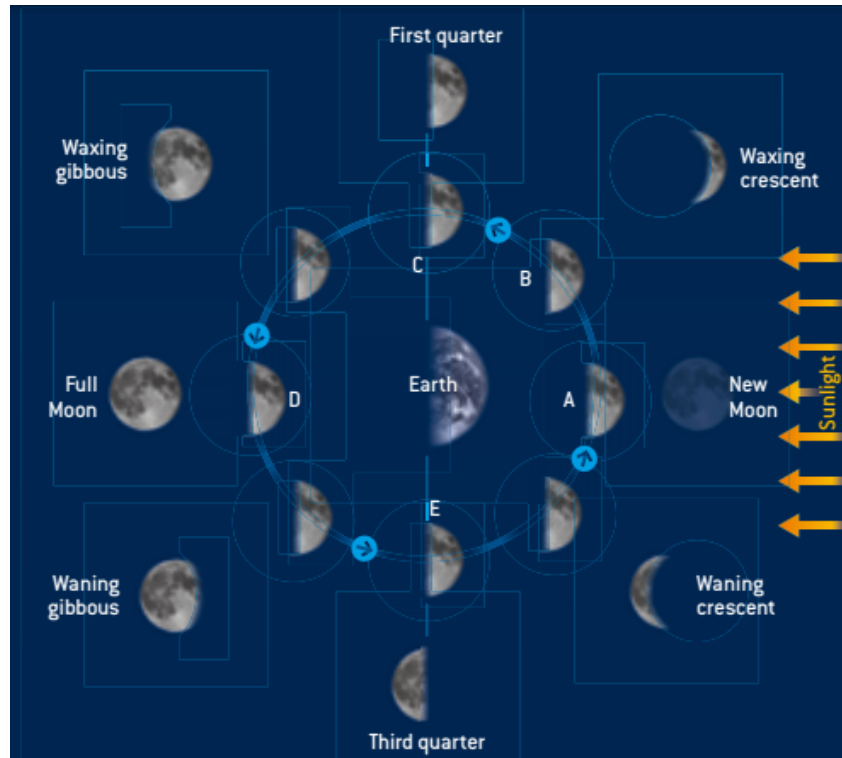
Fonte: Viñuales e Galín (2018).

Desta forma, é simples atribuir um número para cada uma das quatro fases da lua. Fazendo isto no sentido anti-horário, como na Figura 4.9, obtemos o valor 0 para a lua nova, 7,38 para o quarto crescente, 14,76 para a lua cheia e 22,15 para o quarto minguante.

Além de saber a fase da Lua em determinado dia, podemos calcular a porcentagem *P*

<sup>2</sup>Calendário de origem européia, promulgado pelo Papa Gregório XIII (1502-1585) em 24 de fevereiro de 1582. O calendário gregoriano corrigiu distorções do calendário juliano.

**Figura 4.9:** Regiões da Lua iluminadas pelo Sol: dia e noite



Fonte: Viñuales e Galín (2018).

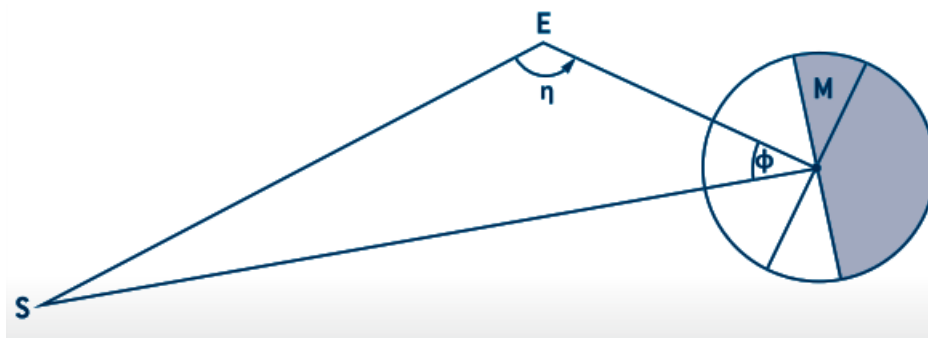
da parte iluminada (VIÑUALES; GALÍN, 2018) através da relação

$$P = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{360^\circ}{SC} A \right) \right], \quad (4.4)$$

onde  $SC$  é o intervalo de tempo entre duas luas novas e  $A$  é a idade da fase lunar.

Em (4.4),  $P = 0$  indica que a fase é lua nova;  $P = 1$ , lua cheia. E  $P = \frac{1}{2}$  indica qual fase lunar? Para responder a esta pergunta precisamos considerar outros aspectos, tais como a idade  $A$  da fase lunar e a medida do elongamento da Lua, dada por  $\eta = \frac{360^\circ}{SC} A$  e ilustrada na Figura 4.10.

**Figura 4.10:** O elongamento da Lua

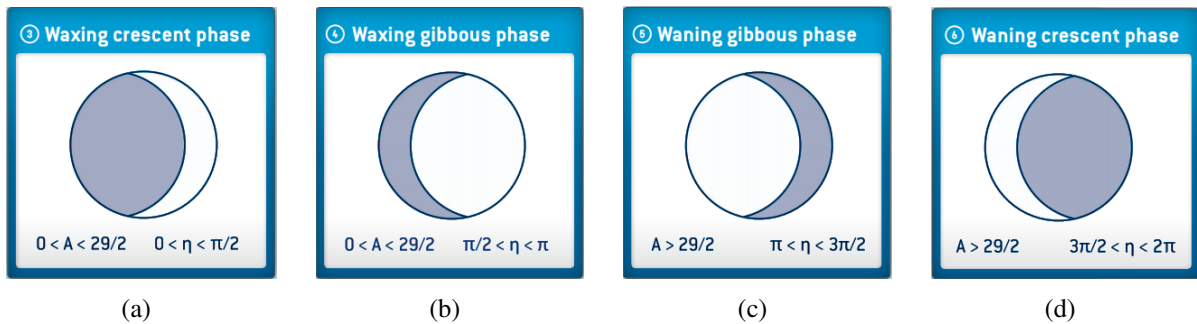


Fonte: Viñuales e Galín (2018).

Assim, com base na Figura 4.10, quando o Sol, a Terra e a Lua estão alinhados nesta ordem,  $\eta = 180^\circ$ , a lua é cheia,  $\frac{29}{2} = 14,5$  dias se passaram desde a última lua nova e podemos fazer as suposições descritas a seguir.

1. Se  $0 < A \leq \frac{29}{2}$ , então  $0 < \eta \leq \pi$  e temos os seguintes casos:
  - (a) Para  $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$ , a fase lunar é o quarto crescente, a sombra está à esquerda e a parte iluminada é menor do que a metade do disco lunar - Figura 4.11(a);
  - (b) Para  $\frac{\pi}{2} < \eta < \pi$ , a fase lunar é a lua gibbosa<sup>3</sup>, a sombra está à esquerda e a parte iluminada é maior do que a metade do disco lunar - Figura 4.11(b).
2. Se  $A = \frac{29}{2}$ , então  $\eta = \pi$  e a lua é cheia.
3. Se  $A \geq \frac{29}{2}$ , então  $\pi < \eta \leq 2\pi$  e temos os seguintes casos:
  - (a) Para  $\pi < \eta < \frac{3\pi}{2}$ , a fase lunar é a minguante convexa<sup>4</sup>, a sombra está à direita e a porção iluminada é maior do que a metade do disco lunar - Figura 4.11(c);
  - (b) Para  $\frac{3\pi}{2} < \eta < 2\pi$ , a fase lunar é o quarto minguante, a sombra está à direita e a parte iluminada é menor do que a metade do disco lunar - Figura 4.11(d).

**Figura 4.11:** Áreas iluminadas da Lua para diferentes valores de  $A$  e de  $\eta$ : (a)  $0 < A < \frac{29}{2}$  e  $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$ ; (b)  $0 < A < \frac{29}{2}$  e  $\frac{\pi}{2} < \eta < \pi$ ; (c)  $A > \frac{29}{2}$  e  $\pi < \eta < \frac{3\pi}{2}$ ; (d)  $A > \frac{29}{2}$  e  $\frac{3\pi}{2} < \eta < 2\pi$



Fonte: Viñuales e Galín (2018).

Das discussões anteriores, podemos concluir que  $P = \frac{1}{2}$  em (4.4) indica que a fase lunar é o quarto crescente ou o quarto minguante.

<sup>3</sup>Lua crescente convexa, marcada pela transição do quarto crescente para a lua cheia.

<sup>4</sup>Marcada pela transição da lua cheia para o quarto minguante

## 4.2 ATIVIDADES SOBRE O VOLUME DA ESFERA

O volume da esfera é comumente abordado nos livros didáticos de matemática para o Ensino Médio e no trabalho em sala de aula através da simples apresentação da relação  $\frac{4}{3}\pi r^3$ . Contudo, é muito mais enriquecedor propor alternativas para justificar ou deduzir essa relação.

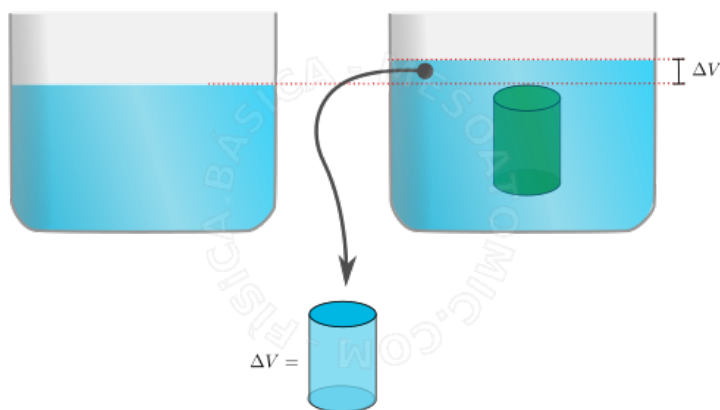
### 4.2.1 EXPERIMENTO COM O PRINCÍPIO DO EMPUXO DE ARQUIMEDES

O objetivo do experimento (RODRIGUES et al., s.d.) é estabelecer uma relação entre os volumes do cone, da esfera e do cilindro empregando o Princípio 4.1 ou princípio do empuxo de Arquimedes.

**Princípio 4.1** (do empuxo). *Todo corpo mergulhado em um fluido sofre a ação de um empuxo<sup>5</sup> vertical igual ao peso do líquido deslocado.*

Pelo Princípio 4.1, podemos concluir que o volume de um sólido completamente imerso em um líquido, como água por exemplo, é igual ao volume do líquido deslocado na imersão, como ilustra a Figura 4.12 (MESOATOMIC, 2018).

**Figura 4.12:** Volume de um sólido por imersão



Fonte: Mesoatomic (2018).

Como queremos determinar o volume da esfera a partir de dois volumes conhecidos, o volume do cilindro e o volume do cone, precisamos inicialmente relacionar esses dois volumes. Assim, a primeira fase do experimento consiste em comparar os volumes do cilindro e do cone de bases e alturas congruentes, ou seja, determinar quantas vezes o cone cabe no cilindro. Já a segunda fase consiste em estabelecer uma relação entre os volume do cilindro, do cone e da esfera de mesmo raio.

<sup>5</sup>Força vertical, dirigida para cima, que todo líquido exerce sobre um corpo nele mergulhado.

#### 4.2.1.1 ETAPAS DO EXPERIMENTO

1. Iniciar mostrando sólidos geométricos como o cubo, o paralelepípedo reto retângulo, o cilindro, o cone e a esfera, indagando maneiras de determinação do volume de cada um deles. Espera-se que as relações para o cálculo do volume do cubo, do paralelepípedo reto retângulo e do cilindro sejam determinadas rapidamente e que os estudantes proponham alternativas para o cálculo do volume do cone e da esfera.
2. Por intermédio do vídeo “Arquimedes”, ilustrado na Figura 4.13 (NUNES, 2009), apresentar o princípio do empuxo de Arquimedes e o problema que deu origem ao mesmo.

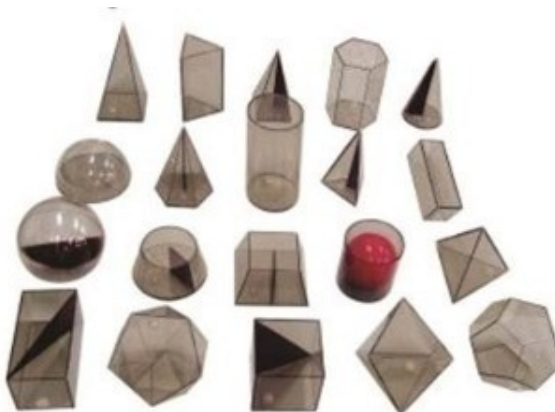
**Figura 4.13:** Vídeo sobre a coroa e Arquimedes



Fonte: Nunes (2009).

3. Instruir os estudantes, divididos em grupos, a preencher com areia fina e lacrar três sólidos vazados confeccionados em acrílico, como os ilustrados na Figura 4.14 (PLAY, 2010): uma semiesfera de raio  $r$ , um cone reto de raio  $r$  e altura  $r$  e um cilindro reto de

**Figura 4.14:** Sólidos em acrílico

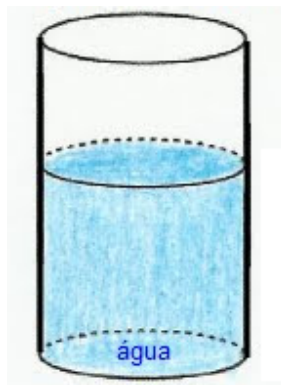


Fonte: Play (2010).

raio  $r$  e altura  $r$ <sup>6</sup>.

- Orientar os estudantes a mergulhar separadamente cada um dos três sólidos preenchidos com areia fina em um recipiente cilíndrico contendo água, como o da Figura 4.15.

**Figura 4.15:** Recipiente cilíndrico com água para imersão dos sólidos



Fonte: A autora.

O recipiente deve ter altura maior do que  $2r$  e raio não muito maior do que o raio  $r$  dos sólidos mergulhados para que o deslocamento de água seja evidente. Os estudantes devem medir a altura da água deslocada na imersão e anotar as medidas na Tabela 4.1.

**Tabela 4.1:** Experimento 1: altura da água deslocada na imersão

|            | Altura da água deslocada |
|------------|--------------------------|
| cone       |                          |
| cilindro   |                          |
| semiesfera |                          |

- Como o raio do recipiente cilíndrico com água é conhecido, a partir da altura da água deslocada, anotada na Tabela 4.1, os estudantes podem calcular o volume do cilindro correspondente ao volume de cada um dos três sólidos mergulhados (princípio do empuxo de Arquimedes). Com os dados da Tabela 4.1, os estudantes devem comparar o volume dos três sólidos mergulhados e preencher a Tabela 4.2.

**Tabela 4.2:** Experimento 1: razão entre os volumes do cone, do cilindro e da semiesfera

|                                                                 | Razão entre os volumes |
|-----------------------------------------------------------------|------------------------|
| $\mathcal{V}(\text{cone}) / \mathcal{V}(\text{cilindro})$       |                        |
| $\mathcal{V}(\text{cone}) / \mathcal{V}(\text{semiesfera})$     |                        |
| $\mathcal{V}(\text{cilindro}) / \mathcal{V}(\text{semiesfera})$ |                        |

<sup>6</sup>Há vários conjuntos de sólidos em acrílico disponíveis para compra. Contudo, provavelmente em nenhum deles encontraremos a semiesfera, o cone e o cilindro de mesmo raio  $r$  e altura  $r$ . Assim, será preciso confeccionar esses moldes primeiramente.

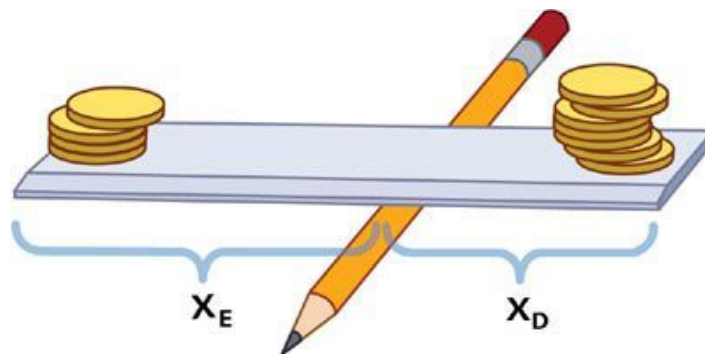
6. A partir das razões anotadas na Tabela 4.2, espera-se que os estudantes concluam que:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\text{cilindro}) &= 3\mathcal{V}(\text{cone}); \\ \mathcal{V}(\text{semiesfera}) &= 2\mathcal{V}(\text{cone}); \\ \mathcal{V}(\text{cilindro}) &= \frac{3}{2}\mathcal{V}(\text{semiesfera}); \\ \frac{\mathcal{V}(\text{cone})}{1} &= \frac{\mathcal{V}(\text{semiesfera})}{2} = \frac{\mathcal{V}(\text{cilindro})}{3}; \\ \mathcal{V}(\text{esfera}) &= 2\mathcal{V}(\text{semiesfera}) = \frac{4}{3}\pi r^3.\end{aligned}$$

#### 4.2.2 EXPERIMENTO COM O PRINCÍPIO DE EQUILÍBRIO DE ARQUIMEDES

A maior contribuição de Arquimedes para a geometria está no trabalho “O Método”, no qual explora a determinação de volumes através da Lei 2.1 ou lei da alavanca, que define um sistema mecânico de equilíbrio de pesos em uma alavanca (ARCHIMEDES; HEALTH, 1953) (ASSIS; MAGNAGHI, 2014), ilustrado na Figura 4.16 (ANTÔNIO, 2015).

**Figura 4.16:** Equilíbrio segundo a lei da alavanca de Arquimedes



Fonte: Antônio (2015).

Como a matemática grega era essencialmente geométrica, Arquimedes não determinou a relação para o cálculo do volume da esfera, entretanto demonstrou a proporcionalidade entre as massas de dois sólidos através da lei da alavanca, o que nos permite deduzir a relação.

Em sua obra *Sobre a esfera e o cilindro* (ARCHIMEDES; HEALTH, 1953), Arquimedes demonstrou o Teorema 4.1 utilizando um método semelhante ao da exaustão.

**Teorema 4.1** (Segundo teorema de Arquimedes). *O volume de qualquer esfera é igual a quatro vezes o cone que tem sua base igual ao círculo máximo da esfera e sua altura igual ao raio da esfera, enquanto que o volume do cilindro com base igual a um círculo máximo da esfera e altura igual ao diâmetro é uma vez e meia o volume da esfera.*

O objetivo do experimento (PINTO, 2005) é estabelecer a relação entre os volumes do cone, da esfera e do cilindro descrita no Teorema 4.1 empregando a Lei 2.1 ou lei da alavanca, também denominada princípio de equilíbrio de Arquimedes.

#### 4.2.2.1 ETAPAS DO EXPERIMENTO

1. Orientar os estudantes, divididos em grupos, a preencher com areia fina e lacrar três sólidos vazados confeccionados em acrílico, como os ilustrados na Figura 4.14: uma esfera de raio  $r$ , um cone reto de raio  $r$  e altura  $r$  e um cilindro equilátero de raio  $r$ <sup>7</sup>.
2. Desprezando-se o volume de acrílico nos três sólidos, a razão entre os volumes pode ser representada pela razão entre as massas. Dessa forma, usando uma barra de madeira e um ponto de apoio (fulcro) para construir uma alavanca similar àquela representada na Figura 4.16, os estudantes devem comparar as massas dos três sólidos, dois a dois, estabelecendo o equilíbrio na alavanca e anotando na Tabela 4.3 a distância dos sólidos comparados em relação ao ponto de apoio.

**Tabela 4.3:** Experimento 2: distância dos sólidos comparados em relação ao fulcro da alavanca

| Sólidos comparados | Distância dos sólidos em relação ao ponto de apoio |
|--------------------|----------------------------------------------------|
| Cone e cilindro    |                                                    |
| Cone e esfera      |                                                    |
| Cilindro e esfera  |                                                    |

3. Com os dados da Tabela 4.3, os estudantes devem calcular a razão entre as distâncias dos sólidos em relação ao ponto de apoio da alavanca e anotar os resultados na Tabela 4.4.

**Tabela 4.4:** Experimento 2: razão entre as distâncias dos sólidos comparados em relação ao fulcro da alavanca

| Sólidos comparados | Razão entre as distâncias em relação ao ponto de apoio |
|--------------------|--------------------------------------------------------|
| Cone e cilindro    |                                                        |
| Cone e esfera      |                                                        |
| Cilindro e esfera  |                                                        |

4. A partir das razões anotadas na Tabela 4.4, espera-se que os estudantes concluam que:
  - (a) o ponto de apoio da alavanca não é equidistante dos objetos comparados e que o equilíbrio ocorre de maneira inversamente proporcional à medida das massas, ou

<sup>7</sup>Há vários conjuntos de sólidos em acrílico disponíveis para compra. Contudo, provavelmente em nenhum deles encontraremos a esfera, o cone e o cilindro descritos. Assim, será preciso confeccionar esses moldes inicialmente.

seja, o objeto de maior massa está mais próximo do ponto de apoio enquanto o de menor massa está mais distante;

(b) as seguintes relações são válidas:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}(\text{cilindro}) &= 6\mathcal{V}(\text{cone}); \\
 \mathcal{V}(\text{esfera}) &= 4\mathcal{V}(\text{cone}); \\
 \mathcal{V}(\text{esfera}) &= \frac{4}{3}\pi r^3; \\
 \mathcal{V}(\text{cilindro}) &= \frac{3}{2}\mathcal{V}(\text{esfera}); \\
 \frac{\mathcal{V}(\text{cone}) + \mathcal{V}(\text{esfera})}{\mathcal{V}(\text{cilindro})} &= \frac{5}{6}.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

5. Os estudantes podem finalmente comprovar a relação (4.5) comparando os três sólidos na alavanca. Reescrevendo (4.5) como

$$6[\mathcal{V}(\text{cone}) + \mathcal{V}(\text{esfera})] = 5\mathcal{V}(\text{cilindro}),$$

temos que o cone e a esfera, a uma distância de  $6uc$  do fulcro da alavanca, equilibram o cilindro, este a uma distância de  $5uc$  do fulcro da alavanca.

No Capítulo 2, provamos empregando a lei da alavanca que, para uma esfera de raio  $r$ , um cone reto de raio  $2r$  e altura  $2r$  e um cilindro reto de raio  $2r$  e altura  $2r$ , vale a relação

$$\frac{\mathcal{V}(\text{cone}) + \mathcal{V}(\text{esfera})}{\mathcal{V}(\text{cilindro})} = \frac{1}{2},$$

ou, equivalentemente,

$$2[\mathcal{V}(\text{cone}) + \mathcal{V}(\text{esfera})] = \mathcal{V}(\text{cilindro}). \tag{4.6}$$

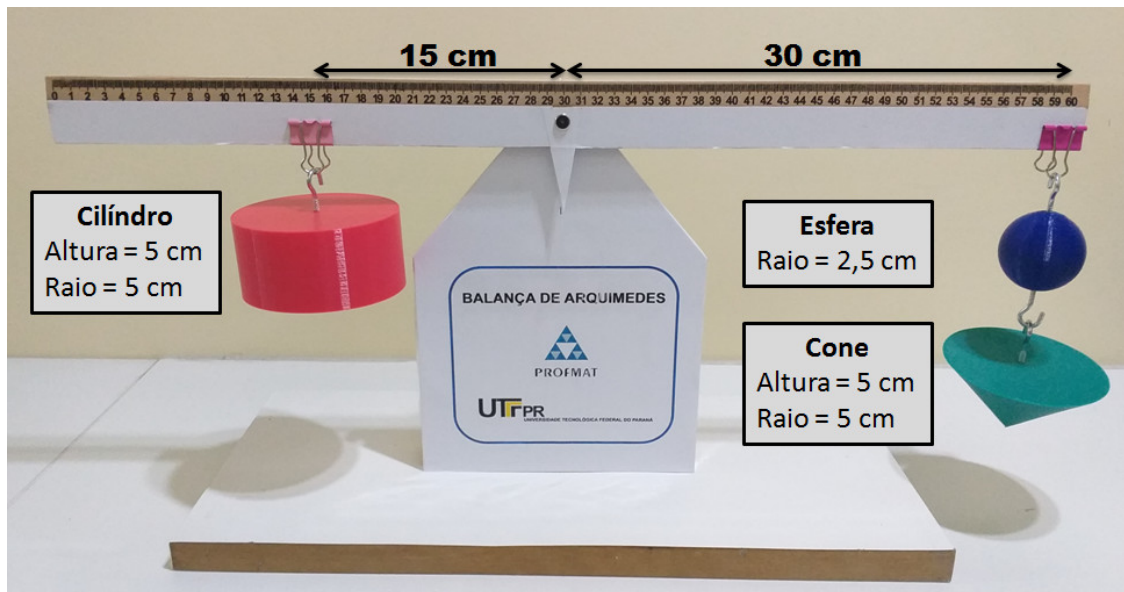
Dessa forma, pela relação (4.6) temos que o cone e a esfera, a uma distância  $d$  do fulcro da alavanca, equilibram o cilindro a uma distância  $\frac{d}{2}$  do fulcro da alavanca. As Figuras 4.17 e 4.18 ilustram a relação (4.6), para  $r = 2,5\text{ cm}$ , na balança de Arquimedes em equilíbrio e em desequilíbrio, respectivamente.

O cilindro, o cone e a esfera presentes nas Figuras 4.17 e 4.18 foram confeccionados em impressora 3D.

#### 4.2.3 ANIMAÇÃO SOBRE O PRINCÍPIO DE CAVALIERI NO GEOGEBRA 3D

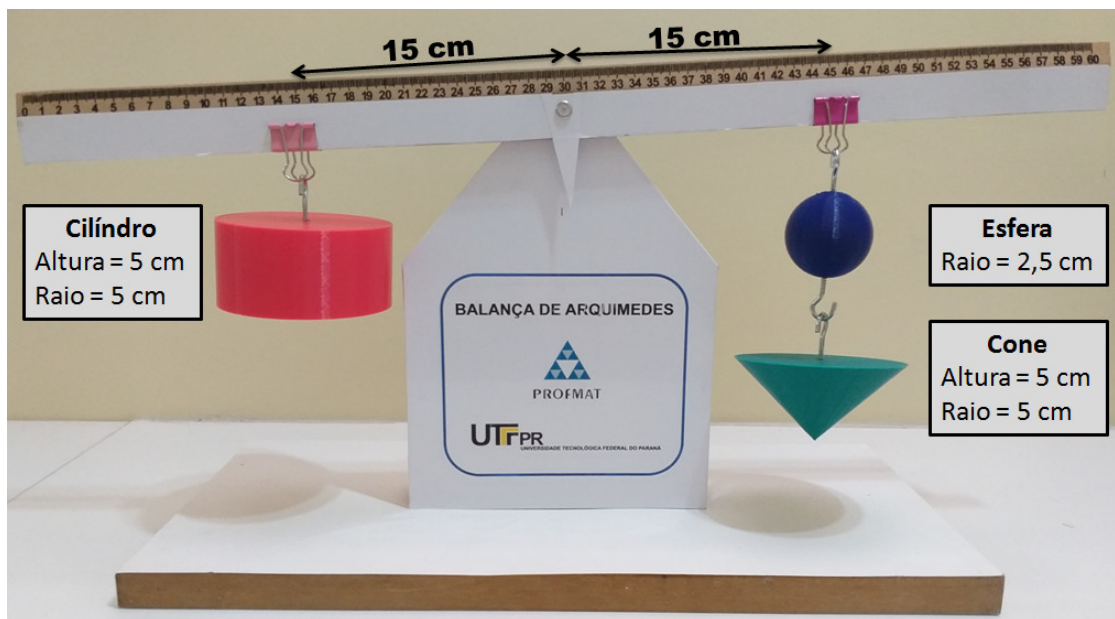
O objetivo da atividade é construir uma sequência didática no GeoGebra 3D para comprovar o volume da esfera empregando o princípio de Cavalieri. Descrevemos a seguir as etapas

**Figura 4.17:** Balança de Arquimedes em equilíbrio



Fonte: A autora.

**Figura 4.18:** Balança de Arquimedes em desequilíbrio



Fonte: A autora.

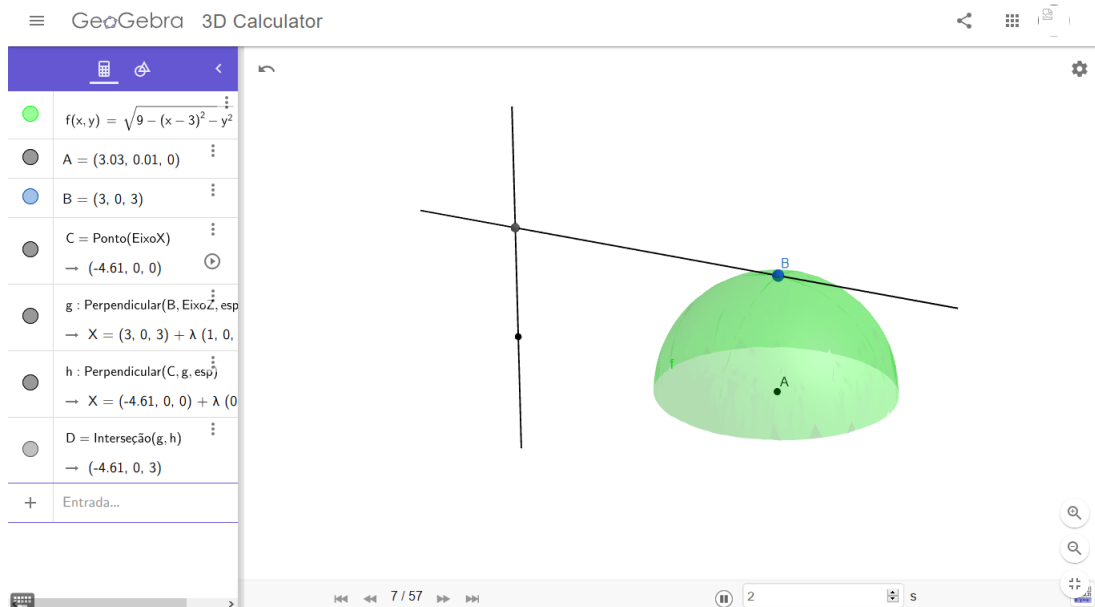
de construção da animação.

#### 4.2.3.1 ETAPAS DA CONSTRUÇÃO DA ANIMAÇÃO

1. Construir uma semiesfera de raio  $3\text{ cm}$  através da função  $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ . Marcar o centro  $A$  do círculo máximo da semiesfera e o raio  $\overline{AB}$  perpendicular ao plano desse círculo. Finalizar traçando duas retas, a primeira passando pelo ponto  $B$  e a segunda

paralela ao raio  $\overline{AB}$  e perpendicular à primeira, como na Figura 4.19.

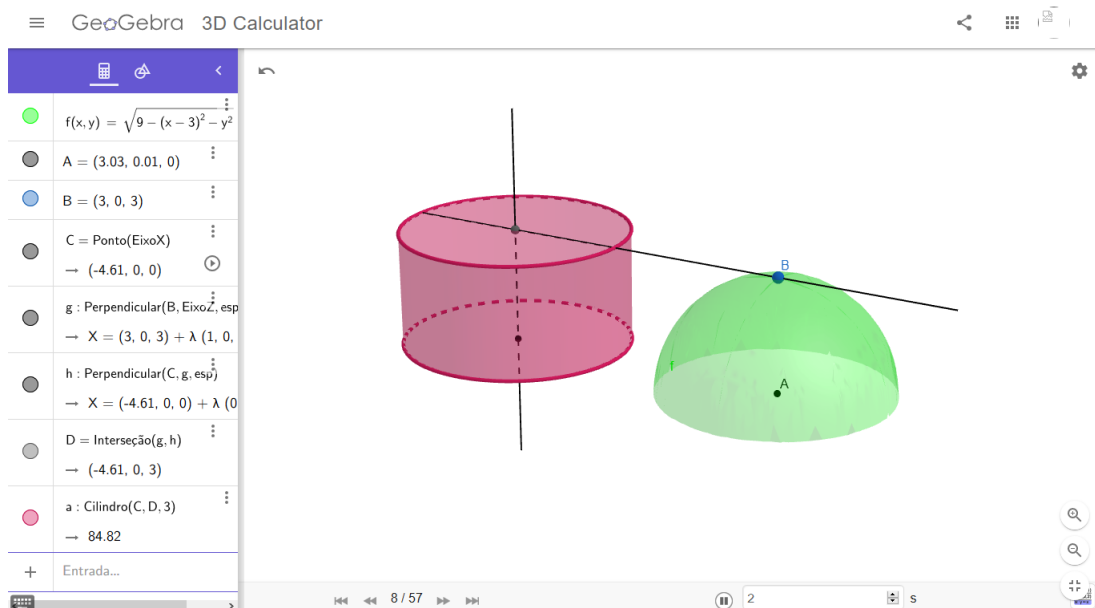
**Figura 4.19:** Construção da semiesfera de raio  $\overline{AB} = 3\text{ cm}$



Fonte: A autora.

2. Construir o cilindro reto de altura  $\overline{AB}$  e raio  $3\text{ cm}$  cujo eixo é a segunda reta traçada na etapa 1, como na Figura 4.20. O eixo do cilindro deve distar mais de  $6\text{ cm}$  da reta suporte de  $\overline{AB}$ .

**Figura 4.20:** Construção do cilindro de altura  $\overline{AB} = 3\text{ cm}$  e raio  $r = 3\text{ cm}$

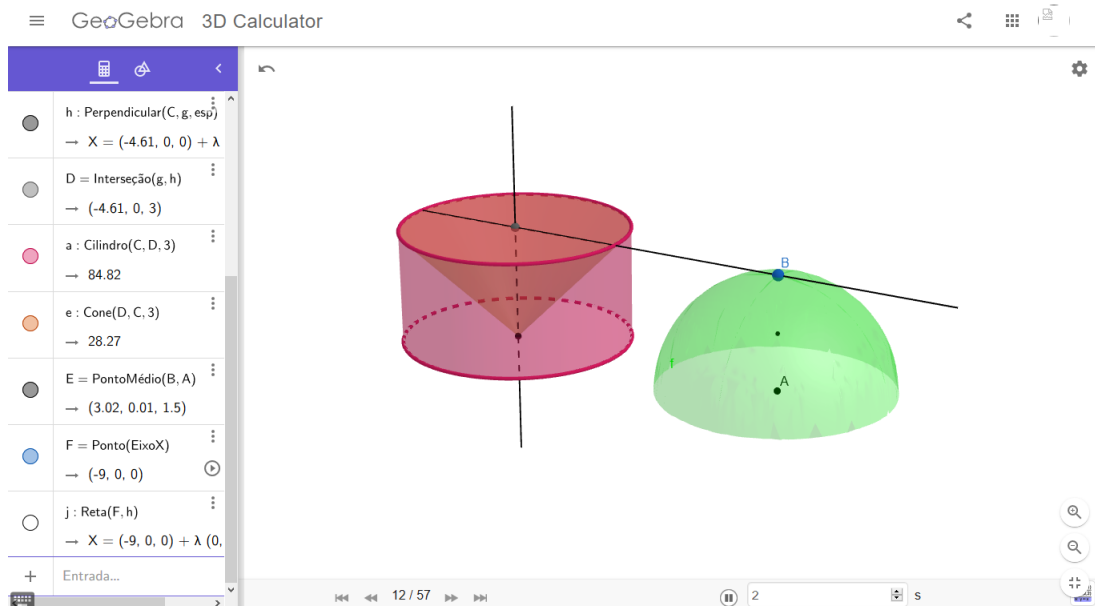


Fonte: A autora.

3. Construir um cone reto de altura  $\overline{AB}$  e raio  $3\text{ cm}$ , cujo vértice é o centro da base inferior

do cilindro construído na etapa 2, como na Figura 4.21. O sólido formado pelo cilindro menos o cone é a semianticlépsidra.

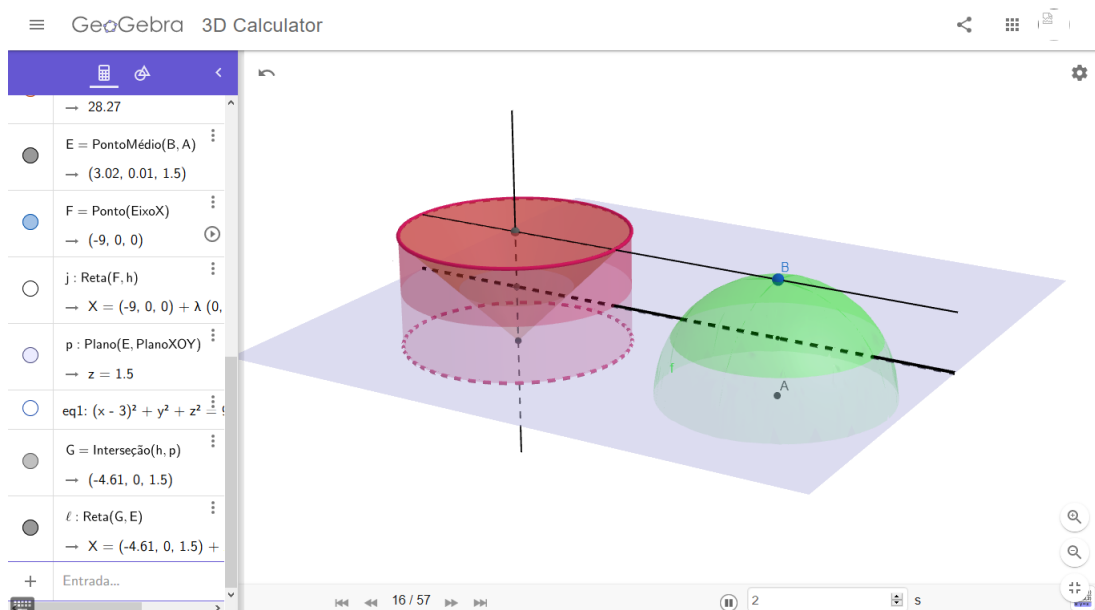
**Figura 4.21:** Construção da semianticlépsidra



Fonte: A autora.

4. Determinar o ponto médio de  $\overline{AB}$  e traçar o plano secante à semiesfera e à semianticlépsidra que passa por esse ponto médio e é perpendicular ao eixo do cilindro, como na Figura 4.22.

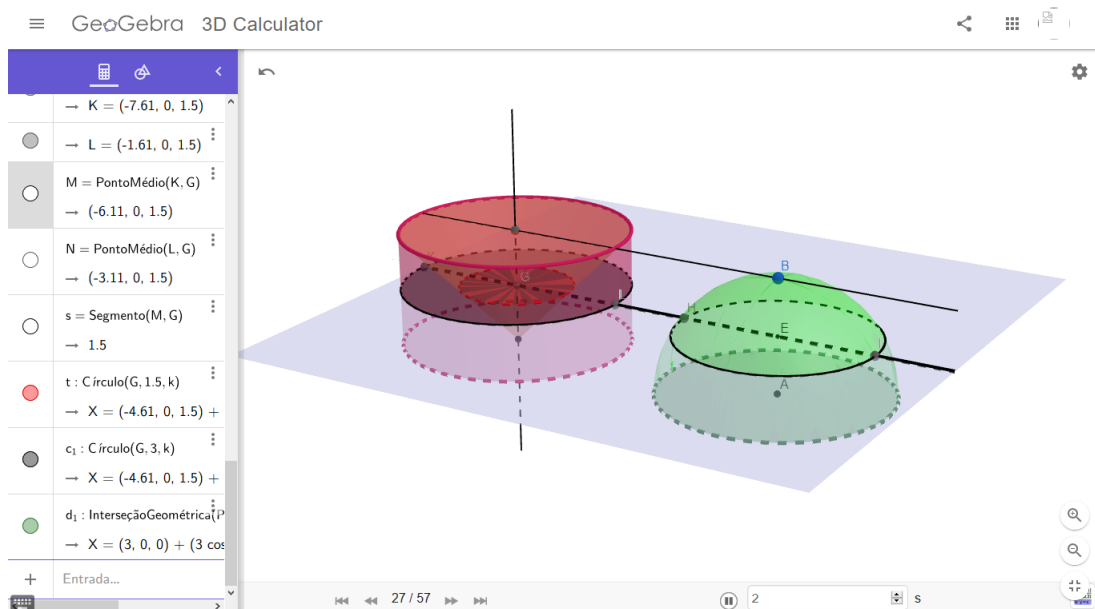
**Figura 4.22:** Determinação do plano secante à semiesfera e à semianticlépsidra



Fonte: A autora.

5. Destacar a intersecção do plano secante com a semiesfera, um círculo, e com a semianticlépsidra, uma coroa circular, como na Figura 4.23.

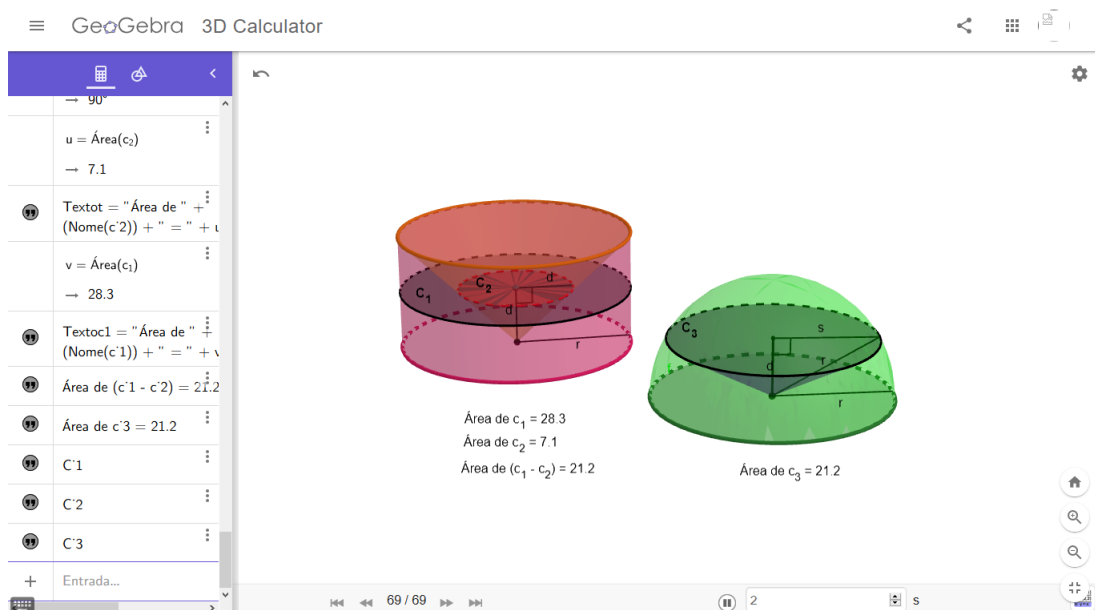
**Figura 4.23:** Seções na semiesfera e na semianticlépsidra



Fonte: A autora.

6. Calcular a área das seções na semiesfera e na semianticlépsidra e concluir que as seções são equivalentes, como na Figura 4.24.

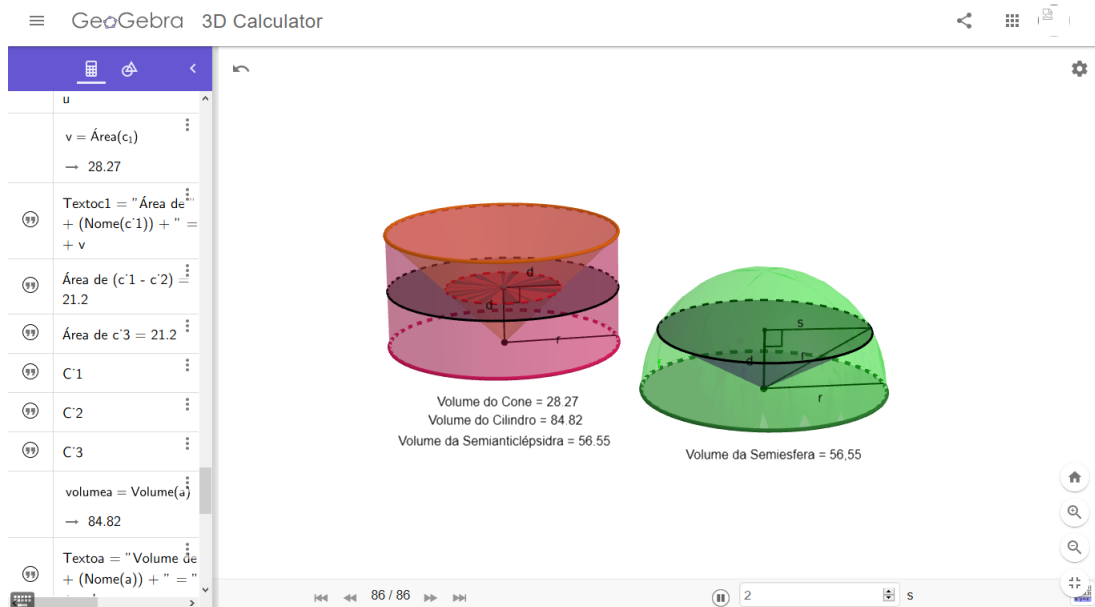
**Figura 4.24:** Área das seções na semiesfera e na semianticlépsidra



Fonte: A autora.

7. Calcular o volume da semiesfera e da semianticlépsidra, como na Figura 4.25.

**Figura 4.25:** Volume da semiesfera e da semianticlépsidra



Fonte: A autora.

A animação descrita nesta atividade está disponível em

<https://www.geogebra.org/3d/w94b5tmx>.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Investigamos neste trabalho diferentes técnicas/estratégias para comprovar as relações para o cálculo do volume da esfera e da área da superfície esférica, e que podem ser empregadas pelo professor de matemática em sala de aula no Ensino Médio bem como no Curso de Licenciatura em Matemática. Algumas dessas técnicas dependem de noções de limite, que podem ser exploradas de forma intuitiva pelo professor. O objetivo é substituir a simples apresentação dessas relações para os estudantes por atividades que conduzem à comprovação das mesmas, como fizemos no Capítulo 4.

Além disso, consideramos relevante para o aperfeiçoamento do processo de ensino aprendizagem em geometria o uso de ferramentas computacionais, de forma a ampliar as possibilidades de entendimento pelos estudantes das relações geométricas abordadas. Neste sentido, adotamos o uso do GeoGebra 3D por ser um aplicativo gratuito, com suporte aberto e de amplo uso pela comunidade matemática, o que possibilitou ter contato com seu funcionamento através de fóruns de discussão e superar as dificuldades de domínio do aplicativo em curto tempo. O uso do GeoGebra 3D permitiu ilustrar de forma técnica e precisa os elementos contidos nos conteúdos que envolvem o cálculo da área da superfície esférica e do volume da esfera, enriquecendo as demonstrações matemáticas estudadas e contribuindo com o registro de elementos gráficos para as aulas de geometria espacial.

Quanto à comprovação do volume da esfera, utilizamos em uma das estratégias o método da exaustão com a inscrição de troncos de cone retos de bases paralelas na semiesfera. Essa abordagem, até onde sabemos, é inédita na literatura e conduz a uma série numérica finita não usual, cujo limite provamos por intermédio do teorema do confronto. Dessa forma, o trabalho também tem um aspecto multidisciplinar, relacionando geometria, álgebra, teoria dos números e análise.

Esperamos que o presente trabalho motive os professores de matemática do Ensino Médio e do Ensino Superior, particularmente do curso de Licenciatura em Matemática, a organizar atividades para comprovar relações matemáticas em substituição à simples apresentação

dessas relações. E no que tange à geometria, motivá-los a usar um aplicativo de geometria dinâmica na organização e execução dessas atividades.

## REFERÊNCIAS

- AABOE, A. **Episódios da história antiga da matemática**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- AMBIENTEBRASIL. **Armazenamento de hidrogênio**. 2019. Disponível em: <[https://ambientes.ambientebrasil.com.br/energia/celula\\_combustivel/armazenamento\\_de\\_hidrogenio.html](https://ambientes.ambientebrasil.com.br/energia/celula_combustivel/armazenamento_de_hidrogenio.html)>. Acesso em: 24 out. 2019.
- ANTÔNIO, J. C. **Alavancas e equilíbrio**. 2015. Disponível em: <<https://www.institutonetclaroembratel.org.br/educacao/para-ensinar/planos-de-aula/alavancas-e-equilibrio/>>. Acesso em: 14 nov. 2019.
- ARCHIMEDES; HEALTH, T. L. **The works of Archimedes**. New York: Dover, 1953.
- ASSIS, A. K. T.; MAGNAGHI, C. P. **O método ilustrado de Arquimedes: utilizando a lei da alavanca para calcular áreas, volumes e centros de gravidade**. Montreal: Apeiron, 2014.
- ÁVILA, G. Arquimedes, a esfera e o cilindro. **Revista do Professor de Matemática**, n. 10, 1986.
- BONGIOVANNI, V. Revisitando a fórmula do volume do cone. **Revista do Professor de Matemática**, n. 73, p. 22–25, 2010.
- BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação 9394/1996**. Brasília: Governo Federal, 1996. Disponível em: <[www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/leis/l9394.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm)>. Acesso em: 18 nov. 2019.
- COMVEST. **Provas e gabaritos do vestibular da Unicamp**. 2019. Disponível em: <<https://www.comvest.unicamp.br/vestibulares-antiores/>>. Acesso em: 14 nov. 2019.
- CONHECIMENTOCIENTÍFICO. **Você sabia que existe uma bola de futebol que gera energia elétrica?** 2019. Disponível em: <<https://conhecimentocientifico.r7.com/voce-sabia-que-existe-uma-bola-de-futebol-que-gera-energia-eletrica/>>. Acesso em: 24 out. 2019.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar: geometria plana**. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar: geometria espacial**. 6. ed. São Paulo: Atual, 2011.
- GEOGEBRA3D. **GeoGebra 3D calculator**. 2019. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/3d>>. Acesso em: 20 dez. 2019.
- HEFEZ, A. **Elementos de aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- HELLMEISTER, A. C. P. **Geometria em sala de aula**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- HOFFMANN, M. **Explorando o Princípio de Cavalieri com o GeoGebra**. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Estado de Mato Grosso, 2018.

- INEP. **ENEM - Provas e gabaritos**. 2019. Disponível em: [http : //portal.inep.gov.br/provas – e – gabaritos](http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos)>. Acesso em: 14 nov. 2019.
- ITA. **Provas do vestibular do ITA**. 2019. Disponível em: [http : //www.vestibular.ita.br/provas.htm](http://www.vestibular.ita.br/provas.htm)>. Acesso em: 14 nov. 2019.
- LIMA, E. L. **Medida e forma em geometria**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.
- LIMA, E. L. et al. **A matemática do Ensino Médio**. v. 2, 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- LIMA, F. do N. **Estudo sobre o cálculo de áreas e volumes utilizando o método de exaustão e o princípio de Cavalieri**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, 2013.
- LOOMIS, E. S. **The pythagorean proposition**. Washington: National Council of Teachers of Mathematics, 1968.
- LULA, K. P. **Aplicações do Princípio de Cavalieri no cálculo de volumes e áreas**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Goiás, 2013.
- MEC. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília: MEC/SEB/DICEI, 2013. Disponível em: [http : //portal.mec.gov.br/secretaria – de – educacao – basica/apresentacao](http://portal.mec.gov.br/secretaria-de-educacao-basica/apresentacao)>. Acesso em: 18 nov. 2018.
- MEC. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEB/CNE, 2018.
- MEDEIROS, L. A. **Área e volume da esfera**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2014.
- MESOATOMIC. **Princípio de Arquimedes**. 2018. Disponível em: [https : //www.mesoatomic.com/pt – br/fisica/fluidos/hidrostatica/empuxo](https://www.mesoatomic.com/pt-br/fisica/fluidos/hidrostatica/empuxo)>. Acesso em: 14 nov. 2019.
- MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; ZANI, S. C. **Progressões e matemática financeira**. Rio de Janeiro: SBM, 1993.
- MOTTA, G. P. **Geometrias não Euclidianas no plano e geometria esférica**. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) — UTFPR, Curitiba, 2018.
- NETO, A. C. M. **Geometria**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- NÓS, R. L. **Acervo de material didático da disciplina Geometria Espacial**. Curitiba: UTFPR, 2019.
- NUNES, G. **Arquimedes**. 2009. Disponível em: [https : //www.youtube.com/watch?v = X8c3AdgMi9w](https://www.youtube.com/watch?v=X8c3AdgMi9w)>. Acesso em: 01 nov. 2019.
- OR, A. **Surface area of spheres**. 2019. Disponível em: [https : //www.geogebra.org/m/vn4daAZ4](https://www.geogebra.org/m/vn4daAZ4)>. Acesso em: 22 jul. 2019.
- PATERLINI, R. R. Os "teoremas" de cavalieri. **Revista do Professor de Matemática**, n. 72, p. 43–47, 2010.
- PILATI, G. C. **O Princípio de Cavalieri e o volume da esfera**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Maringá, 2015.

PINTO, F. de A. Arquimedes, as alavancas e o volume da esfera. **Revista do Professor de Matemática**, n. 58, p. 18–20, 2005.

PLAY, J. **Sólidos geométricos em acrílico**. 2010. Disponível em: <https://www.jottplay.com.br/produto/solidos-geometricos-acrilico/530>. Acesso em: 20 dez. 2019.

POGORÉLOV, A. V. **Geometría elemental**. Moscou: Editora Mir, 1974.

RAUTENBERG, R. R. **Os teoremas de Pappus para os sólidos de revolução**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Curitiba, 2013.

RODRIGUES, C. I.; REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. de. **Cilindro = cone + esfera/2?** s.d. Disponível em: [m3.ime.unicamp.br](http://m3.ime.unicamp.br). Acesso em: 23 ago. 2019.

SEED. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica - Matemática**. Curitiba: Governo do Paraná/SEED/DEB, 2008. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=1>. Acesso em: 18 nov. 2019.

SPIVAK, M. **Calculus**. 4. ed. S. l.: Publish or Perish, 2008.

STEWART, J. **Cálculo**. v. 1, 8. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2017a.

STEWART, J. **Cálculo**. v. 2, 8. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2017b.

UDESC. **Provas e gabaritos do vestibular da Udesc**. 2019. Disponível em: [https://www.udesc.br/vestibular/vestibulardeinverno/2019\\_2](https://www.udesc.br/vestibular/vestibulardeinverno/2019_2). Acesso em: 14 nov. 2019.

UFRGS. **Fases da Lua**. 2018. Disponível em: <http://www.astro.ufrgs.br/lua/lua.htm>. Acesso em: 26 out. 2019.

VIÑUALES, C. V.; GALÍN, E. V. **Phases of the Moon**. 2018. Disponível em: [https://www.science-on-stage.eu/images/download/iStage\\_10\\_Phases\\_of\\_the\\_Moon.pdf](https://www.science-on-stage.eu/images/download/iStage_10_Phases_of_the_Moon.pdf). Acesso em: 26 out. 2019.

WIKIPÉDIA. **Globo de plasma**. 2019. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Globo\\_de\\_plasma](https://pt.wikipedia.org/wiki/Globo_de_plasma). Acesso em: 24 out. 2019.

## APÊNDICE A – SOMA DOS QUADRADOS NOS $N$ PRIMEIROS NÚMEROS INTEIROS POSITIVOS

**Teorema A.1.** *A soma  $S_n$  dos quadrados dos  $n$  primeiros números inteiros positivos é igual a*

$$S_n = \sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Provamos o Teorema A.1 empregando dois métodos: o cubo da soma de dois termos e indução finita.

### A.1 PROVA COM O CUBO DA SOMA DE DOIS TERMOS

*Demonstração.*

O cubo da soma de dois números inteiros positivos  $i$  e  $j$  é igual a

$$(i+j)^3 = i^3 + 3i^2j + 3ij^2 + j^3. \quad (\text{A.1})$$

Em (A.1), para  $j = 1$  temos que

$$(i+1)^3 = i^3 + 3i^2 + 3i + 1. \quad (\text{A.2})$$

Substituindo  $i$  em (A.2) sucessivamente por  $1, 2, \dots, n$  e somando todas as igualdades, obtemos:

$$\sum_{i=1}^n (i+1)^3 = \sum_{i=1}^n i^3 + 3 \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \sum_{i=1}^n i + n. \quad (\text{A.3})$$

Os somatórios  $\sum_{i=1}^n (i+1)^3$  e  $\sum_{i=1}^n i^3$  em (A.3) têm as parcelas

$$2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{i=2}^n i^3$$

em comum. Dessa forma, podemos reescrever (A.3) como:

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3 \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \sum_{i=1}^n i + n. \quad (\text{A.4})$$

Como  $\sum_{i=1}^n i$  é uma progressão aritmética de razão 1 (MORGADO et al., 1993), temos que:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (\text{A.5})$$

Substituindo (A.5) em (A.4), concluimos que:

$$\begin{aligned} (n+1)^3 &= 1 + 3 \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \frac{n(n+1)}{2} + n; \\ 3 \sum_{i=1}^n i^2 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - 3 \frac{n(n+1)}{2} - n; \\ 3 \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{2n^3 + 6n^2 + 6n - 3n^2 - 3n - 2n}{2}; \\ \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}; \\ \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6}; \\ \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$S_n = \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (\text{A.6})$$

□

## A.2 PROVA POR INDUÇÃO FINITA

Uma descrição do método de prova por indução finita pode ser encontrada em (HEFEZ, 2006).

*Demonstração.* Seja

$$S_n = \sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (\text{A.7})$$

Para  $n = 1$ , temos que  $S_1 = \frac{1(2)(3)}{6} = \frac{6}{6} = 1$ . Assim, a base de indução é verificada.

Supomos agora que (A.7) seja verdadeira para  $n = k$  (h.i.), isto é,

$$S_k = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}. \quad (\text{A.8})$$

Mostremos então que (A.7) também vale para  $n = k + 1$ .

Somando  $(k+1)^2$  a ambos os membros de (A.8), obtemos:

$$\begin{aligned} (k+1)^2 + S_k &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2; \\ S_{k+1} &= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)(k+1)}{6}; \\ S_{k+1} &= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6}; \\ S_{k+1} &= \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6}; \\ S_{k+1} &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}; \\ S_{k+1} &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}; \\ S_{k+1} &= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio da indução, temos que (A.7) é válida para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $\square$

## APÊNDICE B – SÉRIE PARA O VOLUME DA ESFERA POR INTERMÉDIO DA INSCRIÇÃO DE TRONCOS DE CONE RETOS DE BASES PARALELAS

Utilizamos neste apêndice o teorema do confronto, (A.5) e (A.6) para provar o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sqrt{(n^2 - (i-1)^2)(n^2 - i^2)} = \frac{2}{3} = 0,\bar{6}, \quad (\text{B.1})$$

presente na demonstração do volume da esfera - Teorema 2.1 usando o método da exaustão por intermédio da inscrição na semiesfera de troncos de cone retos de bases paralelas. Antes disso, investigamos computacionalmente o limite da soma em (B.1).

### B.1 SOMA COMPUTACIONAL

Empregamos o código em linguagem C descrito a seguir para investigar o limite da soma em (B.1).

```

1 #include <windows.h>
2 #include <stdio.h>    //Leitura e escrita de arquivos
3 #include <stdlib.h>   //Funções para alocação dinâmica
4 #include <math.h>     //Funções matemáticas
5
6 int main()
7 {
8     FILE*f=fopen("serie-troncos.txt","w");
9     int i,n;
10    double soma=0., somaant=1.0;
11
12    for (n=2; somaant!=soma; n++) {
13        somaant=soma;

```

```

14     for(i=1; i<=n; i++) {
15         soma+=sqrt((pow(n,2)-pow(i-1,2))*(pow(n,2)-pow(i,2)));
16     }
17     soma=soma/pow(n,3);
18     fprintf(f, "n=%10d soma=%30.18g\n", n, soma);
19 }
20 fclose(f);
21 return 0;
22 }

```

Saída no arquivo serie-troncos.txt:

```
n=150163 soma=0.666666666649773287.
```

## B.2 TEOREMA DO CONFRONTO

**Teorema B.1** (do confronto). *Sejam  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  e  $\{c_n\}$  sequências numéricas tais que  $\{a_n\} \leq \{b_n\} \leq \{c_n\}$ ,  $\forall n \geq N$ ,  $N \in \mathbb{N}$ . Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{c_n\} = L$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{b_n\} = L$ .*

Uma prova do Teorema B.1 é encontrada em (SPIVAK, 2008) e em (STEWART, 2017a).

*Demonstração.* Para cada  $i$ , com  $1 \leq i \leq n$ ,

$$i-1 < i \Rightarrow (i-1)^2 < i^2 \Rightarrow -(i-1)^2 > -i^2. \quad (\text{B.2})$$

Somando  $n^2$  a ambos os membros de (B.2), obtemos que

$$n^2 - (i-1)^2 > n^2 - i^2. \quad (\text{B.3})$$

Multiplicando os lados de (B.3) por  $(n^2 - i^2)$ , temos que:

$$\begin{aligned} (n^2 - i^2)(n^2 - (i-1)^2) &\geq (n^2 - i^2)^2; \\ \sqrt{(n^2 - i^2)(n^2 - (i-1)^2)} &\geq n^2 - i^2. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

De (B.4), concluímos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \sqrt{(n^2 - i^2)(n^2 - (i-1)^2)} &> \sum_{i=1}^n (n^2 - i^2); \\
\frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sqrt{(n^2 - i^2)(n^2 - (i-1)^2)} &> \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (n^2 - i^2).
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Multiplicando agora os lados de (B.3) por  $(n^2 - (i-1)^2)$ , temos que:

$$\begin{aligned}
(n^2 - (i-1)^2)^2 &> (n^2 - i^2)(n^2 - (i-1)^2); \\
\sqrt{(n^2 - i^2)(n^2 - (i-1)^2)} &< n^2 - (i-1)^2.
\end{aligned} \tag{B.6}$$

De (B.6), concluimos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \sqrt{(n^2 - i^2)(n^2 - (i-1)^2)} &< \sum_{i=1}^n (n^2 - (i-1)^2); \\
\frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sqrt{(n^2 - i^2)(n^2 - (i-1)^2)} &< \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (n^2 - (i-1)^2).
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Logo, de (B.5) e (B.7) obtemos que

$$\frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (n^2 - i^2) < \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sqrt{(n^2 - i^2)(n^2 - (i-1)^2)} < \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (n^2 - (i-1)^2). \tag{B.8}$$

No lado direito da desigualdade em (B.5), usando propriedades da soma discreta temos que:

$$\frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (n^2 - i^2) = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n n^2 - \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = 1 - \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2. \tag{B.9}$$

Utilizando (A.6) em (B.9), concluimos que:

$$\frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (n^2 - i^2) = 1 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3};$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (n^2 - i^2) &= 1 - \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}; \\
\frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (n^2 - i^2) &= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}; \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (n^2 - i^2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} \right).
\end{aligned} \tag{B.10}$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0, \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

temos em (B.10) que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (n^2 - i^2) = \frac{2}{3}. \tag{B.11}$$

No lado direito da desigualdade em (B.7), usando propriedades da soma discreta temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (n^2 - (i-1)^2) &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n n^2 - \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{2}{n^3} \sum_{i=1}^n i - \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n 1; \\
\frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (n^2 - (i-1)^2) &= 1 - \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{2}{n^3} \sum_{i=1}^n i - \frac{1}{n^2}.
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Empregando (A.5) e (A.6) em (B.12), obtemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (n^2 - (i-1)^2) &= 1 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} + \frac{2n(n+1)}{2n^3} - \frac{1}{n^2}; \\
\frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (n^2 - (i-1)^2) &= 1 - \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} + \frac{n^2 + n}{n^3} - \frac{1}{n^2}; \\
\frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (n^2 - (i-1)^2) &= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2};
\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (n^2 - (i-1)^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} \right). \quad (\text{B.13})$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0, \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

temos em (B.13) que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (n^2 - (i-1)^2) = \frac{2}{3}. \quad (\text{B.14})$$

Assim, por (B.11) e (B.14),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (n^2 - i^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (n^2 - (i-1)^2) = \frac{2}{3}. \quad (\text{B.15})$$

Portanto, de (B.8) e (B.15) concluimos pelo Teorema B.1 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sqrt{(n^2 - i^2)(n^2 - (i-1)^2)} = \frac{2}{3}.$$

□

É importante salientar que quando multiplicamos  $\frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (n^2 - i^2)$  e  $\frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (n^2 - (i-1)^2)$  em (B.8) por  $\frac{\pi}{3} r^3$ , temos respectivamente a soma dos volumes dos  $n$  cilindros inscritos na semiesfera e dos  $n$  cilindros circunscritos à semiesfera. Desta maneira, vemos a realimentação do método da exaustão.